№ 3 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1970

О НЕКОТОРЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ В ТЕЧЕНИЯХ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В. С. ГАЛКИН, М. Н. КОГАН, О. Г. ФРИДЛЕНДЕР

(*Москва*)

Для учета влияния разреженности газа были предложены уравнения Барнетта и условия скольжения на стенке. Однако сейчас известно, что в общем случае уравнения Барнетта не позволяют продвинуться в сторону разреженного газа. В данной работе показано обратное: уравнения Барнетта и условия скольжения необходимы и правомерны для описания широкого класса движений плотного газа (т. е. при числе Кнудсена $K \to 0$).

Обычно для описания течений сплошной среды, имеющих место при $K \to 0$, справедливы уравнения Навье — Стокса с граничными условиями прилипания. Для распространения решения в сторону больших K часто привлекаются граничные условия скольжения и уравнения Барнетта, содержащие члены более высокого порядка по K. Однако, вообще говоря, область применимости (по числу Кнудсена) уравнений Барнетта такая же, что и уравнений Навье — Стокса, так что учет барнеттовских членов обычно дает лишь малые поправки.

В данной работе обращается внимание на существование течений сплошной среды (т. е. при $K \to 0$), для описания которых уже в первом, основном, приближении необходим учет кинетических эффектов — барнеттовских членов и скольжения.

Рассматривается класс течений, в которых характерное изменение энтальпии много больше характерной кинетической энергии. Детально анализируется случай медленных стационарных движений газа в условиях, когда число Маха $M \to 0$, $K \to 0$ при числе Рейнольдса $R \leqslant O(1)$ и $T^{-1}\Delta T = O(1)$, где ΔT — характерный перепад температуры (заметим, что классическое течение Стокса более «медленное», так как оно реализуется при $M \to 0$, $K \to 0$, $R \to 0$).

В этих условиях некоторые барнеттовские члены в уравнении импульса имеют тот же порядок, что и навье — стоксовские. Необходимо учитывать также скорость скольжения u_τ, вызванную градиентом температуры вдоль поверхности тела (крип), так как она — «основного» порядка ($R = u_\tau \rho_\infty L \mu_\infty^{-1} = O(1)$).

Влияние указанных кинетических эффектов иллюстрируется тремя задачами. В п. 2 показано, что газ может находиться в состоянии покоя при $T_w \neq T$ только около равномерно нагретой сферы (T_w — температура стенки). В п. 3 рассмотрены течения, вызванные неравномерным нагревом тела (радиометрический эффект); действующая при этом на сферу сила оказывается много большей силы Стокса F_S. В п. 4 рассмотрено течение около равномерно нагретой сферы при $R_\infty \ll 1$ и найдена соответствующая поправка к F_S.

Рассмотренные в п. 3, 4 задачи решались в последние годы во многих работах при помощи уравнений Навье — Стокса без учета барнеттовских членов (см., например, [1, 2], где имеется обширная библиография).

1. Постановка задачи. Чаще всего характерный перепад энтальпии в потоках около тел порядка $u_\infty^2 / 2$. Однако в ряде случаев этот перепад может быть много больше кинетической энергии. Для этого число Маха набегающего потока M_∞ должно быть малым, или тело должно быть очень сильно нагрето (охлаждено). Рассмотрим течения сплошной среды ($K = \lambda / L \to 0$) при

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty} \to 0, \qquad R_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_\infty} \approx \frac{M_\infty}{K} \leqslant O(1) \tag{1.1}$$

Здесь λ — средняя длина свободного пробега молекул, L — характерный размер течения. Если граничные условия не вводят в задачу характерный перепад температур ΔT, то изменение температуры определяется переходом в тепло кинетической энергии и

$$T^{-1}\Delta T \sim M_\infty^2 \to 0 \tag{1.2}$$

При этом справедливы уравнения Навье — Стокса с условиями прилипания на стенке.

Ниже рассматриваются течения, в которых характерный перепад температуры задается граничными условиями, причем так, что

$$T^{-1}\Delta T \leqslant O(1) \tag{1.3}$$

В этом случае некоторые барнеттовские члены уравнения импульса, связанные с градиентами температуры, оказываются того же порядка, что и инерционные и «вязкие» (навье — стоксовские) члены.

Действительно, сравним навье — стоксовские напряжения $p_{ij}^{(1)}$, входящие в уравнение импульса, с максимальными барнеттовскими членами [1] этого уравнения $p_{ij}^{(2)}$. Их отношение с учетом (1.3)

$$\frac{p_{ij}^{(1)}}{p_{ij}^{(2)}} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Big/ \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \sim R_\infty \leqslant O(1) \tag{1.4}$$

Отношение членов $p_{ij}^{(2)}$, связанных с градиентами скоростей, к $p_{ij}^{(1)}$ порядка $M_\infty K$, т. е. они пренебрежимо малы. В итоге тензор напряжений приобретает следующий вид:

$$p_{ij} = -2\mu\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] + \frac{\mu^2}{\rho T^2}\left\{\omega_1 T\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}\right] + \omega_2\left[\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right]\right\} \tag{1.5}$$

$$[A_{ij}] = {}^1/_2(A_{ij} + A_{ji}) - {}^1/_3\delta_{ij}A_{kk}$$

Первый член в формуле (1.5) — «навье — стоксовский», остальные — барнеттовские. Здесь и в дальнейшем предполагается суммирование по повторяющимся индексам. При $\mu \sim T^s$ коэффициент ω_2 можно записать в виде [3]

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT} - \omega_3 = \omega_1 s - \omega_3 \tag{1.6}$$

где ω_i — положительные числа (для максвелловских молекул $s = 1$ и $\omega_1 = \omega_3 = 3$). В этом случае барнеттовские напряжения удобнее записать в виде

$$p_{ij}^{(2)} = AT^{2s-1}\left(\omega_1\left\{T\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}\right] + s\left[\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right]\right\} - \omega_3\left[\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right]\right) \tag{1.7}$$

$$A = BT_\infty^{-2s}, \qquad B = (k/m)\mu_\infty^2 / p_\infty \tag{1.8}$$

Здесь k/m — газовая постоянная. В коэффициенте при $p_{ij}^{(2)}$ принято $p = p_\infty$, так как из уравнения импульса для перепада давления Δp следует оценка

$$p^{-1}\Delta p = O[\max(K^2, M_\infty K)] \leqslant 1 \tag{1.9}$$

Выражение для теплового потока имеет здесь обычный (навье — стоксовский) вид

$$q_i = q_i^{(1)} = -\eta \partial T / \partial x_i \tag{1.10}$$

так как отношение отброшенных членов в q_i к $q_i^{(1)}$ порядка $\max(K^2, M_\infty K)$

[1] Уравнения Барнетта приведены в монографиях [3, 4].

и барнеттовские члены здесь несущественны (сравни с (1.9)). Такого же порядка «супербарнеттовские» члены в $p_{ij}^{(3)}$ по отношению к $p_{ij}^{(2)}$ (выражение для напряжений в супербарнеттовском — следующем за барнеттовским — приближении дано в работе [5]).

Далее хорошо известно, что отношение инерционных членов к «вязким» (навье — стоксовским) членам в уравнении импульса порядка $R_\infty \leqslant O(1)$. Проведя аналогичные оценки в уравнении энергии, найдем, что уравнения сохранения в рассматриваемом случае приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=0, \qquad \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}=0 \tag{1.11}$$

$$\frac{5p_\infty}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial q_i}{\partial x_i}=0$$

Здесь p_{ij} даются формулами (1.5)—(1.8), q_i — формулой (1.10). При упрощении уравнения энергии учтена оценка (1.9).

Рассмотрим теперь граничные условия на стенке. Легко видеть, что скорость скольжения, вызываемая температурным градиентом (крип), порядка «основной» скорости. Действительно, эта скорость равна [4]

$$u_\tau|_{n=0}=\beta\frac{\mu}{\rho T}\frac{\partial T}{\partial x_\tau}\bigg|_{n=0}=O(K\sqrt{kT/m})=O(u_\infty/R_\infty)\geqslant O(u_\infty) \tag{1.12}$$

Здесь n, τ — нормаль и касательная к поверхности, $\beta=\mathrm{const}$.

Скорость скольжения, обусловленная поперечным градиентом скорости, и скачок температуры на стенке более высокого порядка малости (в K раз меньше характерного изменения скорости и температуры соответственно).

Таким образом, рассматриваемый класс течений описывается упрощенными уравнениями Барнетта (1.11) при условии крипа (1.12); остальные граничные условия обычные.

Важно отметить, что такими же уравнениями и граничными условиями описываются и течения около неравномерно нагретых тел, находящихся в неподвижном вдали от тела газе, при $K\to 0$ и $T^{-1}\Delta T=O(1)$ (и, конечно, аналогичные внутренние течения). При этом скорость течения порядка скорости температурного скольжения (1.12) и число Рейнольдса, построенное по этой скорости, $R=O(1)$.

В связи со сформулированной задачей возникают два вопроса: достаточно ли поставленных краевых условий для полученной системы уравнений (в общем случае для полных уравнений Барнетта этот вопрос неясен) и с какой точностью решением данной задачи определяется тензор напряжений и поток тепла на стенке? Первый вопрос имеет в данном случае простой положительный ответ. Используя в $\partial p_{ij}^{(2)}/\partial x_j$ уравнение энергии (последнее уравнение (1.11)) для исключения старших производных от T, можно показать, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{ij}^{(2)}}{\partial x_j}=A\Bigg\{T^{2s-2}\bigg[\left(s^2\omega_1+\frac{\omega_3}{3}(2-s)\right)\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_j}+\\+\left(s\omega_1-\frac{\omega_3}{3}\right)T\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\partial x_i}\bigg]-\\-\frac{5}{2}\frac{p_\infty T_\infty^s}{\eta_\infty}\bigg[\frac{2}{3}\omega_1\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T^s\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)-\left(\omega_1+\frac{\omega_3}{s}\right)\frac{\partial T^s}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{1.13}$$

Отсюда следует, что в данном случае барнеттовские члены не увеличивают порядок системы уравнений сохранения.

Второй вопрос возникает в связи с тем, что использованные выше уравнения справедливы с указанной точностью лишь вне пристеночного слоя Кнудсена толщиной $O(\lambda)$. Внутри же слоя Кнудсена ошибки (отличие полученных из решения сформулированной задачи скоростей, температуры и давления от истинных, т. е. полученных из решения уравнения Больцмана) в K раз больше (см. [4], § 5.2). Поэтому необходимо оценить изменения тензора напряжений и вектора потока тепла поперек слоя Кнудсена. Используя справедливые везде общие уравнения сохранения

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \qquad (P_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij})$$

$$\frac{3k}{2m}\rho u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} - P_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

получим следующие оценки (n — нормаль к поверхности):

$$\partial P_{ij} / \partial n = O(K^2), \qquad \partial q_n / \partial n = O(K)$$

Следовательно, в кнудсеновском слое

$$\Delta P_{ij} = O(K^3), \qquad \Delta q_n = O(K^2)$$

в то время как характерные изменения их в потоке соответственно порядка K^2 и K, поэтому изменениями P_{ij} и q_i в слое можно пренебречь.

2. Условия отсутствия движения газа около тела. Пусть $\mathbf{u} \equiv 0$. В общем случае это невозможно по двум причинам: градиент температуры вдоль стенки вызывает движение газа, а наличие барнеттовских напряжений, зависящих от градиентов температур, может нарушить равновесие и при постоянной температуре тела. Следовательно, необходимым условием отсутствия движения является постоянство температуры тела. Рассмотрим подробно влияние барнеттовских сил.

При $\mathbf{u} \equiv 0$ система уравнений (1.11) с учетом (1.13) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k} T^s \frac{\partial T}{\partial x_k} = 0 \tag{2.1}$$

$$-\frac{1}{A}\frac{\partial p}{\partial x_i} = T^{2s-2}\left\{\left[s^2\omega_1 + \frac{\omega_3}{3}(2-s)\right]\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \left(s\omega_1 - \frac{\omega_3}{3}\right)T\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i}\right\} \tag{2.2}$$

Так как

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i} \tag{2.3}$$

то из (2.2) имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \tag{2.4}$$

Запишем предыдущее уравнение в следующих формах:

$$\psi_i\psi_k\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} - \psi_j\psi_k\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} = 0, \qquad \psi_i\psi_k\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} - \psi_j\psi_k\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} = 0 \tag{2.5}$$

Здесь $\psi_i = \partial T / \partial x_i$. Из первого уравнения (2.5) непосредственно следует:

$$\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\psi_k}{\sqrt{\psi_m \psi_m}} \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{2.6}$$

Последнее выражение есть оператор дифференцирования по нормали к изотермической поверхности. Интегрируя (2.6), получим равенство

$$\psi_i = c_{ij} \psi_j \qquad (\partial T / \partial x_i = c_{ij} \partial T / \partial x_j)$$

которое выполняется на нормали к изотерме. Это означает, что нормаль — прямая линия.

Из второго уравнения (2.5) имеем

$$\psi_i \frac{\partial \psi_k \psi_k}{\partial x_j} - \psi_j \frac{\partial \psi_k \psi_k}{\partial x_i} = 0$$

Последнее можно переписать в виде

$$[\nabla T \times \nabla] \, |\nabla T|^2 = 0$$

Отсюда следует, что производная от $|\nabla T|$ вдоль любого направления, лежащего на изотермической поверхности, равна нулю, т. е. что $|\nabla T|$ постоянен на изотермической поверхности. Для дальнейшего запишем уравнение энергии (уравнение Лапласа для T^{1+s}) в криволинейной системе координат, образованной нормалями к поверхности тела и любой ортогональной сеткой на его поверхности. Это возможно потому, что из-за прямолинейности нормалей и однозначности температуры тело должно быть выпуклым. В рассматриваемом случае коэффициенты Ляме таковы:

$$H_1 = 1, \qquad H_2 = 1 + n / R_1, \qquad H_3 = 1 + n / R_2$$

Здесь n — расстояние по нормали к поверхности, R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхности тела в соответствующих плоскостях. Тогда, используя постоянство модуля градиента температуры на изотермических поверхностях и прямолинейность нормалей к ним, запишем уравнение (2.1) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 T^{1+s}}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{R_1 + n} + \frac{1}{R_2 + n} \right) \frac{\partial T^{1+s}}{\partial n} = 0$$

Теперь понятно, что $\partial T / \partial n = |\nabla T|$ может быть постоянен на изотермических поверхностях только в случае, когда $R_1 = \mathrm{const}$, $R_2 = \mathrm{const}$. Эти условия выполняются только для сферы ($R_1 = R_2 = a$), кругового цилиндра и плоскости. Поскольку не существует решения уравнения Лапласа для плоскости и цилиндра при $T_w \neq T_\infty$, то единственным нагретым телом, около которого газ может покоиться, является равномерно нагретая сфера. То, что около сферы газ действительно покоится, ясно, так как ((2.1), (2.2))

$$\frac{\partial p_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} = f(r) \frac{x_i}{r} \tag{2.7}$$

и, следовательно (r — длина радиуса-вектора)

$$\mathbf{u} = 0, \qquad p(r) = -\int_a^r f(r)\, dr \tag{2.8}$$

Из (2.7), (2.8) видно, что барнеттовские напряжения вызывают симметричное перераспределение давления в покоящемся газе.

Таким образом, единственным равномерно нагретым телом, около которого газ может покоиться, является сфера. Заметим, что в рамках уравнений Навье — Стокса с условиями прилипания газ может покоиться около любого произвольно нагретого тела.

3. Течения около неравномерно нагретых тел. Решению задачи о движении газа около неравномерно нагретых тел, вызванном температурным скольжением, посвящено много работ [6], причем всюду используются уравнения Навье — Стокса и в большинстве случаев предположение о малости градиентов температуры. Естественно рассмотреть вопрос о правомерности такой постановки. Итак, пусть

$$\nabla T_w = O(\varepsilon) \ll 1, \qquad M_\infty = O(\varepsilon K) \ll \varepsilon \ll 1 \tag{3.1}$$

Тогда система уравнений (1.11) существенно упрощается

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij} + p_{ij}) = 0, \qquad \nabla^2 T = 0 \tag{3.2}$$

$$p_{ij} = -\mu_\infty \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + B\omega_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.3}$$

Далее в силу уравнения энергии

$$\frac{\partial p_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} = B\omega_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = B\omega_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 T = 0$$

т. е. барнеттовские члены из уравнения импульса выпадают. Однако они остаются в выражениях для напряжений, действующих на тело.

В силу линейности задачи можно отдельно решать задачу с граничным условием прилипания при $u_\infty \neq 0$ и задачу с крипом (1.12) при $u_\infty = 0$ и суммировать результаты.

Рассмотрим в качестве примера вторую задачу ($u_\infty = 0$) для сферы, температура поверхности которой

$$T_w = T_\infty (1 + \varepsilon \cos \theta)$$

Такая задача решается стандартными для медленных течений приемами [7], поэтому приведем лишь окончательные результаты

$$u_r = C \frac{a}{r} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos\theta, \qquad u_\theta = -C \frac{a}{2r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta \tag{3.4}$$

$$\Delta p = C\mu_\infty a r^{-2} \cos\theta, \qquad C = \varepsilon\beta\mu_\infty / \rho_\infty a$$

$$P_{rr} = p - 4Ca^{-1}\mu_\infty \cos\theta + p_{rr}^{(2)}, \qquad P_{r\theta} = -3Ca^{-1}\mu_\infty \sin\theta + p_{r\theta}^{(2)} \tag{3.5}$$

$$p_{rr}^{(2)} = 2D\cos\theta, \qquad p_{r\theta}^{(2)} = D\sin\theta, \qquad D = 9\varepsilon\mu_\infty^2/\rho_\infty a^2$$

$$\mathbf{F} = -4\pi\varepsilon\beta\mu_\infty^2/\rho_\infty, \qquad \int_S p_{ij}^{(2)}\, dS = 0 \tag{3.6}$$

Здесь a — радиус сферы, β — коэффициент в граничном условии (1.12), величины P_{ij} и барнеттовские напряжения $p_{ij}^{(2)}$ взяты на стенке, $\mathbf{F}$ — суммарная сила, действующая на сферу.

Сила F обусловлена только навье — стоксовскими напряжениями, эта сила много больше[1] «стоксовской» силы F_S, реализующейся при $R_\infty \to 0$

$$F / F_S = 4\pi\varepsilon\beta\mu_\infty^2 / \rho_\infty 6\pi\mu_\infty u_\infty a \approx \varepsilon / R_\infty \gg 1$$

Интеграл от $p'^{(2)}_{ij}$ по сфере равен нулю (3.6), т. е. в рассмотренном случае барнеттовские члены не оказывают влияния на суммарную силу. Докажем теперь, что в данной линейной постановке барнеттовские напряжения не дают вклада в суммарные силу и момент для течений произвольной геометрии с достаточно гладкими границами и граничными условиями.

Сила, вызванная барнеттовскими напряжениями, действующая на тело в направлении орта e_α, равна

$$F_\alpha^{(2)} = \int\limits_S p_{k\alpha}^{(2)} (\mathbf{n}e_k)\, dS = \omega_1 B \int\limits_S \frac{\partial^2 T}{\partial x_k\, \partial x_\alpha} (\mathbf{n}e_k)\, dS =$$
$$= \omega_1 B \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} dS = \omega_1 B \left[\int\limits_V \nabla^2 \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} dV - \int\limits_\Sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} d\Sigma \right]$$

Здесь $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ограничивающим объем V поверхностям, Σ — сфера с радиусом $l \to \infty$. Так как T удовлетворяет уравнению Лапласа, то интеграл по V равен нулю; при $l \to \infty$ имеем $T \approx \mathrm{const} / l$ и

$$\int\limits_\Sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} d\Sigma \to 0$$

Следовательно, $F_\alpha^{(2)} = 0$ и в силу произвольности e_α

$$\mathbf{F}^{(2)} = 0 \tag{3.7}$$

Аналогично проводится доказательство и для момента сил $\mathbf{m}^{(2)}$. Для i-й компоненты момента имеем

$$m_i^{(2)} = \int\limits_S \left[x_j p_{km}^{(2)} (\mathbf{n}e_m) - x_k p_{jm}^{(2)} (\mathbf{n}e_m) \right] dS =$$
$$= \omega_1 B \int\limits_S (\mathbf{n}e_m) \left[\frac{\partial}{\partial x_m} \left(x_j \frac{\partial T}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \left(\delta_{jm} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \delta_{km} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right] dS =$$
$$= \omega_1 B \left\{ \int\limits_V \nabla^2 \left(x_j \frac{\partial T}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dV - \int\limits_\Sigma \frac{\partial}{\partial n} \left(x_j \frac{\partial T}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) d\Sigma - \right. \tag{3.8}$$
$$\left. - \int\limits_S \left[(\mathbf{n}e_j) \frac{\partial T}{\partial x_k} - (\mathbf{n}e_k) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] dS \right\}$$

Подынтегральное выражение в первом интеграле

$$\nabla^2 \left(x_j \frac{\partial T}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = x_j \nabla^2 \frac{\partial T}{\partial x_k} - x_k \nabla^2 \frac{\partial T}{\partial x_j} = 0$$

При $l \to \infty$ выражение в скобках во втором интеграле пропорционально l^{-2}, и он обращается в нуль.

---

[1] Здесь параметр ε фиксирован и не связан с $R_\infty \to 0$; характерное для течения около неравномерно нагретого тела при $u_\infty = 0$ число Рейнольдса вычисляется по параметрам газа на стенке, оно порядка ε.

Используя теорему Остроградского, можно показать, что последний интеграл формулы (3.8) равен

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_k\, \partial x_j}\right) dV - \int\limits_\Sigma \left[(\mathbf{ne}_j)\frac{\partial T}{\partial x_k} - (\mathbf{ne}_k)\frac{\partial T}{\partial x_j}\right] d\Sigma = 0$$

При этом учтено, что подынтегральное выражение интеграла по Σ пропорционально l^{-3}.

Суммируя полученные результаты, найдем

$$\mathbf{m}^{(2)} = 0 \tag{3.9}$$

Итак, в данной линейной постановке барнеттовские напряжения $p_{ij}^{(2)}$ на поверхности произвольного тела отличны от нуля и порядка навье — стоксовских. Однако суммарные сила $\mathbf{F}^{(2)}$ и момент $\mathbf{m}^{(2)}$ из-за $p_{ij}^{(2)}$ равны нулю. Такие же результаты справедливы и для вызванных крипом течений газа в замкнутых областях.

Таким образом, описанная в начале этого пункта постановка задачи справедлива для расчета $\mathbf{F}$, $\mathbf{m}$ и несправедлива для расчета местных напряжений на теле. Если же градиенты температуры не малы, то барнеттовские члены будут давать вклад и в суммарные характеристики. При этом барнеттовские члены необходимо учитывать не только в выражениях для напряжений на стенке, но и в уравнениях движения.

4. Обтекание равномерно нагретых тел при $R_\infty \ll 1$. Рассмотрим задачу в приближении Стокса (т. е. при $R_\infty \to 0$) для равномерно нагретых тел. В этом случае конвективными членами в уравнениях движения (1.11) можно, как обычно, пренебречь и на стенке удовлетворять условиям прилипания. Получающаяся система уравнений все же сложна, поэтому линеаризуем задачу, положив

$$T_w = T_\infty (1 + \varepsilon), \qquad \varepsilon \ll 1$$

и в качестве примера рассмотрим обтекание сферы. Важно заметить, что параметр ε (т. е. $T^{-1}\Delta T$) фиксирован и не связан с $R_\infty \to 0$, число $M_\infty \approx KR_\infty \to 0$.

Далее будем предполагать, что p отнесено к $\mu_\infty u_\infty / a$, r — к радиусу сферы a, остальные параметры газа — к их «невозмущенным» значениям.

Из уравнения энергии (1.11) в данном случае видно, что температуру можно искать в виде $T = T_0 + T_1$, где T_0 определяется при $\mathbf{u} = 0$

$$T_0 = 1 + \varepsilon / r, \qquad T_1 = O(R_\infty)$$

В уравнениях движения при определении ρ, μ необходимо учитывать только их значения, зависящие от T_0

$$\rho_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{r}, \qquad \mu_0 = 1 + \omega\frac{\varepsilon}{r}, \qquad \omega = \frac{T_0}{\mu_0}\frac{d\mu_0}{dT_0} \tag{4.1}$$

Уравнение неразрывности с погрешностью $\sim \varepsilon^2$ приобретает вид

$$\nabla \mathbf{u} = -\varepsilon u_r / r^2 \tag{4.2}$$

Уравнение импульса запишем в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(p_0 + p_1) = \frac{\partial p_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + \sigma_i(T_0) + \delta_i + \sigma_i(T_1) + \varphi_i \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{\delta} = C_1 \nabla (T^s \nabla \mathbf{u}), \qquad \boldsymbol{\varphi} = C_2 T^s \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \ln T$$

Здесь под σ_i понимается группа членов, входящая в первую квадратную скобку в формуле (1.13), p_0 — сферически симметричное давление, определяемое из уравнения (см. (2.7), (2.8))

$$\nabla p_0 = -\sigma(T_0)$$

Далее, p_1 — давление, зависящее от других членов уравнения (4.3), C_k легко получить из (1.13). Оценим члены уравнения (4.3)

$$\frac{\partial \overset{(1)}{p}_{ij}}{\partial x_j} = O(1), \quad \sigma_i(T_0) = O\left(\frac{\varepsilon^2}{R_\infty}\right), \quad \delta_i = O(\varepsilon), \; \sigma_i(T_1) = O(\varepsilon^2), \; \varphi_i = O(\varepsilon^2) \quad (4.4)$$

Таким образом, наибольший вклад в p дают барнеттовские члены $\sigma_i(T_0)$. Однако связанное с $\sigma_i(T_0)$ поле давлений является сферически симметричным и не вызывает движения. Поэтому в задаче об определении поля скоростей около сферы и силы, действующей на нее, эти члены учитывать не нужно. Ниже ограничиваемся рассмотрением именно этой задачи.

В рамках данной постановки пренебрежем в уравнении (4.3) последними двумя членами порядка ε^2. После этого будем иметь

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial \overset{(1)}{p}_{ij}}{\partial x_j}, \qquad \Pi = p_1 + C_1 \frac{\varepsilon}{r} u_r^0 \quad (4.5)$$

Здесь u_r^0 дается нулевым (стоксовским) приближением. Найдя Π, сразу получим p_1. Однако на стенке $u_r^0 = 0, \Pi = p_1$. Поэтому в данной задаче член с C_1 можно не рассматривать. Если $M_\infty \leqslant K^2$, то, вообще говоря, при нахождении T_0 необходимо учитывать температурный скачок на стенке. Однако его можно не учитывать, так как соответствующая поправка войдет лишь в сферически симметричную часть давления и не окажет влияния на суммарную силу.

Таким образом, при определении силы, действующей на слабо нагретую сферу в стоксовском ($R_\infty \to 0$) потоке, и поля скоростей около нее кинетическими эффектами с погрешностью $\sim \varepsilon^2$ можно пренебречь, и задача сводится к решению уравнения Навье — Стокса (4.5) при $\Pi = p_1$ и уравнения неразрывности (4.2), причем μ дается формулой (4.1), в правой части (4.2) $u_r = u_r^0$. Опуская громоздкие выкладки, приведем лишь окончательный результат

$$F = 6\pi\mu_\infty u_\infty a[1 + {}^1/_{24}\varepsilon(3 + 10\omega)] \quad (4.6)$$

Второй член в скобках представляет собой поправку первого порядка к стоксовской силе, обусловленную нагревом сферы. Отметим, что задача об обтекании равномерно нагретой сферы при $R_\infty \ll 1$, $\varepsilon \lesssim 1$ решалась в работе [1] при помощи уравнения Навье — Стокса. Однако, как показано выше, при $\varepsilon \sim 1$ необходимо учитывать барнеттовские члены в уравнениях движения. Результаты [1] справедливы только при $\varepsilon \ll 1$. Кроме того, в работе [1] предполагалось, что $\mu \sim T$ ($\omega = 1$). Для этого случая найдено выражение для F, совпадающее с выражением (4.6) при $\omega = 1$.

Поступило 15 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Kassoy D. R., Adamson T. C., Messiter A. F. Compressible low Reynolds number flow around a sphere. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 4, pp. 671—681.
2. Hodnett P. E. Low Reynolds number flow of a variable property gas past a heated circular cylinder. J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, pt. 3, p. 465.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
5. Ikenberry E., Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwell's kinetic theory. J. Rational Mech. and Analysis, 1956, vol. 5, No. 1, pp. 1—54.
6. Kennard E. H. Kinetic theory of gases. N. Y., Mc Graw Hill Book Co., 1938.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.