

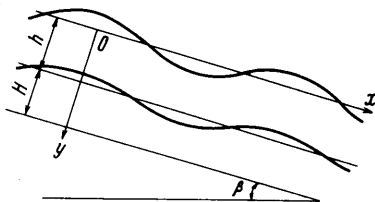
## УСТОЙЧИВОСТЬ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Ю. П. ЛАДИКОВ

(Киев)

Исследуется устойчивость течения тяжелой несжимаемой жидкой пленки, стекающей по наклонной плоскости, которая одновременно является фронтом кристаллизации. Предполагается, что в невозмущенном состоянии в направлении нормали к плоскости существует постоянный градиент температуры. Линеаризованные уравнения возмущенного течения исследуются в случае длинных волн и в случае малых чисел Рейнольдса.

**1. Постановка задачи.** Тяжелая несжимаемая жидкая пленка толщиной  $h$  стекает по наклонной плоскости с углом наклона  $\beta$ . Плоскость  $Y = h$  (фиг. 1) является границей фазового перехода. Область  $0 \leq Y \leq h$  занята жидкой фазой, область  $h \leq Y < \infty$  — твердой фазой. В невозмущенном состоянии все характерные величины задачи могут зависеть только от координаты  $Y$ . Уравнения невозмущенного течения жидкой пленки следующие:



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \rho g \sin \beta + \mu d^2 V / dY^2 &= 0 \\ dP / dY &= \rho g \cos \beta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\mu$  — динамическая вязкость,  $\nu = \mu / \rho$ .

Скорость течения  $V$  удовлетворяет граничным условиям

$$dV / dY = 0 \quad \text{при } Y = 0, \quad V = 0 \quad \text{при } Y = h$$

Интегрируя, найдем

$$V = g \sin \beta (h^2 - Y^2) (2\nu)^{-1}, \quad \text{или} \quad U(y) = 3/2 (1 - y^2) \quad (1.2)$$

$$U = V / V_c, \quad y = Y / h, \quad V_c = gh^2 (3\nu)^{-1} \sin \beta \quad (1.3)$$

Здесь  $V_c$  — средняя скорость течения. Предположим также, что в жидкости в невозмущенном состоянии имеется постоянный градиент температуры

$$dT / dY = -(T_0 - T_n) / h \quad (1.4)$$

где  $T_0$  — температура на поверхности  $Y = 0$ , в дальнейшем она предполагается постоянной, и  $T_n$  — температура плавления. Поскольку в невозмущенном состоянии предполагается, что граница фазового перехода остается неподвижной, при  $Y = h$  должно выполняться граничное условие

$$\kappa_1 dT_1 / dY - \kappa_2 dT / dY = 0 \quad (1.5)$$

где  $\kappa$  и  $\kappa_1$  — коэффициенты теплопроводности жидкой и твердой фазы. Благодаря граничному условию (1.5) в твердой фазе в невозмущенном состоянии предполагается также наличие постоянного градиента температуры.

Будем предполагать, что все характеристики течения испытывают малые возмущения вида

$$Q = Q^0 + q(y) e^{ik(x-ct)}$$

При этом считаем

$$t = \tau h / V_c, \quad X = xh, \quad Q^0 = Q^0(y)$$

Тогда, записывая линеаризованные уравнения возмущенного двухмерного течения жидкости и теплопроводности в жидкой и твердой фазе и переходя к безразмерным переменным, получаем для исследования, подобно тому как это было получено в [1], следующую систему уравнений:

а) для жидкой фазы

$$\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi = ikR[(U-c)(\varphi'' - k^2\varphi) - U''\varphi] \quad (1.6)$$

$$\Theta'' - k^2\Theta = ikPR[(U-c)\Theta + \varphi]$$

б) для твердой фазы

$$W'' - k^2W = -ikP^*RcW \quad (1.7)$$

Здесь  $\varphi(y)$  — комплексная амплитуда безразмерной функции тока

$$\psi(x, y, \tau) = \varphi(y) e^{ik(x-ct)}$$

$\Theta(y)$ ,  $W(y)$  — комплексные амплитуды возмущения безразмерной температуры в жидкой и твердой фазе,  $R$  — число Рейнольдса,  $P$ ,  $P^*$  — число Прандтля, вычисленное для жидкой и твердой фаз,  $F$  — число Фруда

$$R = \frac{V_c h}{\nu}, \quad P = \frac{\mu c_v}{\kappa}, \quad P^* = \frac{\mu c_{v_1}}{\kappa_1}$$

$$F = \frac{V_c}{\sqrt{gh}}, \quad 3F^2 = R \sin \beta$$

Возмущенные величины должны удовлетворять следующим граничным условиям:

а) на свободной поверхности при  $y = \xi e^{ik(x-ct)}$

1) равенству нулю возмущения нормального напряжения

$$\varphi'''(0) + ikR[F^{-2}\xi \cos \beta + \sigma\varphi'(0)] + ik^2S\xi - 3k^2\varphi'(0) = 0 \quad (1.8)$$

$$S = T_* / \mu V_c$$

2) равенству нулю возмущения касательного напряжения

$$\varphi''(0) + k^2\varphi(0) - 3\xi = 0 \quad (1.9)$$

3) кинематическому условию

$$\xi\sigma = \varphi(0), \quad \sigma = c - 3/2 \quad (1.10)$$

4) равенству нулю возмущения температуры

$$\Theta(0) - \xi = 0 \quad (1.11)$$

б) на поверхности фазового перехода при  $y = 1 + \eta e^{ik(x-ct)}$

1) условию непрерывности потока массы [2, 3]

$$\rho(\mathbf{D} - \mathbf{v}) = \rho_1 \mathbf{D}, \quad \text{или} \quad \varphi(1) = r\epsilon\eta, \quad r = (\rho - \rho_1) / \rho \quad (1.12)$$

2) равенству нулю касательной компоненты скорости

$$v_x + U'(1)\eta = 0. \quad \text{или} \quad \varphi'(1) = 3\eta \quad (1.13)$$

3) равенству нулю возмущений температуры жидкой и твердой фазы

$$\Theta(1) - \eta = 0, \quad W(1) - \kappa\kappa_1^{-1}\eta = 0 \quad (1.14)$$

4) условию непрерывности потока тепла

$$\kappa_1\kappa^{-1}W'(1) - \Theta'(1) = -ikcR_\lambda\eta \quad (1.15)$$

$$R_\lambda = \rho\lambda V_c h [\kappa(T_0 - T_\Pi)]^{-1} = PR\lambda [c_V(T_0 - T_\Pi)]^{-1}$$

в) равенству нулю возмущения температуры при  $y = \infty$

$$W(\infty) = 0 \quad (1.16)$$

Здесь  $T_*$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\lambda$  — удельная теплота плавления,  $C_V$  — теплоемкость жидкости при постоянном объеме,  $\rho$  — плотность жидкой фазы,  $\rho_1$  — плотность твердой фазы,  $\xi$  — амплитуда смещения свободной поверхности,  $\eta$  — амплитуда смещения границы раздела фаз. Предполагаем, что уравнение свободной поверхности

$$y = \xi e^{ik(x-ct)} \quad (1.17)$$

уравнение границы поверхности фазового перехода

$$y = 1 + \eta e^{ik(x-ct)} \quad (1.18)$$

В граничном условии непрерывности потока энергии (1.15) приток тепла за счет вязкости ввиду его малости не учитывался [3]. Вывод граничных условий здесь опущен. Он проведен обычным методом подобно [1].

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (1.6), (1.7) с граничными условиями (1.8), (1.16).

**2. Решение для длинных волн.** Известно [1], что течение жидкой пленки неустойчиво на длинных волнах при больших углах наклона  $\beta$ . Условие устойчивости имеет вид

$$R < 5/6 \operatorname{ctg} \beta \quad (2.1)$$

Таким образом, неустойчивость возникает даже при очень малых числах Рейнольдса. Поэтому для длинных волн по сравнению с толщиной пленки можно считать, что  $kR \ll 1$ . Это позволяет решать систему уравнений и граничных условий (1.6), (1.17) с помощью разложений всех характерных параметров задачи по малому  $k$ . Будем полагать

$$\varphi(y) = \varphi_0(y) + k\varphi_1(y) + \dots, \quad \Theta(y) = \Theta_0(y) + k\Theta_1(y) + \dots$$

$$W(y) = W_0(y) + kW_1(y) + \dots, \quad c = c_0 + kc_1 + \dots$$

$$\xi = \xi_0 + k\xi_1 + \dots, \quad \eta = \eta_0 + k\eta_1 + \dots$$

Система уравнений нулевого приближения примет вид

$$\varphi_0^{IV}(y) = 0, \quad \Theta_0''(y) = 0, \quad W_0''(y) = 0 \quad (2.2)$$

Решения должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} \varphi_0'''(0) &= 0, & \varphi_0''(0) &= 3\xi_0, & \varphi_0(0) &= \sigma_0\xi_0, & \Theta_0(0) &= \xi_0 \\ \varphi_0(1) &= r c_0 \eta_0, & \varphi_0'(1) &= 3\eta_0, & \Theta_0(1) &= \eta_0, & W_0(1) &= \kappa \eta_0 / \kappa_1 \\ \kappa_1 \kappa^{-1} W_0'(1) - \Theta_0'(1) &= -i k c_0 R \lambda \eta_0, & W_0(l) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Вместо условия (1.16)  $W_0(\infty) = 0$  поставлено условие  $W_0(l) = 0$ , где  $l = \delta + 1$ ,  $\delta$  — некоторое конечное число, соответствующее относительной глубине, на которой затухают температурные возмущения. Величину  $\delta$  можно определить, исходя из точного решения уравнения теплопроводности для твердой фазы. Считая, что характерным размером по координате  $Y$  в твердой фазе является  $H = h\delta$ , по координате  $X$  — длина волны  $\Lambda$ , характерное время  $h / V_c$ , уравнение теплопроводности в безразмерной форме может быть записано в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\kappa_1}{\rho c_{v1} V_c H} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{H^2}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (2.4)$$

Глубину затухания температурных волн можно определить, подобно тому как определяется в электродинамике глубина скинслоя.

Будем иметь

$$H = \left( \frac{2\kappa_1 h}{\rho c_{v1} V_c} \right)^{1/2} = h \left( \frac{2\kappa_1 v}{\mu c_{v1} V_c h} \right)^{1/2} = h \left( \frac{2}{RP^*} \right)^{1/2}, \quad \delta = \left( \frac{2}{P^*R} \right)^{1/2}$$

При  $P^*R \geq 1$  относительная глубина распространения тепловых возмущений  $\delta \lesssim 1$ . Для длинных волн  $H / \Lambda \ll 1$  и решение уравнения (2.4) записывается в виде

$$W(y) = A e^{-y/\delta} e^{i(\tau - y/\delta)}, \quad A = \text{const} \quad (2.5)$$

Замена уравнения (2.4) уравнением  $W_0''(y) = 0$  равносильна аппроксимации экспоненты (2.5) линейной функцией. Для того чтобы аппроксимация была достаточно хорошей, необходимо, чтобы величина  $l$  в граничном условии  $W(l) = 0$  определялась как  $l = 1 + \delta$ , где  $\delta$  — глубина теплового скинслоя.

Далее предполагается, что

$$kR \ll 1, \quad kPR \ll 1, \quad kP^*R \ll 1$$

Однако произведение  $kR_\lambda = kRP\lambda(T_0 - T_\pi)^{-1} c_v^{-1}$  может быть величиной порядка 1.

Действительно, в равновесном состоянии разность температур  $T_0 - T_\pi$  не может быть очень большой. Для кристаллических тел отношение  $\lambda / c_v$  очень велико. Кроме того, чисто гидродинамический случай соответствует  $\lambda = \infty$ . Для того чтобы иметь возможность сравнивать решение с известными результатами, сохраним в нулевом приближении в граничном условии непрерывности потока энергии член  $kR_\lambda$ . Решения уравнений (2.2) будем искать в форме

$$\varphi_0(y) = a_0 y^3 + b_0 y^2 + g_0 y + f_0, \quad \Theta_0(y) = m_0 y + n_0, \quad W_0(y) = M_0 y + N_0$$

Из граничных условий (2.3) следует:

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{3f_0}{2\sigma_0}, \quad \eta_0 = \frac{f_0\delta}{\sigma_0(1+\delta)}, \quad \xi_0 = \frac{f_0}{\sigma_0}, \quad m_0 = -\frac{f_0}{\sigma_0 l} \\ n_0 = \frac{f_0}{\sigma_0}, \quad M_0 = -\frac{\kappa f_0}{\kappa_1 \sigma_0 l}, \quad N_0 = -\frac{f_0 \kappa}{\sigma_0 \kappa_1}, \quad \sigma_0 = l_0 - 3/2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для определения собственного значения  $c_0$  получим уравнение

$$ikc_0^2 R_\lambda - c_0(3ikR_\lambda + 1 - r + \delta^{-1}) + 3\delta^{-1} = 0 \quad (2.7)$$

Рассмотрим случаи  $kR_\lambda \ll 1$  и  $kR_\lambda \gg 1$ . В первом случае будем иметь только одно собственное значение

$$c_0 = \frac{3}{1 + \delta(1 - r)} \quad (2.8)$$

Во втором случае имеем два собственных значения, являющихся решением уравнения (2.7). Уравнение (2.7) можно переписать следующим образом:

$$c_0^2 - c_0 \left[ 3 - i \frac{1 + \delta(1 - r)}{k\delta R_\lambda} \right] - \frac{3i}{kR_\lambda \delta} = 0$$

При  $kR_\lambda \rightarrow \infty$  одно из собственных значений стремится к нулю, а другое — к трем. Последнее соответствует чисто гидродинамическому случаю, рассмотренному в [1] без учета тепловых процессов. Обозначим

$$A_1 = \frac{1 + \delta(1 - r)}{\delta k R_\lambda}, \quad A_2 = \frac{3}{\delta k R_\lambda}, \quad c_0 = c_{r0} + ic_{i0} \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) можно представить как систему двух квадратных уравнений относительно  $c_{r0}$  и  $c_{i0}$ , которые приведены к одному уравнению четвертого порядка относительно  $c_{i0}$

$$4c_{i0}^4 + 8A_1 c_{i0}^3 + (5A_1 + 9)c_{i0}^2 + A_1(9 + A_1^2)c_{i0} + A_2(3A_1 - A_2) = 0 \quad (2.10)$$

Поскольку

$$3A_1 - A_2 = 3(1 - r)(kR_\lambda)^{-1} > 0, \quad r = (\rho - \rho_1) / \rho < 1$$

уравнение (2.10) не может иметь положительных решений. Следовательно,  $c_{i0} = \text{Im } c_0 < 0$  и рассматриваемый процесс всегда устойчивый в нулевом приближении. Таким образом, для кристаллических тел с большой удельной теплотой плавления течение жидкой пленки будет всегда устойчивым относительно малых возмущений с большой длиной волны. Вернемся к случаю, когда переход из твердого состояния в жидкое не требует больших затрат тепла  $kR_\lambda \ll 1$ . При этом собственное значение  $c_0$  в соответствии с (2.7) является действительным числом. Для того чтобы выяснить, будут ли возмущения нарастать или затухать, рассмотрим следующее приближение. Собственные функции для нулевого приближения определяются с точностью до произвольного постоянного множителя  $f_0$ . Для того чтобы собственные функции получили простой вид, положим  $f_0 = \sigma_0$ . Получим

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \frac{3}{2}(y^2 - 1) - \frac{3y}{l} + \frac{3}{1 + \delta(1 - r)}, \quad \xi_0 = 1, \quad \eta_0 = \frac{\delta}{l} \\ \theta_0 = 1 - \frac{y}{l}, \quad W_0 = \frac{\kappa}{\kappa_1} \left( 1 - \frac{y}{l} \right), \quad l = 1 + \delta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Система уравнений и граничных условий для первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1^{IV}(y) &= iR[(U - c_0)\varphi_0'' - U''\varphi_0] = -9iRy/l \\ \Theta_1''(y) &= iPR[(U - c_0)\Theta_0 + \varphi_0] = iPR(2l)^{-1}[3y^3 - (9 - 2c_0)y] \quad (2.12) \\ W_1''(y) &= -iP^*Rc_0W_0 = -i\kappa\kappa_1^{-1}PRc_0(1 - y/l) \\ \varphi_1'''(0) + iR[F^{-2}\xi_0 \cos \beta + \sigma_0\varphi_0'(0)] &= 0, \quad \text{или} \\ \varphi_1'''(0) &= -3i(\text{ctg } \beta - R\sigma_0/l) \\ \varphi_1''(0) &= 3\xi_1, \quad \xi_1\sigma_0 + c_1 = \varphi_1(0), \quad \Theta_1(0) = \xi_1 \\ \varphi_1(1) &= rc_0\eta_1 + rc_1\eta_0, \quad \varphi_1'(1) = 3\eta_1, \quad \Theta_1(1) = \eta_1 \\ W_1(1) &= \kappa\eta_1/\kappa_1, \quad \kappa\kappa_1^{-1}W_1'(1) - \Theta_1'(1) = -ikc_0R\lambda\eta_0, \quad W_1(l) = 0 \end{aligned}$$

Решение будем представлять в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= -iR \frac{3y^5}{40l} + a_1y^3 + b_1y^2 + g_1y + f_1 \quad (2.13) \\ \Theta_1(y) &= \frac{iRP}{2l} \left[ \frac{3}{20}y^5 - (9 - 2c_0)\frac{y^3}{6} \right] + m_1y + n_1 \\ W_1(y) &= -i \frac{\kappa}{6\kappa_1l} RP^*c_0(l - y)^3 + M_1(l - y) \end{aligned}$$

Постоянную  $f_1$  можно принять равной нулю, так как отличное от нуля значение постоянной  $f_1$  приведет только к уточнению коэффициента при собственной функции  $\varphi_0$ , которая определяется с точностью до произвольного множителя  $f_0$  [1].

Исключая с помощью граничных условий коэффициенты  $a_1, b_1, g_1, m_1, n_1, M_1$ , получаем значение  $c_1$

$$\begin{aligned} c_1 &= - \frac{i\delta}{[1 + \delta(1 - r)]^2} \left\{ {}^{6/5}R[\delta(1 - 2r) - 1] + l[1 + \delta(1 - r)] \text{ctg } \beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\delta(1 - r)}{1 + \delta(1 - r)} [\delta^2RP^* + RP[1 + 6\delta(1 - r)]]/5 + 3\delta R\lambda \right\} \quad (2.14) \end{aligned}$$

Течение жидкой пленки будет устойчивым, если выражение в фигурных скобках правой части (2.14) будет положительным.

Для большинства материалов  $r = (\rho - \rho_1) / \rho < 0$  и течение при небольших ограничениях на параметры  $P, R, R_\lambda$  будет устойчивым даже при  $\beta = 1/2\pi$ , т. е. на вертикальной стенке. Следует заметить, что выводы об устойчивости, полученные здесь, справедливы только при условии, что число Рейнольдса  $R$  и произведение  $P^*R$  не является очень малым, так как при  $P^*R \ll 1, \delta \gg 1$  отношение  $H / \Lambda$  не является малым, и, следовательно, нельзя считать  $k$  малым параметром. Случай малых значений  $R, P^*R$  нужно рассматривать отдельно.

**3. Исследование устойчивости при малых числах Рейнольдса.** Будем считать теперь длину волны возмущений произвольной, а число Рейнольдса малым  $R \ll 1$ .

Относительно остальных параметров примем следующие предположения:

$$PR \ll 1, \quad P^*R \ll 1, \quad R_\lambda = PR\lambda[c_v(T_0 - T_\pi)]^{-1} \approx 1$$

т. е. опять будем считать, что  $\lambda c_v^{-1}(T_0 - T_{II})^{-1} \gg 1$ , чтобы иметь затем возможность сравнивать полученный результат с [1]. Решения будем искать теперь в виде рядов по малому параметру  $R$ . Для нулевого приближения получим следующую систему уравнений:

$$\varphi_0^{IV} - 2k^2\varphi_0'' + k^4\varphi_0 = 0, \quad \Theta_0'' - k^2\Theta_0 = 0, \quad W_0'' - k^2W_0 = 0 \quad (3.1)$$

Граничные условия для нулевого приближения

$$\begin{aligned} \varphi_0'''(0) + ik(3ctg \beta + k^2S)\xi_0 - 3k^2\varphi_0'(0) &= 0, & \Theta_0(0) &= \xi_0 \\ \varphi_0''(0) + k^2\varphi_0(0) &= 3\xi_0, & \Theta_0(1) &= \eta_0, & \varphi_0'(1) &= 3\eta_0, \\ \xi_0\sigma_0 &= \varphi_0(0), & \varphi_0(1) &= rc_0\eta_0, & W_0(1) &= \kappa\eta_0/\kappa_1 \\ \kappa_1\kappa^{-1}W_0'(1) - \Theta_0'(1) &= -ikc_0R_\lambda\eta_0, & W_0(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение системы уравнений (3.1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(y) &= a_0e^{ky} + b_0e^{-ky} + g_0ye^{ky} + f_0ye^{-ky} \\ \Theta_0(y) &= m_0e^{ky} + n_0e^{-ky}, & W_0(y) &= M_0e^{ky} + N_0e^{-ky} \end{aligned}$$

Из граничных условий имеем

$$\sigma_0\xi_0 = \varphi_0(0)$$

Поскольку собственные функции определяются с точностью до произвольного множителя, положим для простоты  $\xi_0 = 1$ ,  $\varphi_0(0) = \sigma_0$ . Используя граничные условия для  $W_0$ , получаем

$$W_0 = \kappa\kappa_1^{-1}\eta_0e^{k(1-y)}, \quad W_0'(1) = -\kappa k\eta_0/\kappa_1$$

Для коэффициентов  $m_0$ ,  $n_0$  имеем систему уравнений

$$m_0 + n_0 = 1, \quad m_0e^k + n_0e^{-k} = \eta_0$$

Разрешая ее, найдем

$$m_0 = (\eta_0 - e^{-k}) / 2\text{sh } k, \quad n_0 = (e^k - \eta_0) / 2\text{sh } k$$

Отсюда

$$\Theta_0 = (\text{sh } k)^{-1}[\eta_0 \text{sh } ky + \text{sh } k(1 - y)], \quad \Theta_0'(1) = k(\text{sh } k)^{-1}(\eta_0 \text{ch } k - 1)$$

Подставляя найденные значения  $\Theta_0'(1)$ ,  $W_0'(1)$  в уравнение теплового баланса, найдем величину смещения фронта кристаллизации

$$\eta_0 = [\text{sh } k(1 + \text{cth } k - ic_0R_\lambda)]^{-1} \quad (3.3)$$

Для определения коэффициентов  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $g_0$ ,  $f_0$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_0 - b_0 &= i(2k)^{-1}(3ctg \beta + k^2S), & a_0 + b_0 &= c_0 - 3/2 \\ a_0e^k + b_0e^{-k} + g_0e^k + f_0e^{-k} &= rc_0\eta_0 \\ 2k^2(a_0 + b_0) + 2k(g_0 - f_0) &= 3 \\ k(a_0e^k - b_0e^{-k}) + (1 + k)e^kg_0 + (1 - k)e^{-k}f_0 &= 3\eta_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Исключая из системы уравнений  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $g_0$ ,  $f_0$ , получаем для определения собственного значения  $c_0$  уравнение

$$\begin{aligned} 3/2(1 + k^2 + \text{ch}^2 k) - i(2k)^{-2}(3ctg \beta + k^2S)(\text{sh } 2k - 2k) - \\ - c_0(k^2 + \text{ch}^2 k) = [3\text{ch } k - rc_0(\text{ch } k + k \text{sh } k)][\text{sh } k(1 + \text{cth } k - iR_\lambda C_0)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

При  $R_\lambda = \infty$  поверхность фронта кристаллизации не возмущается, правая часть уравнения (3.5) обращается в нуль и для определения  $c_0$  получим устойчивое решение, рассмотренное в [1]

$$c_0 = {}^{3/2}(1 + k^2 + \text{ch}^2 k)(k^2 + \text{ch}^2 k)^{-1} - i(2k)^{-2}(3\text{ctg } \beta + k^2 s)(\text{sh } 2k - 2k) \quad (3.6)$$

Если  $k \ll 1$  для  $c_0$ , получаем уравнение (2.7), рассмотренное ранее в п. 2 при  $\delta = \infty$

$$ikR_\lambda C_0^2 - (1 - r + 3ikR_\lambda)c_0 = 0 \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) имеет один нулевой и один устойчивый корень. Для очень коротких волн  $k \gg 1$  имеем также устойчивое решение

$$c_0 = {}^{3/2} - {}^{1/2}iS \quad (3.8)$$

Основную стабилизирующую роль здесь играют силы поверхностного натяжения.

В общем случае уравнение (3.5) может быть переписано в виде

$$iAc_0^2 - (B_1 + iB_2)c_0 - C_1 - iC_2 = 0 \quad (3.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \gamma_0 R_\lambda \text{sh } k, & B_1 &= \gamma_0 \gamma_4 + \gamma_1 R_\lambda \text{sh } k - r\gamma_3, & B_2 &= {}^{3/2}\gamma_2 R_\lambda \text{sh } k \\ C_1 &= 3\text{ch } k - {}^{3/2}\gamma_2 \gamma_4, & C_2 &= \gamma_1 \gamma_4, & \gamma_0 &= k^2 + \text{ch}^2 k \\ \gamma_1 &= (2k)^{-2}(3\text{ctg } \beta + k^2 S)(\text{sh } 2k - 2k), & \gamma_4 &= \text{sh } k + \text{ch } k \\ \gamma_2 &= 1 + k^2 + \text{ch}^2 k, & \gamma_3 &= k \text{sh } k + \text{ch } k \end{aligned} \quad (3.10)$$

Легко видеть, что величины  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, A, B_1, B_2, C_2$  положительные. Представляя  $c_0$  в виде  $c_0 = c_{r0} + ic_{i0}$ , получаем для мнимой части собственного значения уравнение четвертого порядка

$$\begin{aligned} &4A^3 c_{0i}^4 + 8A^2 B_1 c_{0i}^3 + (AB_2^2 + 5AB_1^2 + 4A^2 C_2) c_{0i}^2 + \\ &+ (B_1 B_2^2 + 4AB_1 C_2 + B_1^3) c_{0i} + (C_2 B_1^2 - B_1 B_2 C_1 - AC_1^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Все коэффициенты уравнения (3.11), кроме свободного члена, имеют положительное значение. Если и свободный член будет положительным, то уравнение (3.11) не может иметь положительных действительных корней. В случае если свободный член отрицательный, то, как легко видеть, всегда будет существовать положительный корень  $c_{0i}$ .

Таким образом, условием устойчивости является неотрицательность свободного члена

$$Q(k, R_\lambda) = B_1^2 C_2 - B_1 B_2 C_1 - AC_1^2 \geq 0 \quad (3.12)$$

Условие (3.12) может быть записано в форме

$$Q(k, R_\lambda) = MR_\lambda^2 \text{sh}^2 k - 2NR_\lambda \text{sh } k + L \geq 0 \quad (3.13)$$

где

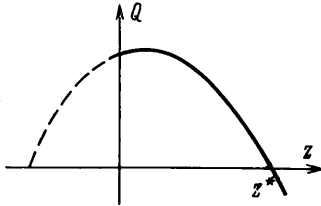
$$\begin{aligned} M &= \gamma_1(\gamma_1^2 \gamma_4 - {}^{9/4}\gamma_2^2 \gamma_4 + {}^{9/2}\gamma_2 \text{sh}^2 k \text{ch } k) \\ 2N &= \gamma_0({}^{9/2}\gamma_2^2 \gamma_4^2 - {}^{27/2}\gamma_2 \gamma_4 \text{ch } k + 9\text{ch}^2 k - 2\gamma_1^2 \gamma_4^2) \\ L &= \gamma_0^2 \gamma_1 \gamma_4^3 \end{aligned} \quad (3.14)$$



Критические значения  $z^* = R_\lambda^* \operatorname{sh} k^*$  определяются как корни квадратного трехчлена (3.13)

$$z^* = \frac{N^* \pm \sqrt{N^{*2} - L^* M^*}}{M^*}$$

Легко показать, пользуясь (3.10) и (3.14), что при  $M$  положительном,  $N$  отрицательно и корни (3.13) могут быть только отрицательными или комплексными. Так как при  $R_\lambda \operatorname{sh} k = 0$   $Q(k, R_\lambda) > 0$ , то в случае  $M > 0$  течение будет устойчивым. При  $M < 0$  имеем один положительный и один отрицательный корень, и график левой части неравенства (3.13) имеет вид (фиг. 2). Таким образом, при  $R_\lambda \operatorname{sh} k > z^*$  течение будет неустойчивым. При возрастании  $z = R_\lambda \operatorname{sh} k$  неустойчивый корень стремится к нулю. Действительно, свободный член уравнения (3.11) имеет второй порядок относительно  $R_\lambda \operatorname{sh} k$ , а остальные коэффициенты — третий. Уравнение (3.11) при малых значениях  $k$ , но конечных  $z = R_\lambda k$  имеет вид



Фиг. 2

$$4z^3 c_{0i}^4 + 8z^2 c_{0i}^3 + (9z^3 + 5z) c_{0i}^2 + (9z^2 + 1) c_{0i} + k(\operatorname{ctg} \beta - 9z - 9z^2 \operatorname{ctg} \beta) = 0 \quad (3.15)$$

В нулевом приближении при  $k = 0$  свободный член обращается в нуль и все корни будут устойчивыми, что соответствует результату, полученному ранее в п. 2. Критическое значение  $z^* = R_\lambda^* k^*$  равно

$$z^* = R_\lambda^* k^* = \frac{-9 + \sqrt{81 + 36 \operatorname{ctg}^2 \beta}}{18 \operatorname{ctg} \beta} \quad (3.16)$$

При  $\beta = 1/2\pi$  течение неустойчиво для всех значений  $R_\lambda k$  при малых углах наклона  $\beta$  граница устойчивости определяется условием  $R_\lambda k > 1/3$ . Из выражения (3.16) видно, что с уменьшением удельной теплоты плавления критическое волновое число возрастает, т. е. неустойчивость смещается в сторону более коротких волн.

Неустойчивое собственное значение  $c_{0i}$  при малом  $k$  равно в соответствии с (3.15)

$$c_{0i} = k \frac{9kR_\lambda(1 + kR_\lambda \operatorname{ctg} \beta) - \operatorname{ctg} \beta}{1 + 9R_\lambda^2 k^2} \quad (3.17)$$

Обобщая результаты этого пункта, можно сделать вывод, что при малых числах Рейнольдса, а также малых значениях произведений  $PR$  и  $P^*R$ , но конечных значениях  $R_\lambda$  существует диапазон волн, при которых течение неустойчиво, граница устойчивости с уменьшением удельной теплоты плавления смещается в сторону более коротких волн.

Автор благодарен Г. А. Тирскому и А. А. Зайцеву за полезные советы.

Поступило 26 IX 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Yih Chia-Shun. Stability of liquid flow down an inclined plan. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3, pp. 321—334. (Рус. перев. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1963, № 5, стр. 77.)
2. Седов В. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
3. Тирский Г. А. Оплавление теплопроводящей стенки за движущимся скачком уплотнения. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 5, стр. 989.