

ГОРЕНИЕ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Л. ДОРОТ, Ю. В. ЛАПИН, М. Х. СТРЕЛЕЦ

(Ленинград)

Излагается метод расчета турбулентного пограничного слоя на пористой пластине при произвольной скорости химической реакции, протекающей между вдуваемым в пограничный слой веществом и окислителем (кислородом), содержащимся во внешнем потоке. Метод, построенный при обычных для теории турбулентного пограничного слоя допущениях, является методом последовательных приближений.

В основу исследования положена двухслойная схема турбулентного пограничного слоя — ламинарный подслой — турбулентное ядро. Числа Праандтля и Шмидта и их турбулентные аналоги принимаются равными единице. Предполагается, что на поверхности химические реакции заморожены.

В качестве иллюстрации приводятся результаты расчетов профилей концентраций, температур и скоростей при вдуве в пограничный слой окиси углерода и протекании с произвольной скоростью реакции окисления окиси углерода.

Исследованию турбулентного пограничного слоя при наличии ввода вещества сквозь пористую стенку посвящено много теоретических и экспериментальных работ. Состояние, главным образом, зарубежных исследований до 1962 г. освещено в монографии Дорренса [1], обширную библиографию работ советских и зарубежных авторов можно найти в обзоре П. Н. Романенко, В. Н. Харченко и Ю. П. Семенова [2], а также в монографии С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьева [3]. В большинстве проведенных до настоящего времени исследований, как правило, рассматривалось вдувание химически инертных компонент в пограничный слой. Между тем в последние годы, главным образом, в связи с необходимостью анализа процессов на химически активных разрушающихся теплозащитных покрытиях и процессов в так называемых гибридных двигателях [4] проявляется большой интерес к течениям в турбулентном пограничном слое химически реагирующих смесей. В немногочисленных теоретических исследованиях этой проблемы рассматриваются течения либо с реакциями только на поверхности [1, 5-7], либо с реакциями в газовой фазе, протекающими с бесконечно большими скоростями (диффузионное горение) [8-10]. В последнем случае зону реакции (фронт пламени) в пограничном слое можно считать бесконечно тонкой по сравнению с толщиной пограничного слоя поверхностью. На этой поверхности концентрации реагентов (окислителя и горючего) обращаются в нуль, а диффузионные потоки этих реагентов находятся в стехиометрическом соотношении. Модель диффузионного горения хорошо подтверждается имеющимися опытными данными [10]. Вместе с тем нельзя исключить из рассмотрения таких режимов течения, когда скорость химической реакции (горения) соизмерима со скоростью переноса (диффузии) компонент в пограничном слое. Описание таких режимов течения было дано в известной работе Я. Б. Зельдовича [11].

1. Постановка задачи. Применительно к рассматриваемой задаче о вдувании реагирующего вещества в пограничный слой сквозь пористую стенку качественная картина изменения параметров газа в пограничном слое при диффузионном горении (штриховые кривые) и горении со скоростью, соизмеримой со скоростью диффузии (сплошные кривые; в дальнейшем этот режим горения для краткости будем называть режимом кинетического горения), имеет вид, представленный на фиг. 1. Здесь штриховкой 1 и 2 показаны соответственно зона (1) и фронт (2) реакции; u — скорость в пограничном слое, T — температура, c_A , c_R и c_P — соответственно массовые концентрации горючего, окислителя и продукта реакции. Как видно из фиг. 1, при кинетическом горении в отличие от диффузионного зона реакции имеет конечные размеры и в пределе может занимать весь пограничный слой.

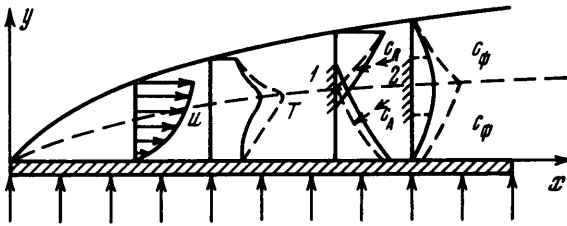
При принятых допущениях о равенстве единице чисел Прандтля, Шмидта и их турбулентных аналогов дифференциальные уравнения количества движения, энергии и диффузии осредненного стационарного движения реагирующей многокомпонентной газовой смеси в турбулентном пограничном слое на пластине имеют вид

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial y} \right] \quad (1.2)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial c_i}{\partial y} \right] + w_i \quad (1.3)$$

Здесь x, y и u, v — координаты и скорости вдоль пластины и по нормали к ней соответственно, μ, ε — коэффициенты динамической и турбу-



Фиг. 1

лентной вязкости, ρ — плотность, c_i — массовая концентрация i -й компоненты, w_i — массовая скорость образования i -й компоненты в единице объема, H — полная энтальпия газа, выражаемая равенством

$$H = T \sum_i c_i c_{pi} + \frac{u^2}{2} + \sum_i c_i h_i^\circ \quad (1.4)$$

Здесь c_{pi} — удельная теплоемкость i -й компоненты при постоянном давлении, принимаемая в дальнейшем постоянной, h_i° — энтальпия образования i -й компоненты при стандартных условиях, T — температура. Граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = v_w, \quad H = H_w, \quad c_i = c_{iw} \quad \text{при } y = 0 \\ u \rightarrow u_e, \quad H \rightarrow H_e, \quad c_i \rightarrow c_{ie} \quad \text{при } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь и далее индексами w и e обозначены параметры на стенке и внешней границе пограничного слоя.

Условия на стенке для v и c_i взаимосвязаны. При отсутствии химических реакций на стенке эти величины связаны соотношением

$$\rho_w v_w [c_{iw} - (c_{iw})_-] - \rho_w D_{iw} (\partial c_i / \partial y)_w = 0 \quad (1.6)$$

выражающим условие сохранения i -й компоненты на стенке. Здесь $(c_{iw})_-$ — концентрация i -й компоненты во вдуваемой смеси (внутри стенки), D_i — эффективный коэффициент диффузии i -й компоненты в многокомпонентной смеси. При вдуве одной компоненты $(c_{iw})_- = 1$.

Для решения поставленной задачи к системе уравнений (1.1) — (1.3) необходимо добавить уравнение состояния

$$p = \rho RT \sum_i \frac{c_i}{m_i} \quad (1.7)$$

Здесь p — давление, R — универсальная газовая постоянная, m_i — молекулярный вес i -й компоненты.

2. Связь между профилями скорости, полной энтальпии и концентраций. Из уравнений (1.1) и (1.2) и граничных условий (1.5) следует подобие профилей скорости и полной энтальпии в пограничном слое

$$\frac{u}{u_e} = \frac{H - H_w}{H_e - H_w} \quad (2.1)$$

Подставляя в (2.1) вместо полной энтальпии H ее выражение из равенства (1.4), получаем после несложных преобразований связь профиля температур с профилями скорости и концентраций

$$T = \left[H_w + (H_e - H_w)U - \sum_i c_i h_i^\circ - \frac{1}{2} u_e^2 U^2 \right] \left[\sum_i c_i c_{pi} \right]^{-1}, \quad U = u/u_e \quad (2.2)$$

Далее обратимся к уравнению диффузии (1.3). Переходя в этом уравнении от переменных x, y к переменным Крокко x, u [12], будем иметь

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\tau^2}{\mu + \varepsilon} \frac{\partial^2 c_i}{\partial u^2} + w_i, \quad \tau = (\mu + \varepsilon) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

Используя для дальнейших упрощений допущение о локальном подобии $(\partial c_i / \partial x) = 0$, получаем

$$\frac{d^2 c_i}{du^2} = - \frac{\mu + \varepsilon}{\tau^2} w_i \quad (2.4)$$

Интегрируя уравнение (2.4) дважды и определяя постоянные интегрирования из условий на стенке, найдем

$$c_{iw} = c_w + \left(\frac{dc_i}{du} \right)_w u - \int_0^u du \int_0^u \frac{\mu + \varepsilon}{\tau^2} w_i du \quad (2.5)$$

Принимая во внимание допущение о равенстве числа Шмидта единице $S_i = \mu_w / \rho_w D_{iw} = 1$ приведем граничное условие (1.6) к виду

$$(dc_i / dU)_w = B [c_{iw} - (c_{iw})_-], \quad B = \rho_w v_w u_e / \tau_w \quad (2.6)$$

Здесь B — параметр вдува.

Вводя для удобства обозначение

$$J_i(U) = u_e^2 \int_0^U dU \int_0^U \frac{\mu + \varepsilon}{\tau^2} w_i dU \quad (2.7)$$

и принимая во внимание (2.6) и (2.7), запишем (2.5) в форме

$$c_i = c_{iw} + B [c_{iw} - (c_{iw})_-] U - J_i(U) \quad (2.8)$$

Используя граничное условие $c_i = c_{ie}$ при $U = 1$, найдем из (2.8) выражение для концентрации на стенке через параметр вдува

$$c_{iw} = [c_{ie} + B(c_{iw})_- + J_i(1)][1 + B]^{-1},$$

$$J_i(1) = u_e^2 \int_0^1 dU \int_0^U \frac{\mu + \varepsilon}{\tau^2} w_i dU \quad (2.9)$$

Подставив (2.9) в (2.8), получим окончательное соотношение, связывающее профили концентраций и скоростей в пограничном слое

$$c_i = [c_{ie} + B(c_{iw})_- + J_i(1)] \frac{1 + BU}{1 + B} - (c_{iw})_- BU - J_i(U) \quad (2.10)$$

В случае замороженного течения в пограничном слое ($w_i \equiv 0$) равенство (2.10) принимает вид

$$c_i = c_{ie} \frac{1 + BU}{1 + B} + (c_{iw})_- \frac{B(1 - U)}{1 + B} \quad (2.11)$$

Переходя к определению величины $J_i(U)$, представим ее в виде

$$J_i(U) = \zeta^2 \nu_w \int_0^U dU \int_0^U (w_i / \tau) \dot{\eta} dU \quad (2.12)$$

где ν_w — коэффициент кинематической вязкости

$$\dot{\eta} = d\eta / d\varphi, \quad \eta = yv_* / \nu_w, \quad \varphi = u / v_*$$

$$v_* = (\tau_w / \rho_w)^{1/2}, \quad \zeta = u_e / v_* \quad (2.13)$$

В рамках принятой в данном исследовании двухслойной схемы турбулентного пограничного слоя необходимо определить зависимость $\eta = \eta(U)$ в вязком подслое и турбулентном ядре.

Приняв обычное допущение о линейной зависимости напряжения трения в пограничном слое от скорости

$$\tau = \tau_w (1 + BU) \quad (2.14)$$

и полагая одновременно, что вязкость в подслое постоянна и равна ее значению на стенке $\mu = \text{const} = \mu_w$, нетрудно получить из формулы Ньютона для трения $\tau = \mu (\partial u / \partial y)$ следующее выражение для η в ламинарном подслое:

$$\eta = (1 + BU)^{-1} \quad \text{при } 0 \leq U \leq U_l \quad (2.15)$$

Используя (2.14) и формулу Кармана для турбулентного трения

$$\tau = \rho \kappa^2 (\partial u / \partial y)^4 / (\partial^2 u / \partial y^2)^2 \quad (2.16)$$

можно показать, что в турбулентном ядре

$$\eta = \frac{1}{f} \exp \left[\kappa \zeta \int_{U_e}^U \left(\frac{\rho / \rho_w}{1 + BU} \right)^{1/2} dU \right] \quad \text{при } U_l \leq U \leq 1$$

$$(f = 1 / \kappa \alpha, \quad \kappa = 0.4, \quad \alpha = 12) \quad (2.17)$$

Для определения скорости на границе ламинарного подслоя можно воспользоваться гипотезой о постоянстве локального числа Рейнольдса $\rho_w v_* \delta_l / \mu_w = \alpha$ [13] (здесь δ_l — толщина ламинарного подслоя). В этом случае при принятом выше распределении напряжений трения (2.14) нетрудно получить следующее соотношение для определения скорости на границе ламинарного подслоя:

$$(1 + BU_l)^{1/2} \ln(1 + BU_l) = B(\alpha / \zeta) \quad (2.18)$$

Подставляя (2.14) в (2.7), получаем

$$J_i(U) = \frac{4\mu_w}{c_f^2 \rho_e^2 u_e^2} \int_0^U dU \int_0^U \frac{w_i}{1 + BU} \eta dU \left(c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_e u_e^2} \right) \quad (2.19)$$

Массовая скорость образования i -й компоненты w_i , являющаяся в общем случае функцией температуры, состава смеси и давления, может быть с точностью до определяемых из опыта постоянных найдена на основе формальной химической кинетики [14].

По известным распределениям концентраций (2.10) и температуры (2.2) из уравнения состояния (1.7) можно найти зависимость плотности смеси от скорости

$$\frac{\rho}{\rho_e} = \frac{T_e}{T} \frac{m}{m_e}, \quad m = \left(\sum_i \frac{c_i}{m_i} \right)^{-1} \quad (2.20)$$

3. Расчет трения. Для расчета трения можно воспользоваться методом, изложенным в работе [8]. Согласно [8] коэффициент трения c_f выражается равенством

$$\frac{c_f}{c_{f_0}} = \left(\frac{FK}{2N} \right)^2 \quad \left(F = 0.242 c_{f_0}^{-1/2}, \quad K = \int_0^1 \left(\frac{\rho/\rho_e}{1 + BU} \right)^{1/2} dU \right) \quad (3.1)$$

Здесь c_{f_0} — местный коэффициент трения на пластине, обтекаемой изотермической жидкостью. Этот коэффициент может быть вычислен по известным формулам

$$0.242/c_{f_0}^{1/2} = 0.41 + \lg(R_x c_{f_0}) \quad \text{или} \quad c_{f_0} = 0.0263 R_x^{-1/7}, \quad R_x = u_e \rho_e x / \mu_e \quad (3.2)$$

Величина N определяется из решения уравнения

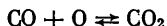
$$N + \lg N = \lg(1/2 FK) + 1/2(F + G), \quad G = \lg \frac{\mu_e}{\mu_w} \quad (3.3)$$

4. Порядок и пример расчета. Порядок расчета по предлагаемому методу, являющемуся методом последовательных приближений, сводится к следующему. Предварительно рассчитываются параметры пограничного слоя для замороженного течения. [$w_i = 0$, $J_i(U) = 0$]. Распределение концентраций в пограничном слое для этого случая определяется, в частности, по формуле (2.11). Параметр дзува B при этом, как обычно, задается. Далее по формуле (2.2) определяется распределение температуры $T(U)$, а затем по известным T и c_i и формулам (2.20) рассчитывается распределение плотности $\rho(U)$.

По известному распределению плотности определяются коэффициент трения c_f (п.3) и параметр η (2.17). Затем при температуре, полученной в первом приближении, по формулам (2.10), (2.19) рассчитывается распределение концентраций (в приведенном ниже примере для расчета концентраций при фиксированной температуре достаточным оказалось три — четыре приближения при заданной точности 10^{-3}). По полученным профилям концентраций вычислялся новый профиль температур (число итераций по температуре при указанной выше точности также не превышало трех — четырех) и т. д.

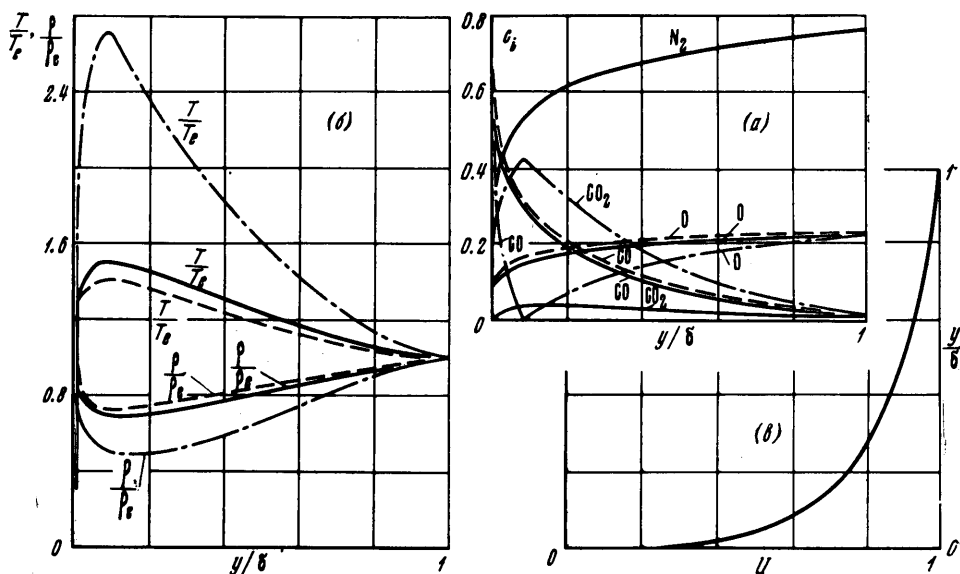
Следует заметить, что в качестве начального распределения параметров можно использовать не только распределение последних в замороженном течении, но также и их распределение, получающееся при диффузионном горении [8].

Для иллюстрации предложенного метода был проведен расчет турбулентного пограничного слоя на пластине при вдувании окиси углерода CO в поток воздуха, в котором кислород полностью диссоциирован. При этом рассматривалась только одна реакция



В этом случае смесь в пограничном слое оказывается состоящей из четырех компонент: окиси углерода CO , атомарного кислорода O , углекислого газа CO_2 и молекулярного азота N_2 .

Константы скоростей прямой и обратной реакций были заимствованы из работы [15]. Расчет был проведен для условий: $M_e = 3.91$, $u_e = 4000$ м/сек, $T_w = 700^\circ \text{K}$, $T_e = 2500^\circ \text{K}$, $B = 5$.



Фиг. 2

Результаты расчетов для замороженного течения (пунктирные кривые), течения с бесконечно большой скоростью реакции (диффузионное горение — штрих-пунктирные кривые) и течения с конечной скоростью реакции (сплошные кривые) приведены на фиг. 2.

На фиг. 2, а приведены профили концентраций, на фиг. 2, б — профили температур и плотностей, на фиг. 2, в — профили скоростей для замороженного и неравновесного течений (эти профили практически совпали). Заметим, что на фиг. 2 величина δ — толщина пограничного слоя.

Поступило 16 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорренс У. Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М., «Мир», 1966.
2. Романенко П. Н., Харченко В. Н., Семенов Ю. П. Влияние на теплообмен и трение подачи охладителей в турбулентный пограничный слой. Инж.-физ. ж., 1965, т. 9, № 6.
3. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Новосибирск, СО АН СССР, 1962.
4. Гетерогенное горение. Сб. статей, М., «Мир», 1967.
5. Denison M. R. The turbulent boundary layer on chemically active ablating surfaces. J. Aeronaut. Sci., 1961, vol. 28, No. 6. (Рус. перев.: Вопр. ракетн. техн., Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1961, № 1.)

6. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. Новосибирск, СО АН СССР, 1964.
 7. Совершенный В. Д. Многокомпонентный турбулентный пограничный слой на химически активной поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
 8. Лапин Ю. В. Трение и теплообмен в сжимаемом турбулентном пограничном слое при наличии химических реакций, обусловленных вводом инородного вещества. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 10.
 9. Spalding D. B., Auslander D. M., Sundaram T. R. The calculation of heat and mass transfer through the turbulent boundary layer on a flat plate at high Mach numbers, with and without chemical reaction. In: *Supersonic Flow, Chemical Process and Radiative Transfer*, Oxford, London, Pergam. Press, 1964, pp. 241—276.
 10. Максмен Г., Вулдридж К., Маззи Р. Основы теории горения в пограничном слое твердого горючего гибридного топлива. В сб.: «Гетерогенное горение», М., «Мир», 1967.
 11. Зельдович Я. Б. К теории горения неперемешанных газов. Ж., техн. физ., 1949, т. 19, вып. 10.
 12. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
 13. Van Driest E. R. On the aerodynamic heating of blunt bodies. *Z. angew. Math. und Physik*, 1958, vol. 9b, 5/6, p. 233—248.
 14. Алексеев Б. В. Пограничный слой с химическими реакциями. М., ВЦ АН СССР, 1967.
 15. Heicklen J. Gas — phase chemistry of Re-entry. *AIAA Journal*, 1967, vol. 5, No. 1. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1967, № 1.)
-