

К ОБРАЗОВАНИЮ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Касательное напряжение вызывает течение жидкости в пограничном слое, прилегающем к поверхности. Получено автомодельное решение для этого течения в предположении, что трение на поверхности меняется по степенному закону. В невязкой постановке исследована неустойчивость среднего профиля скорости и показано, что за счет энергии среднего движения волновые возмущения поверхности всегда возрастают.

1. Рассмотрим двумерное течение слоя вязкой тяжелой жидкости бесконечной глубины. Пусть в прямоугольной системе координат x, y жидкость занимает область $x \geq 0, y \leq 0$. На поверхности жидкости действует касательная сила $\tau = \tau(x)$ и постоянное давление p_0 . Под действием этой силы слои жидкости, прилегающие к поверхности, приходят в движение. Будем считать, что область возмущенного движения достаточно тонкая, так что течение в ней можно описать уравнениями пограничного слоя для составляющих скорости U, V и давления P

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = g \end{aligned} \quad (1.1)$$

На поверхности жидкости трение имеет заданное выражение и вертикальная составляющая скорости V обращается в нуль, а с увеличением глубины должна стремиться к нулю скорость горизонтального перемещения U . Отсюда получаем граничные условия

$$V = 0, \quad \mu \frac{\partial U}{\partial y} = \tau, \quad y = 0; \quad U \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty \quad (1.2)$$

Предложим, что распределение основных параметров вдоль поверхности степенное, в частности $\delta = Cx^r$. Здесь δ — условная толщина пограничного слоя, C, r — заданные константы. Тогда можно построить автомодельное решение задачи (1.1), (1.2).

Будем искать функцию тока Ψ в виде

$$\Psi = A\delta^m f(\eta), \quad \eta = y\delta^{-1} \quad (1.3)$$

где η — переменная подобия, A, m — константы.

Подставляя (1.3) в систему (1.1), получаем уравнение

$$Am\delta^m \delta' \left(\frac{m-1}{m} f'^2 - ff'' \right) = \nu f''' \quad (1.4)$$

Выберем A, m так, чтобы $mA\delta^m \delta' = \nu$. Нетрудно видеть, что

$$m = (1-r)r^{-1}, \quad A = \nu(rm)^{-1} C^{-1-m} \quad (1.5)$$

Положим также $f'(0) = 1$, тогда

$$\tau = \mu A \delta^{m-2} \quad (1.6)$$

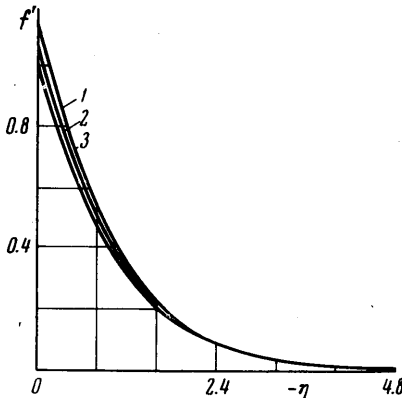
Учитывая уравнение (1.4) и граничные условия (1.2), приходим к следующей автомодельной задаче:

$$f''' + ff'' - \frac{1-2r}{1-r} f'^2 = 0, \quad \begin{aligned} f &= 0, \quad f'' = 1, \quad \eta = 0 \\ f' &\rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (1.7)$$

Составляющие скорости U , V , трение τ выражаются через функцию $f(\eta)$ и константы C , r , характеризующие толщину пограничного слоя, следующим образом:

$$U = U_\infty f'(\eta), \quad V = -\nu \delta^{-1} (f - m^{-1} \eta f') \quad (1.8)$$

$$\tau = \mu \nu (r m)^{-1} C^{-3} x^{1-3r} f''(\eta), \\ U_\infty = \mu^{-1} \tau \delta$$



Фиг. 1

Решение задачи (1.7) получено численным интегрированием от точки $\eta = 0$. Граничное условие при $\eta \rightarrow -\infty$ удовлетворялось подбором величины $f'(0)$. Это решение зависит от одного произвольного параметра r , значение которого определяет характер изменения трения на поверхности. Расчеты проводились при $r = 2/5, 1/3, 1/4$. В первом из этих случаев трение вдоль поверхности убывает как $x^{-1/5}$, во втором случае — остается постоянным и в третьем — возрастает как $x^{1/4}$. Общим свойством решений является слабая зависимость от значения r . Поэтому при различных законах изменения трения вдоль поверхности распределение скоростей в переменных подобия меняется мало. В таблице

приведено решение для случая $r = 1/3$, а на фиг. 1 показано распределение $f'(\eta)$ для $r = 2/5, 1/3, 1/4$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Так как во всех вариантах имеем $f''(0) \approx 1$, то из (1.8) следует, что величина U_∞ представляет собой скорость жидкости на поверхности.

Как видно в таблице, скорость U практически обращается в нуль при $\eta_* = -5$, поэтому значение $\eta_* = -5$ можно принять за границу слоя. Тогда толщина пограничного слоя Δ связана с условной толщиной δ соотношением $\Delta = 5\delta$.

η	f	f'	f''	η	f	f'	f''
-0	0	1.132	1.000	-2.0	-0.9990	0.1469	0.1614
-0.2	-0.2073	0.9451	0.8727	-2.4	-1.0465	0.0944	0.1049
-0.4	-0.3797	0.7829	0.7505	-2.8	-1.0770	0.0605	0.0676
0.6	-0.5220	0.6443	0.6372	-3.2	-1.0965	0.0386	0.0434
-0.8	-0.6388	0.5273	0.5350	-4.0	-1.1168	0.0156	0.0177
-1.0	-0.7342	0.4295	0.4450	-5.0	-1.1262	0.0050	0.0057
-1.2	-0.8118	0.3434	0.3673	-8.0	-1.1304	0.0001	0.0002
-1.6	-0.9253	0.2273	0.2456				

2. Исследуем теперь устойчивость течения, заданного соотношениями (1.8), к малым возмущениям в виде бегущих волн. Применим подход, который обычно используется для исследования устойчивости пограничного слоя на теле [1]. Он заключается в том, что течение считается плоскопараллельным и характеризуется локальными значениями δ , U_∞ , взятыми при фиксированном x . В рассматриваемом случае возмущаются не только скорости u , v и давление p , но и форма поверхности. Эти изменения следует

учесть в формулах основного течения. Пусть форма поверхности есть $y = h_1(x, t)$. Введем новую переменную $y_1 = y - h_1(x, t)$ и положим

$$\begin{aligned} u &= U + u_1, & v &= v_1, & p &= P + p_1 \\ U &= U_\infty f'(y_1 / \delta), & P &= p_0 - \rho g y_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь u_1, v_1, p_1 — возмущения. Пренебрегая квадратами возмущений, из уравнений движения и неразрывности получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - U' \frac{\partial h_1}{\partial t} + U \frac{\partial u_1}{\partial x} - U U' \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \left(P' \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + U \frac{\partial v_1}{\partial x} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y}, & \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} - U' \frac{\partial h_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

К системе (2.2) надо присоединить уравнение расхода для всего слоя, которое в линейном приближении имеет вид

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + U \frac{\partial h_1}{\partial x} - v_1 = 0 \quad \text{при } y_1 = 0 \quad (2.3)$$

В уравнениях (2.2) не учтены вязкие члены, поэтому они составляют систему невязкой неустойчивости, которая и будет рассматриваться здесь.

Естественным условием при $y_1 \rightarrow -\infty$ является условие затухания возмущений. Так как поверхность жидкости свободная, то на ней должно обращаться в нуль возмущение давления. Допустим, что на поверхности может действовать поверхностное натяжение. Тогда граничными условиями задачи (2.2), (2.3) будут следующие:

$$p_1 = -\sigma \delta^2 h_1 / \delta x^2, \quad y_1 = 0; \quad u_1^2 + v_1^2 \rightarrow 0, \quad y_1 \rightarrow -\infty \quad (2.4)$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Приведем уравнения и граничные условия (2.2) — (2.4) к безразмерному виду, используя в качестве масштаба скорости U_∞ , а в качестве масштаба длины δ . В силу того что коэффициенты уравнений зависят только от y_1 , задача имеет решения в виде бегущей волны с переменной во времени амплитудой

$$\begin{aligned} u_1 &= U_\infty u(\eta) \varphi, & v_1 &= U_\infty v(\eta) \varphi, & h_1 &= \delta h \varphi \\ p_1 &= \rho U_\infty^2 p(\eta) \varphi, & \eta &= y_1 / \delta, & \varphi &= \exp[i\alpha \delta^{-1}(x - U_\infty c t)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Волновое число α считается заданным.

Подставляя (2.5) в уравнения и граничные условия (2.2) — (2.4), найдем u, p

$$u = U' h + i\alpha^{-1} v', \quad p = U' v - (U - c) v' + \delta g U_\infty^{-2} h \quad (2.6)$$

Для определения амплитуды поперечной составляющей скорости получается следующая однородная краевая задача:

$$\begin{aligned} (U - c)(v'' - \alpha^2 v) - U'' v &= 0 \\ (U - c)^2 v' - [(U - c)U' + F]v &= 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad v \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (2.7)$$

Скорость основного течения отнесена к U_∞ , поэтому в уравнениях (2.7) $U = f(\eta)$. Параметр F выражается через δ , U_∞ и физические характеристики жидкости

$$F = g\delta U_\infty^{-2} + \alpha^2 U_\infty^{-2} (\rho\delta)^{-1} \tag{2.8}$$

Нетривиальное решение задачи (2.7) при заданных профиле скорости $U(\eta)$ и параметре F существует только при определенном значении собственного числа c . Если $U \equiv 0$, то $v = e^{\alpha\eta}$ есть решение первого уравнения (2.7), и из граничного условия получаем

$$c^2 = \alpha^{-1}F$$

Так как c здесь действительное число, то это решение описывает свободные гравитационные волны [2], которые не затухают и не возрастают. В общем случае будем иметь $c = c_r + ic_i$, причем величина c_i характеризует скорость нарастания возмущения.

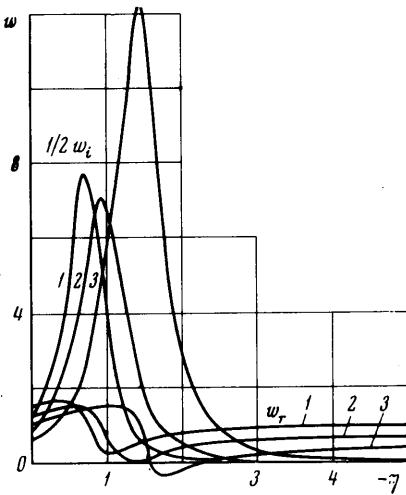
Задача (2.7) на собственные значения решалась численно. Удобно перейти к новой переменной $w = v' / v$. Тогда будем иметь

$$w' = \alpha^2 - w^2 + U''(U - c)^{-1} \tag{2.9}$$

$$w(-\infty) = \alpha$$

$$w(0) = (U - c)^{-2} [F + U'(U - c)]$$

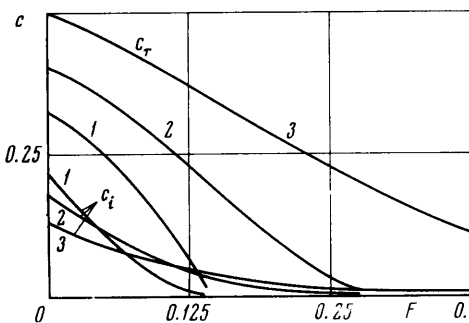
Численное решение уравнения (2.9) проводилось от точки $\eta = \eta_1$. Значение η_1 должно быть достаточно большим по модулю, чтобы распределение скорости основного течения вышло на асимптоту. Практически η_1 менялось в интервале $-7 \geq \eta \geq -9$. В качестве начального значения w принималось α , и, таким образом, удовлетворялось первое из граничных условий.



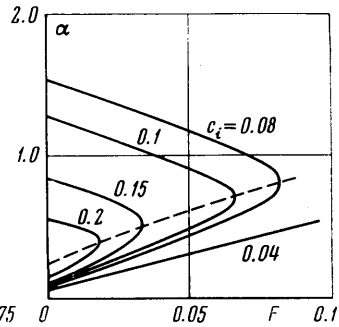
Фиг. 2

Второе граничное условие при $\eta = 0$ удовлетворялось подбором c . В расчетах принято $r = 1/3$.

На фиг. 2 показана форма собственных функций в нескольких конкретных вариантах, кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\alpha = 1.0, 0.7, 0.45$. Основное взаимо-



Фиг. 3



Фиг. 4

действие волнового возмущения со средним течением происходит вблизи $\eta \approx -1.5$. Здесь w_i имеет острый максимум, значительно превышающий асимптотическое значение $w_i(-\infty) = 0$ и значение $w_i(0)$.

При всех значениях α и F существуют растущие волновые возмущения, для которых $c_i \neq 0$. Пользуясь формулами (2.5), найдем уравнение движения фронта волны $x_1(t)$ и скорость нарастания амплитуды

$$x_1 = U_\infty c_i t, \quad \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = \frac{\tau a c_i}{\mu} \quad (2.10)$$

Результаты вычисления собственных чисел приведены на фиг. 3, где кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\alpha = 0.5, 0.7, 1.0$.

Как можно видеть на фиг. 3, c_i растет с уменьшением F при каждом фиксированном α . В варианте $r = 1/3$ вдоль поверхности жидкости $\delta \sim x^{1/3}$, $U \sim x^{1/3}$, поэтому при $x \rightarrow \infty$ величина F убывает и стремится к нулю. Следовательно, скорость нарастания волны мала вблизи начала пограничного слоя и увеличивается по мере движения вниз по потоку.

Кривые равных значений c_i в зависимости от α и F показаны на фиг. 4. Наибольшее значение $c_i = 0.243$ достигается при $F = 0$, $\alpha = 0.25$, а максимальной скоростью нарастания $a c_i = 0.131$ обладает волновое возмущение с $\alpha \approx 1$. Скорость перемещения этой волны составляет $0.514 U_\infty$.

Рассмотренная задача связана с проблемой образования волн под действием потока газа, движущегося над поверхностью жидкости, который создает на ней распределенное касательное напряжение. На поверхности раздела проявляются несколько различных механизмов взаимодействия. В ряде работ ([3, 4] и др.) показывается, что значительную роль среди них может играть дрейфовое течение жидкости под действием силы трения на поверхности. Полученное здесь решение для степенного закона распределения трения представляет собой определенную модель такого явления. Оно показывает, что существует механизм передачи энергии от газового потока к среднему течению и от среднего течения к волнам.

Поступило 12 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.—Л., Гостехиздат, 1936.
3. Stewart R. W. Mechanics of the air-see interface. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9, pt 2, p. 47.
4. Plate E. I., Chang P. C., Hidy G. M. Experiments on the generation of small water waves by wind. Fluid Mech., 1969, vol. 35, pt 4, pp. 625—656.