

РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ГРАВИТАЦИОННОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ С УЧЕТОМ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

В. М. ШАШИН, Н. И. ШУВАНОВ

(Москва)

Рассматриваются равновесные формы свободной поверхности жидкости, находящейся в гравитационном и неоднородном магнитном полях. При выводе уравнения поверхности используется вариационный принцип минимума свободной энергии. Изложенный метод используется для расчета формы свободной поверхности применительно к задаче моделирования условий невесомости с помощью магнитного воздействия на жидкость.

При расчете равновесной формы поверхности жидкости в сосуде обычно ограничиваются рассмотрением сил тяжести и сил поверхностного натяжения.

В данной работе дополнительно исследуется влияние на форму свободной поверхности объемных сил, действующих на слабомагнитную жидкость в неоднородном магнитном поле. Использование магнитных полей принципиально позволяет решить две практически важные задачи. С помощью сильного магнитного поля можно, во-первых, управлять поведением жидкости в баках в условиях невесомости и, во-вторых, с определенной точностью моделировать условия невесомости в земных условиях в течение продолжительного времени [1, 2].

1. Рассмотрим задачу о равновесной свободной поверхности несжимаемой жидкости плотностью ρ , частично заполняющей сосуд. Жидкость находится в гравитационном поле с потенциалом ngz (n — коэффициент перегрузки) и во внешнем неоднородном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{b}(r)$.

Ограничимся рассмотрением слабомагнитных жидкостей, для которых коэффициент магнитной восприимчивости $\chi \ll 1$. Кроме того, в дальнейшем будем пренебрегать массой газа в сосуде.

При сделанных предположениях свободную энергию системы можно представить в виде [3]

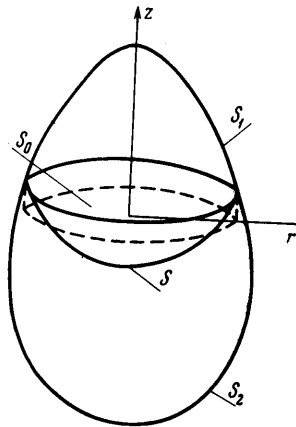
$$F = n g \rho \int_v z dv - \frac{\chi}{2\mu_0} \int_v B^2(r, z) dv + \sigma S + \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 \quad (1.1)$$

Здесь σ_i — коэффициенты поверхностного натяжения на поверхностях раздела газ — жидкость S , газ — твердое тело S_1 и твердое тело — жидкость S_2 ; μ_0 — магнитная постоянная; r, z — цилиндрические координаты частиц жидкости.

Система координат выбирается таким образом, что плоскость $z = 0$ совпадает со свободной поверхностью жидкости при отсутствии сил поверхностного натяжения и магнитного поля (фиг. 1).

Требование несжимаемости приводит к дополнительному условию постоянства объема жидкости

$$V = \text{const} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Включая, как обычно принято, уравнение связи (1.2) в функционал (1.1), будем в дальнейшем рассматривать вместо F выражение

$$F^* = F + \rho Vf \quad (1.3)$$

где f — неопределенный постоянный множитель Лагранжа.

Как известно, необходимым условием равновесия системы является равенство нулю линейной вариации δF^* функционала (1.3).

Вычислим вариацию функционала (1.3), считая задачу осесимметричной. Если уравнение свободной поверхности задано в виде

$$\xi = \xi(r) \quad (1.4)$$

то для линейной вариации имеем

$$\begin{aligned} \delta F^* = & ng\rho \int_{S_0} \xi \delta \xi dS + ng\rho \int_{\delta S_0} \xi \delta \xi dS - \frac{\chi}{2\mu_0} \int_{S_0} dS \int_{\xi}^{\xi+\delta\xi} B^2(r, z) dz - \\ & - \frac{\chi}{2\mu_0} \int_{\delta S_0} dS \int_{\xi}^{\xi+\delta\xi} B^2(r, z) dz + f\rho \int_{S_0} \delta \xi dS + f\rho \int_{\delta S_0} \delta \xi dS + \\ & + \sigma \delta S + \sigma_1 \delta S_1 + \sigma_2 \delta S_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Используя теорему о среднем, можно показать, что

$$\int_{\xi}^{\xi+\delta\xi} B^2(r, z) dz = B^2(r, \xi) \delta \xi + O[(\delta \xi)^2] \quad (1.6)$$

При не слишком больших углах наклона стенки сосуда к оси z (т. е. $\operatorname{tg} \beta \approx 1$, см. фиг. 2) приращение контура L_0 , ограничивающего S , будет порядка $\delta \xi$. В этом случае четвертый и шестой члены в выражении (1.5) будут иметь порядок $(\delta \xi)^2$ и могут быть опущены. Оценивая остальные члены [4], получаем окончательное выражение для вариации δF^*

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \left[\rho (ng\xi + f) - \sigma' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\chi}{2\mu_0} B^2(r, \xi) \right] \delta \xi dS + \\ + \int_{L_0} (-\sigma \cos \theta - \sigma_1 + \sigma_2) \frac{\cos \gamma}{\sin \theta} \delta \xi d\lambda = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $1/R_1 + 1/R_2$ — удвоенная средняя кривизна поверхности. В силу произвольности вариации $\delta \xi$ получаем

$$\rho (ng\xi + f) - \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\chi}{2\mu_0} B^2(r, \xi) = 0 \quad (1.8)$$

при $z = \xi(r)$, и

$$\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma \cos \theta \quad (1.9)$$

на контуре L .

Используя выражение для средней кривизны

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} \left(\frac{r\xi'}{\sqrt{1+(\xi')^2}} \right)' \quad \left(\equiv \frac{d}{dr} \right)$$

получаем

$$\rho (ng\xi + f) - \frac{\sigma}{r} \left(\frac{r\xi'}{\sqrt{1+(\xi')^2}} \right)' - \frac{\chi}{2\mu_0} B^2(r, \xi) = 0 \quad (1.10)$$

Переходя к безразмерным переменным, окончательно получаем

$$\frac{1}{r} \left(\frac{r\xi'}{\sqrt{1+(\xi')^2}} \right)' = Bo\xi + \lambda - Qb^2(r, \xi) \quad (1.11)$$

$$Bo = \frac{\rho ngR^2}{\sigma}, \quad Q = \frac{\chi B_0^2 R}{2\mu_0 \sigma}, \quad \lambda = \frac{\rho f R}{\sigma}$$

где R — радиус контура смачивания.

В качестве граничных используем условие симметрии и условие смачивания на стенке сосуда

$$\begin{aligned} \xi'(0) &= 0 \\ \frac{1 + \xi'(1)\varphi'(1)}{\sqrt{\{1 + [\xi'(1)]^2\} \{1 + [\varphi'(1)]^2\}}} &= \cos \theta \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь $\varphi(r)$ — уравнение боковой поверхности сосуда, θ — угол смачивания.

2. Полученные зависимости позволяют рассчитать форму свободной поверхности жидкости при совместном действии гравитационного и магнитного полей. В качестве примера рассмотрим задачу о моделировании состояния невесомости в жидкости в земных условиях. Важность этой проблемы определяется тем, что имеющиеся в настоящее время экспериментальные методы моделирования невесомости (самолет, падающая капсула) позволяют исследовать процессы с малыми характерными временами. Вследствие этого изучение тепловых процессов, диссипативных характеристик колебательных процессов с помощью этих методов затруднено из-за ограниченности времени эксперимента. Магнитная же компенсация сил гравитации практически не ограничена во времени. Однако в неоднородном магнитном поле объемная сила не может быть постоянной в конечном объеме. Поэтому при моделировании состояния невесомости неизбежно возникают неустраняемые погрешности. Оценим возможности магнитного моделирования невесомости.

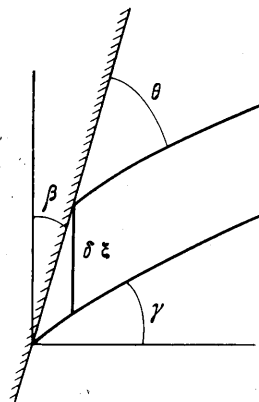
Невозможно создать во всем объеме однородное силовое поле магнитного происхождения, поэтому потребуем равенства силы гравитации и магнитной силы на оси симметрии сосуда. Для объемов, находящихся не на оси z , силы будут компенсироваться не полностью, причем отклонение от полной компенсации будет расти с удалением от оси.

Магнитное поле на оси z должно меняться пропорционально $z^{0.5}$ [5], а при других значениях r для поля можно использовать приближенное выражение

$$b^2(r, \xi) = 1 + 3/4(Pr)^2 + 1/16(Pr)^4 + 2P\xi \quad (2.1)$$

Величина P определяется из условия

$$2PQ = Bo \quad (2.2)$$

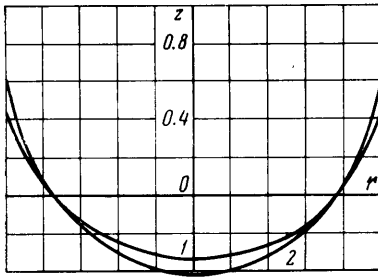


Фиг. 2

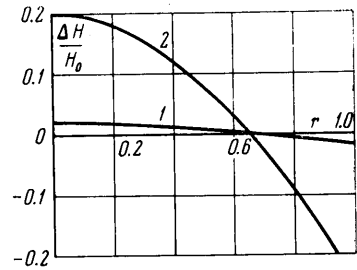
Численные значения Bo , Q и P определяются свойствами жидкости, размером контейнера и располагаемой величиной магнитного поля. Чем больше величина постоянной P , тем существеннее будут отклонения формы свободной поверхности от сферической.

Для большинства жидкостей значение магнитной восприимчивости составляет $\sim 10^{-6}$. Однако для жидкого кислорода эта величина на два порядка больше. В этом отношении кислород наиболее удобная модельная жидкость. Величина максимального магнитного поля у современных стационарных магнитов составляет $2 \div 2.5$ тл.

Численные расчеты с использованием зависимости (1.11) и (2.1) производились на ЭВМ. Были рассчитаны формы и средняя кривизна свобод-



Фиг. 3



Фиг. 4

ных поверхностей для жидкого кислорода в цилиндрическом сосуде при $Q = 2.34 \cdot 10^3$ и различных значениях числа Бонда. Некоторые результаты расчетов приводятся на фиг. 3 и 4.

При значениях числа $Bo \leq 100$, что соответствует сосуду радиусом $R \leq 1$ см, поверхность практически не отличается от сферической (фиг. 3, кривая 1). При больших значениях числа Бонда ($Bo \geq 300$) наблюдается заметное отклонение от сферы (кривая 2).

При этом средняя кривизна поверхности отличается от кривизны сферы на величину порядка 20% (фиг. 4, кривая 2). Таким образом, при стационарных магнитных полях порядка $2 \div 2.5$ тл можно моделировать условия невесомости в жидкости на моделях размером до 5—6 см.

Поступило 17 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Unterberg W., Congelliere J. Zero gravity problems in space powerplants. A Status Survey. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 6.
2. Кириченко Ю. А., Веркин Б. И. Імітація невесомості і слабких гравітаційних полів для дослідження теплообміну при кипінні. Доповіді АН УРСР, Сер. А. Фіз.-техн. та матем. науки, 1968, № 7.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
4. Петров А. А. Вариационная формулировка задачи о движении жидкости в сосуде конечных размеров. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
5. Fereday R. A. A method of comparing small magnetic susceptibilities. Proc. Phys. Soc., 1930, vol. 42, pt 3.