

ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ТУПОГО ТЕЛА В РАСХОДЯЩЕМСЯ ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. В. ЛУНЕВ, Н. Е. ХРАМОВ

(Москва)

В гиперзвуковом приближении тонкого ударного слоя при малом отношении k плотностей до и после прямой ударной волны решение [1] для окрестности критической точки гладкого тупого тела обобщается на случай неоднородного внешнего потока.

Показано, что влияние этой неоднородности может быть учтено при помощи эффективного радиуса кривизны R_* ударной волны, введение которого позволяет свести в единые зависимости данные для различных неоднородных и однородных внешних потоков с практически единственным критерием подобия k .

Результаты работы сравниваются с численными расчетами обтекания сферы сильно недорасширенной струей.

Обозначения: x, y — система криволинейных координат, соответственно направленных вдоль и по нормали к поверхности тела с началом в передней критической точке; R — радиус кривизны меридионального сечения поверхности тела; $uV_\infty, vV_\infty, \rho\rho_\infty, p\rho_\infty V_\infty^2$ — проекции скорости на ось x, y , плотность и давление, соответственно; ρ_∞ и V_∞ — плотность и скорость в набегающем потоке. Степени $\nu = 0$ и $\nu = 1$ относятся к плоским и осесимметричным течениям.

В принятой постановке плотность газа можно считать постоянной и уравнения движения имеют вид [1]

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= k \frac{\partial p}{\partial x}, & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{R} &= -k \frac{\partial p}{\partial y} & (1) \\ \frac{\partial (ux^\nu)}{\partial x} + \frac{\partial (vx^\nu)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

В окрестности оси в набегающем потоке угол наклона вектора скорости представим в виде $\theta = mx + \dots$ ($m > 0$). Тогда на ударной волне $y = \delta$, кривизну которой при $k \ll 1$ следует принять равной кривизне тела, граничные условия примут вид

$$u = x/R_*, \quad -v = k + O(kx^2/R_*^2), \quad p = (1+k)(1-x^2/R_*^2) \quad (2)$$

Здесь R_* — эффективный радиус кривизны

$$\frac{1}{R_*} = m + \frac{1}{R} \quad (3)$$

На поверхности тела имеем условие $v = 0$. Следуя [1], решение системы (1) будем искать в виде

$$-v = f_0(y) + x^2 f_2(y) + \dots, \quad p = p_0(y) - x^2 p_2(y) + \dots \quad (4)$$

Тогда из уравнения неразрывности получим $u = x f_0' / (\nu + 1)$.

Функция $f_2 \sim k$ в соответствии с условиями на ударной волне, поэтому она выпадет из второго уравнения (1), и система эта примет вид

$$f_0'^2 - (\nu + 1) f_0 f_0'' = 2k(\nu + 1)^2 p_2, \quad p_2' = -\frac{f_0'^2}{(\nu + 1)^2 k R} \quad (5)$$

при условиях

$$y = \delta, \quad f_0 = -k, \quad f_0' = \frac{\nu + 1}{R_*}, \quad p_2 = -\frac{1}{R_*^2} \quad (6)$$

$$y = 0, \quad f_0 = 0$$

Кроме того, из второго уравнения системы (1) имеем

$$p_0 = 1 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2k}f_0^2$$

Хотя правая часть первого уравнения (5) имеет порядок k , она отброшена быть не может, так как из граничного условия $f_0(0) = 0$ имеем

$$f_0' = \sqrt{2k(\nu + 1)^2 p_2} \sim k^{1/2}$$

Роль правой части первого уравнения (5) существенна лишь вблизи тела, поэтому как и в работе [2], положим здесь $p_2 = p_2(0) = \beta$.

Тогда это уравнение будет иметь решение

$$f_0 = kR_*\sqrt{2k\beta} \operatorname{sh}(y / kR_*), \quad (\nu = 0) \quad (7)$$

$$f_0 = 2\sqrt{2\beta k} y + (k - 2\delta\sqrt{2\beta k})(y / \delta)^2, \quad (\nu = 1)$$

а из условия $f_0'(\delta) = (\nu + 1) / R_*$ будем иметь

$$\frac{\delta}{kR_*} = \ln \left[\frac{1}{R_*} \left(\frac{2}{k\beta} \right)^{1/2} \right] \quad (\nu = 0), \quad \frac{\delta}{kR_*} = \frac{1}{1 + \sqrt{2\beta k} R_*} \quad (\nu = 1) \quad (8)$$

Проинтегрировав второе уравнение (5) от поверхности преграды до ударной волны, получим

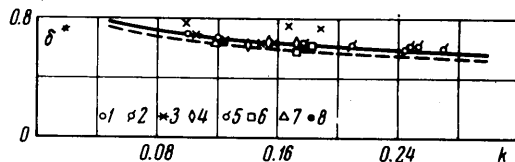
$$\beta = \frac{1}{R_*^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R_*}{R} \right) \quad (\nu = 0), \quad \beta = \frac{1}{R_*^2} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{R_*}{R} \right) \quad (\nu = 1) \quad (9)$$

Рассмотрим некоторые свойства решения (9). Строго говоря, оно зависит от величины R_* и отношения R_* / R , которое может изменяться в пределах $0 \div 1$. На фиг. 1 приведена зависимость $\delta^* = \delta / kR_*$ от k ($\nu = 1$) для крайних случаев отношения R_* / R (сплошная линия и пунктир).

Кривые близки между собой, что свидетельствует о слабой зависимости β от отношения R_* / R . Поэтому в формулах (8), (9) можно положить $\beta = R_*^{-2}$. Тогда

$$\frac{\delta}{kR_*} = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{k}, \quad \nu = 0$$

$$\frac{\delta}{kR_*} = \frac{1}{1 + \sqrt{2k}} \quad (\nu = 1) \quad (10)$$



Фиг. 1

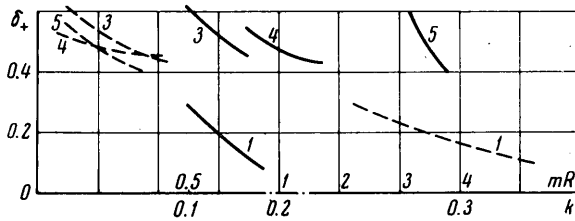
Отсюда следует, что толщина ударного слоя, а следовательно, и профили в нем зависят лишь от параметра k и эффективного радиуса R_* .

В подтверждение этого на фиг. 1 приведены результаты расчета на ЭВМ натекания осесимметричной сильно недорасширенной конической струи с радиусом среза сопла r_a и углом полураствора 10° на сферу, расположенную на расстоянии h от среза сопла [3].

В табл. приведены значения исходных параметров для указанных на фиг. 1 точек.

Точки 7, 8 получены при расчете взаимодействия сильно недорасширенной струи с плоской стенкой [4]. Газ в струях совершенный с показателем адиабаты γ . Крестики соответствуют результатам расчета обтекания сферы равномерным потоком [5].

Все данные образуют практически единую кривую, хорошо совпадающую с теоретической. Для сравнения на фиг. 2 некоторые из приведенных



Фиг. 2

результатов показаны в виде исходных зависимостей $\delta_+ = \delta / kR$ от параметра k (сплошные линии) и параметра mR (пунктир).

Цифры соответствуют номерам струй в таблице.

Несмотря на то что наш анализ носит локальный характер, величина R_* является характерным размером и для распределения давления практически во всей дозвуковой области.

На фиг. 3 показано распределение давления по преграде в зависимости от отношения x/R для различных струй и различных относительных расстояний $\lambda = h/r_a = 10, 20, 40$. Как видно, кривые существенно различаются между собой.

Построенные в зависимости от отношения x/R_* те же кривые образуют достаточно узкий пучок (фиг. 4), близкий к соответствующей кривой для сферы в однородном потоке (штрих-пунктир) и ньютоновской кривой (пунктир), которая получена по формуле

$$p / p_0' = \cos^2(\omega + \theta), \quad (\omega - \text{центральный угол}) \tag{11}$$

В заключение заметим, что аналогичным методом можно учесть влияние неравномерности плотности и скорости в набегающем потоке, которые выше для простоты были приняты постоянными. Пусть, например, распределение плотности в набегающем потоке перед критической точкой тела (или перед ударной волной) имеет вид

$$\rho_\infty = \rho_{\infty 0} (1 - cX - x^2 \rho_{2\infty}) \tag{12}$$

Здесь X — координата вдоль оси симметрии с началом в передней точке тела. Вдоль поверхности тела $X \approx 1/2 x^2 R$. Тогда граничное условие для давления на скачке примет вид

$$p \approx (1 - x^2 / R_{1*}^2) [1 - x^2 (1/2c / R + \rho_{2\infty})] \approx 1 - x^2 (1 / R_{1*}^2 + 1/2c + \rho_{2\infty})$$

$$\frac{1}{R_{1*}} = m + \frac{1}{R_1}, \quad (R_1 - \text{радиус кривизны ударной волны})$$

или

$$p_2(\delta) = 1 + (1/2c + \rho_{2\infty}) R_{1*}^2 \tag{13}$$

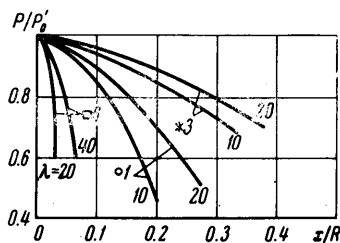
№ п/п	M_a	γ	r_a/R	h/r_a
1	3.3	1.2	0.05	10, 20
2	3.3	1.4	0.5	4, 6, 20
3	3.3	1.2	0.5	4, 10, 20
4	3.3	1.3	0.5	4, 6, 20
5	3.3	1.67	0.5	6, 10, 20
6	4.38	1.4	0.005	11, 40
7	3	1.25		50
8	4	1.4		50

Эта поправка при не очень больших градиентах плотности не должна существенно отражаться на профиле скорости и толщине ударного слоя, но изменит коэффициент β . В частности, формула Ньютона в более точном виде должна записываться так:

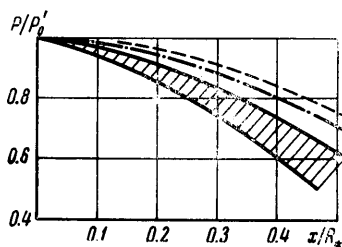
$$p / p_0' = q \cos^2 x / R_* \quad (14)$$

где q — отношение скоростных напаров $\rho_\infty V^2$ в данной точке перед телом и на оси.

В рассмотренных на фиг. 1—4 случаях $q < 1$, чем, по-видимому, и объясняется более высокое давление на сфере в однородном потоке и по формуле Ньютона при $q = 1$, показанные на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Это обстоятельство, однако, носит второстепенный характер по сравнению с влиянием расхождения потока, которое учитывается введением эффективного радиуса кривизны, в чем легко убедиться сравнением кривых на фиг. 3 и 4.

Поступило 25 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли Тинг-и, Гейгер Р. Критическая точка тупоносного тела в гиперзвуковом потоке. *Механика*, 1957, № 5.
2. Лунев В. В., Мурзинов И. Н. Влияние излучения на течение в окрестности критической точки тупого тела. *ПМТФ*, 1961, № 2.
3. Храмов Н. Е. Расчет взаимодействия осесимметричной сверхзвуковой недорасширенной струи с преградой. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1966, № 5.
4. Лебедев М. Г., Савинов К. Г. Удар неравномерных сверхзвуковых потоков газа в плоскую преграду. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1969, № 3.
5. Лунев В. В., Магомедов К. М., Павлов В. Г. Гиперзвуковое обтекание при тупленных конусах с учетом равновесных физико-химических превращений. *М. ВЦ АН СССР*, 1968.