УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПУЗЫРЕЙ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ РАДИУСОВ В ЖИДКОСТИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

О. В. ВОИНОВ, А. М. ГОЛОВИН

(*Москва*)

Рассматривается вывод уравнений для поступательного движения и изменения радиусов системы из N пузырей, движущихся в гидростатическом поле. Предполагается, что R_i и W_i числа Рейнольдса и Вебера — для каждого пузыря удовлетворяют условиям $R_i \gg 1$, $W_i < 1$, что позволяет считать поле скоростей движения жидкости мало отличающимся от движения идеальной жидкости, а форму пузырей сферической. В уравнениях Лагранжа учитываются диссипативные силы методом расчета скорости диссипации кинетической энергии движения жидкости [1–3].

1. Поступательное движение сфер в идеальной жидкости. Пусть $\mathbf{r}_i$ — координаты центра, $\mathbf{u}_i$ — скорость, a_i — радиус i-го пузыря ($i = 1, \ldots, N$). Потенциал поля скоростей движения идеальной несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$n_i^\alpha \partial\Phi / \partial r^\alpha = n_i^\alpha u_i^\alpha + \dot{a}_i \quad \text{при } r_i' = a_i, \qquad \Phi \to 0 \quad \text{при } r_i' \to \infty$$
$$(r_i' = |\mathbf{r}_i'|,\ \mathbf{r}_i' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i,\ \mathbf{n}_i = \mathbf{r}_i' / r_i') \tag{1.2}$$

В (1.2) и далее предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам.

Кинетическая энергия T идеальной жидкости плотности ρ, как известно [3], выражается через интегралы по поверхностям сфер

$$T = -\frac{\rho}{2}\sum_{j=1}^{N}\int \Phi n_j^\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial r^\alpha} dS_j \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что присоединенный импульс равен

$$\frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} = -\rho\int \Phi n_i^\alpha \, dS_i \tag{1.4}$$

Вычисление полной производной по времени от присоединенного импульса приводит к следующему результату:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} = -\rho\int\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} n_i^\alpha + u_i^\beta \frac{\partial\Phi}{\partial r^\beta} n_i^\alpha + \dot{a}_i \frac{\partial\Phi}{\partial r^\alpha}\right) dS_i \tag{1.5}$$

Действительно, как видно из (1.3)

$$\frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} = -\frac{\rho}{2}\sum_{j=1}^{N}\int \frac{\partial\Phi}{\partial u_i^\alpha} n_j^\beta \frac{\partial\Phi}{\partial r^\beta} dS_j - \frac{\rho}{2}\sum_{j=1}^{N}\int \Phi n_j^\beta \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^\beta \partial u_i^\alpha} dS_j \tag{1.6}$$

По теореме Грина обе суммы в формуле (1.6) равны. Это выражение можно преобразовать к виду (1.4), если воспользоваться граничными условиями (1.2), в соответствии с которыми

$$\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} n_j^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} = \delta_{ij} n_i^\alpha, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

Далее при вычислении производных присоединенного импульса следует учесть появление дополнительных конвективных членов, связанных со смещением или растяжением граничной поверхности

$$\frac{\partial}{\partial r_j^\alpha} \int \Phi n_i^\beta \, dS_i = \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r_j^\alpha} + \delta_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \right) n_i^\beta \, dS_i \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \int \Phi n_i^\alpha \, dS_i = \int \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a_j} + \delta_{ij} \left(n_i^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} + \frac{2\Phi}{a_i} \right) \right] n_i^\alpha \, dS_i \tag{1.8}$$

В приведенных формулах отсутствует член, соответствующий производным от n_i^β, так как при смещении i-й сферы нормаль совершает параллельный перенос, а поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \right) n_j^\beta = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial a_i} + \delta_{ij} n_i^\alpha \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \right) n_i^\beta = 0 \tag{1.9}$$

Последние два члена в формуле (1.8) можно представить в виде

$$\int \left(n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} + \frac{2\Phi}{a_i} \right) n_i^\beta \, dS_i = \int \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} \, dS_i \tag{1.10}$$

Для доказательства (1.10) следует записать это выражение в сферической системе координат и исключить производные по углам с помощью интегрирования по частям.

Если интеграл по поверхности сферы от произвольной скалярной функции f не меняется при произвольном повороте этой сферы относительно произвольной оси, проходящей через ее центр, то отсюда следует, что

$$\int \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} n_i^\beta \, dS_i \equiv \int \frac{\partial f}{\partial r^\beta} n_i^\alpha \, dS_i \tag{1.11}$$

Аналогичное соотношение справедливо и в случае, когда f является компонентой вектора.

На основании тождества (1.11) и граничного условия (1.2) можно преобразовать (1.5) к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} = -\rho \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} n_i^\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} n_i^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} \right) dS_i \tag{1.12}$$

Вычисление силы гидродинамического взаимодействия пузырей приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial T}{\partial r_i^\alpha} = \frac{\rho}{2} \int \left(\Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^\alpha \partial r^\beta} - \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} \right) n_i^\beta \, dS_i \tag{1.13}$$

Действительно, из формулы (1.3) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial r_i^\alpha} = -\frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{N} \int \frac{\partial \Phi}{\partial r_i^\alpha} n_j^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} dS_j - \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{N} \int \Phi \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} n_j^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} dS_j -$$
$$- \frac{\rho}{2} \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} n_i^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} + \Phi \frac{\partial}{\partial r^\alpha} n_i^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} \right) dS_i \tag{1.14}$$

Пользуясь теоремой Грина и сохранением граничных условий при смещении сферы

$$\left(\frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} + \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \right) n_j^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} = 0 \tag{1.15}$$

можно преобразовать (1.14) к виду

$$\frac{\partial T}{\partial r_i^\alpha} = -\frac{\rho}{2}\sum_{j=1}^{N}\int \Phi n_j^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta}\frac{\partial \Phi}{\partial r_i^\alpha} dS_j - \frac{\rho}{2}\int \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} n_i^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} dS_i \tag{1.16}$$

Из (1.15) и (1.9) следует, что

$$n_j^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta}\frac{\partial \Phi}{\partial r_i^\alpha} = -\delta_{ij} n_i^\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^\alpha \partial r^\beta} \tag{1.17}$$

Подстановка (1.17) в (1.16) приводит к формуле (1.13).

Из (1.12), (1.13) следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial r_i^\alpha} = -\rho\int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} n_i^\alpha + \frac{1}{2} n_i^\beta \frac{\partial}{\partial r^\alpha}\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta}\right) dS_i \tag{1.18}$$

Далее можно воспользоваться тождеством (1.11) и уравнением Лапласа, что позволяет записать формулу (1.18) следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial r_i^\alpha} = -\rho\int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta}\frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta}\right) n_i^\alpha\, dS_i \tag{1.19}$$

Интеграл Коши — Лагранжа, описывающий движение идеальной жидкости в поле массовых сил с потенциалом U, имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 = \frac{p_0 - p}{\rho} + U_0 - U \tag{1.20}$$

Здесь p — давление жидкости, p_0 — давление в точке условно принимаемой за нулевую.

Подстановка (1.20) в (1.19) приводит к уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial r_i^\alpha} = \int (p + \rho U) n_i^\alpha\, dS_i \tag{1.21}$$

Интеграл от давления жидкости по поверхности i-го пузыря представляет собой сумму всех сил, действующих на пузырь.

Для пузыря пренебрежимо малой массы этот интеграл должен равняться нулю.

Таким образом, уравнения Лагранжа, описывающие движение системы пузырей, радиусы которых изменяются в процессе движения, имеют тот же вид, как и для сфер постоянного радиуса [3]. В частности, для случая движения в поле тяжести

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial r_i^\alpha} = -\frac{4\pi}{3}\rho a_i^3 g^\alpha \tag{1.22}$$

Здесь g^α — компонента ускорения силы тяжести.

2. Радиальное движение. Система пузырей, радиусы которых изменяются в процессе движения, как показано ниже, является лагранжевой. Эта система характеризуется $4N$-обобщенными координатами, включающими в себя координаты центров всех пузырей $\mathbf{r}_i$ и их радиусы a_i. Присоединенный импульс, отвечающий координате a_i, вычисляется аналогично (1.4) и оказывается равным

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} = -\rho\int \Phi\, dS_i \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot a_i} = -\rho \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} + \dot a_i n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} + \frac{2}{a_i} \dot a_i \Phi \right) dS_i \qquad (2.2)$$

Далее можно воспользоваться соотношением (1.10) и граничными условиями (1.2), чтобы преобразовать (2.2) к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot a_i} = -\rho \int \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \right)^2 + \frac{2}{a_i} \Phi n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \right] dS_i \qquad (2.3)$$

Вычисление силы, соответствующей координате a_i, приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial T}{\partial a_i} = -\frac{\rho}{2} \int \left[\left(n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \right)^2 - \Phi n_i^\alpha \frac{\partial}{\partial r^\alpha} n_i^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} + \frac{2}{a_i} \Phi n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \right] dS_i \quad (2.4)$$

Действительно, как следует из (1.3)

$$\frac{\partial T}{\partial a_i} = -\frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{N} \int \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} n_j^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} dS_j - \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{N} \int \Phi \frac{\partial}{\partial a_i} n_j^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} dS_j -$$

$$- \frac{\rho}{2} \int \left[\left(n_i^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} \right)^2 + \Phi n_i^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta} n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \right] dS_i -$$

$$- \rho \int \frac{1}{a_i} \Phi n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} dS_i \qquad (2.5)$$

По теореме Грина первые две суммы равны. Далее в силу сохранения граничных условий при изменении радиуса i-й сферы

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_i} + \delta_{ij} n_i^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta} \right) n_j^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} = 0 \qquad (2.6)$$

формула (2.5) преобразуется к виду (2.4).

Кроме того, интегрирование по частям в сферической системе координат позволяет доказать справедливость тождества для любой гармонической функции

$$\int \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} dS_i = \int \left[\left(n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \right)^2 + \Phi n_i^\alpha \frac{\partial}{\partial r^\alpha} n_i^\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r^\beta} + \frac{2}{a_i} \Phi n_i^\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r^\alpha} \right] dS_i$$

Таким образом, из (2.3), (2.4), (2.6) и интеграла Коши — Лагранжа (1.20) следует уравнение Лагранжа для радиального движения сфер в поле сил тяжести

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot a_i} - \frac{\partial T}{\partial a_i} = \int (p - p_0) dS_i - 4\pi\rho a_i^2 g^\alpha r_i^\alpha \qquad (2.7)$$

На единичный элемент поверхности i-го пузыря в идеальной жидкости действует сила $-pn_i^\alpha$, которая совместно с силой поверхностного натяжения уравновешивается $p' n_i^\alpha$ — силой, действующей со стороны газа на тот же элемент поверхности. Пренебрегая отличием формы пузыря от сферической [4], можно потребовать выполнения граничного условия в среднем на поверхности пузыря

$$p + 2\sigma / a_i = p' \qquad (2.8)$$

Внутреннее давление газа в пузыре можно выразить с помощью уравнения состояния через соответствующие начальные значения, обозначаемые с индексом нуль

$$p' = p_0'(a_{0i} / a_i)^{3\gamma} \tag{2.9}$$

Здесь γ — показатель политропы.

Тогда уравнение Лагранжа (2.7) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial T}{\partial a_i} = 4\pi a_i^2 \left[\left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_{0i}}\right)\left(\frac{a_{0i}}{a_i}\right)^{3\gamma} - p_0 - \frac{2\sigma}{a_i} - \rho g^\alpha r_i^\alpha\right] \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) для случая одиночного пузыря в отсутствие поступательного движения совпадает с известным уравнением [4]. Это уравнение описывает изменение радиуса пузыря. В частности, если давление p_0 меняется по гармоническому закону, то это уравнение переходит в уравнение Нолтинга — Непайраса [5].

3. Движение пузырей в жидкости малой вязкости. Если скорость поступательного движения и радиус i-го пузыря ($i = 1, \ldots, N$) в системе мало меняются за время порядка a_i / u_i, то силы вязкого сопротивления могут считаться зависящими только от мгновенных значений обобщенных координат r_j^α, a_j и обобщенных скоростей u_j^α, $\dot{a}_j$.

В этом случае можно включить вязкие силы в обобщенные внешние силы в уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial r_i^\alpha} = F_i^\alpha, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial T}{\partial a_i} = Q_i. \tag{3.1}$$

Обобщенные внешние силы F_i^α, Q_i можно определить, следуя [3, 6], как коэффициенты, стоящие перед виртуальными обобщенными скоростями в выражении для виртуальной мощности сил, действующих на жидкость

$$\rho \int \frac{dv^\alpha}{dt}\frac{Dr^\alpha}{Dt} d^3r = \sum_{i=1}^{N} \left(F_i^\alpha \frac{Dr_i^\alpha}{Dt} + Q_i \frac{Da_i}{Dt}\right) \tag{3.2}$$

Здесь Dr^α / Dt — компонента виртуальной скорости жидкости, возникающая вследствие виртуального движения пузырей с обобщенными скоростями Dr_i^α / Dt, Da_i / Dt.

Потенциал поля скоростей движения жидкости с точностью до членов порядка $(a / l)^2$, где a — средний радиус пузырей, l — среднее расстояние между их центрами, равен

$$\Phi = -\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2 \dot{a}_i}{r_i'} - \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^3 r_i'^\alpha}{2 r_i'^3}\left(u_i^\alpha - {\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}}' a_j^2 \dot{a}_j \frac{r_{ij}^\alpha}{r_{ij}^3}\right) \tag{3.3}$$

Виртуальное поле скоростей движения жидкости имеет вид

$$\frac{Dr^\alpha}{Dt} = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{a_i^3}{2}\frac{\partial \varphi_i^\beta}{\partial r^\alpha}\frac{Dr_i^\beta}{Dt} + a_i^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\alpha}\frac{Da_i}{Dt}\right) \tag{3.4}$$

$$\left(\varphi_i^\alpha = \frac{r_i'^\alpha}{r_i'^3}, \quad \psi_i = \frac{1}{r_i'} + {\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}}' \frac{a_j^3 r_j'^\alpha r_{ij}^\alpha}{2 r_j'^3 r_{ij}^3}\right)$$

Таким образом, обобщенные внешние силы определяются как

$$F_i^\alpha = -\frac{\rho a_i^3}{2}\int \frac{dv^\beta}{dt}\frac{\partial \varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta} d^3r, \quad Q_i = -\rho a_i^2 \int \frac{dv^\alpha}{dt}\frac{\partial \psi_i}{\partial r^\alpha} d^3r \tag{3.5}$$

В соответствии с уравнениями Навье — Стокса, описывающими движение жидкости с коэффициентом динамической вязкости μ

$$\rho\frac{dv^\alpha}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial r^\alpha}+\frac{\partial\sigma'^{\alpha\beta}}{\partial r^\beta}+\rho g^\alpha \qquad \left(\sigma'^{\alpha\beta}=\mu\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial r^\beta}+\frac{\partial v^\beta}{\partial r^\alpha}\right)\right) \tag{3.6}$$

Формулы (3.5) могут быть преобразованы к виду

$$F_i^\alpha=-\frac{a_i^3}{2}\int\frac{\partial}{\partial r^\beta}\left(p\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta}-\sigma'^{\beta\gamma}\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\gamma}\right)d^3r+ \tag{3.7}$$

$$+\frac{a_i^3}{2}\int\sigma'^{\beta\gamma}\frac{\partial^2\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta\,\partial r^\gamma}d^3r-\frac{\rho a_i^3}{2}\int\frac{\partial}{\partial r^\beta}g^\gamma r^\gamma\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta}d^3r$$

$$Q_i=-a_i^2\int\frac{\partial}{\partial r^\alpha}\left(p\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\alpha}-\sigma'^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\beta}\right)d^3r+a_i^2\int\sigma'^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial r^\alpha\partial r^\beta}d^3r-\rho a_i^2\int\frac{\partial}{\partial r^\alpha}g^\beta r^\beta\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\alpha}d^3r \tag{3.8}$$

Первые интегралы в (3.7) и (3.8) можно выразить как интегралы по поверхности всех пузырей. Интегралы по бесконечно удаленной поверхности компенсируются интегралами, возникающими от последних членов в формулах (3.7) и (3.8).

Далее следует воспользоваться условием отсутствия касательного напряжения на поверхности сфер $n_j^\beta\sigma'^{\beta\gamma}=\sigma'^{rr}n_j^\gamma$, а также соотношениями

$$\frac{a_i^3}{2}n_j^\beta\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta}=-\delta_{ij}n_i^\alpha, \qquad a_i^2n_j^\alpha\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\alpha}=-\delta_{ij}$$

Тогда первый интеграл в (3.7) сводится к интегралу по поверхности i-го пузыря, представляющему с точностью до знака полную силу, действующую на пузырь. Эта сила должна быть равна нулю, если считать пренебрежимо малой массу пузыря.

Первый интеграл в (3.8) аналогичным образом может быть преобразован к виду

$$-a_i^2\int\frac{\partial}{\partial r^\alpha}\left(p\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\alpha}-\sigma'^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\beta}\right)d^3r=\int(p-\sigma'^{rr})dS_i$$

Граничные условия на поверхнсcти пузыря, аналогичные (2.8)

$$p-\sigma'^{rr}+2\sigma/a_i=p'$$

и уравнение состояния (2.9) позволяют записать

$$\int(p-\sigma'^{rr})dS_i=4\pi a_i^2\left[\left(p_0+\frac{2\sigma}{a_{0i}}\right)\left(\frac{a_{0i}}{a_i}\right)^{3\gamma}-p_0-\frac{2\sigma}{a_i}\right]$$

Вторые интегралы в (3.7) и (3.8) представляют собой обобщенные силы вязкого трения, для расчета которых поле скоростей заменяется на поле скоростей идеальной жидкости. Соответствующая погрешность, как показано в работе [2], для движения пузыря постоянного радиуса составляет величину порядка $1/\sqrt{R}$

$$\frac{a_i^3}{2}\int\sigma'^{\beta\gamma}\frac{\partial^2\varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta\partial r^\gamma}d^3r=-\mu a_i^3\sum_{j=1}^N\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^\beta\partial r^\gamma}n_j^\beta\frac{\partial\varphi_i^\alpha}{\partial r^\gamma}dS_j$$

$$a_i^2\int\sigma'^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial r^\beta\partial r^\alpha}d^3r=-2\mu a_i^2\sum_{j=1}^N\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^\alpha\partial r^\beta}n_j^\alpha\frac{\partial\psi_i}{\partial r^\beta}dS_j$$

Для вычисления этих интегралов следует отметить, что на поверхности j-й сферы

$$a_jn_j^\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^\beta\,\partial r^\alpha}=-\frac{3}{2}\left(u_j^\beta-\sum_{i=1}^N a_i^2\dot a_i\frac{r_{ij}^\beta}{r_{ij}^3}\right)(3n_j^\beta n_j^\alpha-\delta^{\alpha\beta})-2\dot a_jn_j^\alpha$$

$$a_i^3 \frac{\partial \varphi_i^\alpha}{\partial r^\beta} = -\delta_{ij}(3n_j^\alpha n_j^\beta - \delta^{\alpha\beta})$$

$$a_i^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial r^\alpha} = -\delta_{ij} n_i^\alpha - \frac{3}{2}(1-\delta_{ij}) \frac{r_{ij}^\beta}{r_{ij}^3}(n_j^\alpha n_j^\beta - \delta^{\alpha\beta})$$

Третьи интегралы в (3.7) и (3.8) представляют собой соответственно силу Архимеда и силу гидростатического давления.

Таким образом, уравнения Лагранжа, описывающие движение системы пузырей в жидкости малой вязкости, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_i^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial r_i^\alpha} = -\frac{4\pi}{3}\rho a_i^3 g^\alpha - 12\pi\mu a_i \left(u_i^\alpha - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} a_j^2 \dot{a}_j \frac{r_{ij}^\alpha}{r_{ij}^3}\right) \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial T}{\partial a_i} = 4\pi a_i^2 \left[\left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_{0i}}\right)\left(\frac{a_{0i}}{a_i}\right)^{3\gamma} - p_0 - \frac{2\sigma}{a_i} - \rho g^\alpha r_i^\alpha\right] - 16\pi\mu a_i \dot{a}_i \tag{3.10}$$

Кинетическая энергия идеальной жидкости, обтекающей систему пузырей, как следует из (3.3) и (1.3) с точностью до членов порядка $(a/l)^2$ равна

$$T = \pi\rho \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{3} a_i^3 u_i^2 + 2a_i^3 \dot{a}_i^2 + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} a_j^2 \dot{a}_j \left(\frac{a_i^2 \dot{a}_i}{r_{ij}} - \frac{\dot{a}_i}{r_{ij}^3} u_i^\alpha r_{ij}^\alpha\right)\right] \tag{3.11}$$

Диссипативная сила в уравнении (3.9) фактически совпадает с формулой В. Г. Левича [1], описывающей силу, действующую на пузырь постоянного радиуса, если в выражение для скорости натекающего на пузырь потока включить поле скоростей, возникающих вследствие изменения радиусов остальных пузырей.

Диссипативная сила в уравнении, описывающем радиальное движение пузырей, совпадает с полученной ранее [7] при решении задачи о расширении одиночного пузыря в отсутствии поступательного движения.

Авторы благодарят В. Г. Левича за обсуждение результатов работы.

Поступило 14 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Moore D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 4., p. 749.
3. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
4. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1960, № 3.
5. Noltingk B., Neppiras E. Cavitation produced by Ultrasonics. Proc. Phys. Soc., 1950, vol. 63B, No. 9.
6. Головин А. М. Уравнения Лагранжа для системы пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1967, № 6.
7. Barlow E. J., Langlois W. E. Diffusion of gas from a liquid into an expanding bubble. IBM J. Res. and Develop., 1962, vol. 6, No. 3, p. 329.