НЕКОТОРЫЕ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. И. КОРОБКО, С. В. ФАЛЬКОВИЧ

(*Саратов*)

Рассмотрены неавтомодельные задачи о развитии затопленной плоской струи в безграничном пространстве и о развитии плоской затопленной струи вдоль твердой стенки. Установлен вид асимптотического разложения функции тока и найдены в конечном виде второй и третий члены этого разложения, выражающиеся через автомодельные решения Г. Шлихтинга и Н. И. Акатнова и показатель автомодельности.

Показано, что в случае неавтомодельной задачи о развитии осесимметричной радиально-щелевой струи в безграничном пространстве поправка в неавтомодельном члене значительно мала по сравнению с автомодельным решением Л. Г. Лойцянского.

Плоские и осесимметричные струйные течения широко используются в различных областях техники. Эти течения формируются источниками конечных размеров и по существу являются неавтомодельными.

Существующие автомодельные решения плоских задач Г. Шлихтинга [1] о развитии затопленной струи в безграничном пространстве и Н. И. Акатнова [2] о развитии затопленной струи вдоль твердой стенки справедливы лишь на достаточно больших расстояниях от источника. Эти решения не учитывают начального распределения скоростей.

Ниже установлен вид асимптотического разложения функции тока в упомянутых неавтомодельных плоских задачах и найдены в конечном виде второй и третий члены этого асимптотического разложения, выражающиеся через автомодельное решение и показатель автомодельности β, характерный для каждой задачи.

Показано, что в случае неавтомодельной задачи о развитии осесимметричной радиально-щелевой струи в пространстве, затопленном той же жидкостью, в асимптотическом разложении функции тока поправка в неавтомодельном члене значительно мала по сравнению с автомодельным решением Л. Г. Лойцянского [3], что дает возможность считать решение [3] практически общим решением задачи в рамках теории пограничного слоя.

1. Основные уравнения плоского ламинарного пограничного слоя. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоском ламинарном пограничном слое при постоянном давлении во внешнем потоке имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

Здесь x и u — продольные координата и составляющая скорости, y, v — поперечные координата и составляющая скорости, ν — кинематический коэффициент вязкости. Чтобы удовлетворить уравнению неразрывности, вводят функцию тока ψ

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.2}$$

При этом уравнения движения (1.1) сводятся к уравнению третьего порядка

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{1.3}$$

В случае задач о развитии струй в затопленном пространстве тремя граничными условиями для этого уравнения являются

$$\psi = 0,\ \partial^2\psi / \partial y^2 = 0 \quad \text{при } y = 0 \qquad (1.4)$$
$$\partial\psi / \partial y \to 0 \quad \text{при } y \to \infty$$

Автомодельные решения задач о развитии свободных и полуограниченных струй в безграничном пространстве, затопленном жидкостью той же плоскости, получаются как результат разделения переменных в уравнении (1.3) с граничными условиями (1.4) и соответствующими для каждой задачи интегральными соотношениями. Переменными автомодельности в указанных задачах являются

$$\xi = x, \quad \zeta = (x\nu)^\beta y \qquad (1.5)$$

Значения показателя степени β равны: для свободной струи $\beta = -2/3$, для полуограниченной струи $\beta = -3/4$. Уравнение (1.3) в переменных $\xi = x$, ζ (1.5) имеет вид

$$\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)^2 + x\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial\zeta} - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} = \nu^{\beta+1}x^{\beta+1}\frac{\partial^3\psi}{\partial\zeta^3} \qquad (1.6)$$

Рассматриваем неавтомодельную задачу, т. е. считаем, что струя истекает не из точечного источника, а из щели конечного размера. Строим функцию тока ψ в виде ряда

$$\psi(x, \zeta) = \nu^{\beta+1}[x^{\beta+1}f_0(\zeta) + x^\lambda f_1(\zeta) + x^{\lambda_1}f_2(\zeta) + \ldots] \qquad (1.7)$$

Первый член этого ряда является автомодельным решением рассматриваемой задачи, а λ, λ_1 — неизвестные показатели степеней.

Подставляя (1.7) в уравнение (1.6), будем иметь равенство

$$\begin{aligned} & x^{2\beta+2}[f_0''' + (\beta+1)f_0f'' - (2\beta+1)f_0'^2] + x^{\beta+\lambda+1}[f_1''' + (\beta+1)f_0f_1'' - \\ & -(3\beta+1+\lambda)f_0'f_1' + \lambda f_0''f_1] + x^{\beta+\lambda_1+1}[f_2''' + (\beta+1)f_0f_2'' - \\ & -(3\beta+1+\lambda_1)f_0'f_2' + \lambda_1 f_0''f_2] + x^{2\lambda}[\lambda f_1f_1'' - (\beta-\lambda)f_1'^2] + \\ & + x^{2\lambda_1}[\lambda_1f_2f_2'' - (\beta+\lambda_1)f_2'^2] + x^{\lambda_1+\lambda}[\lambda f_1f_2'' + \lambda_1f_2f_1'' - \\ & -(2\beta+\lambda+\lambda_1)f_1'f_2'] + \ldots = 0 \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ζ.

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы коэффициенты при x обращались в нуль, а это возможно лишь при условиях для показателей степеней

$$\lambda_1 = 2\lambda - (\beta+1), \ldots \qquad (1.9)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, с учетом (1.9) будем иметь уравнения для определения неизвестных функций $f_0(\zeta)$, $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$

$$\begin{aligned} & f_0''' + (\beta+1)f_0f_0'' - (2\beta+1)f_0'^2 = 0 \\ & f_1''' + (\beta+1)f_0f_1'' - (3\beta+1+\lambda)f_0'f_1' + \lambda f_0''f_1 = 0 \\ & f_2''' + (\beta+1)f_0f_2'' - (3\beta+1+\lambda_1)f_0'f_2' + \lambda_1f_0''f_2 = -\lambda f_1f_1'' + (\beta+\lambda)f_1'^2 \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (1.10). Заметим, что частным интегралом этого уравнения является

$$f_1 = f_0' \qquad (1.11)$$

Понизим порядок второго уравнения системы (1.10), воспользовавшись заменой переменных

$$f_1 = f_0'\int\frac{y}{f_0'}d\zeta \qquad (1.12)$$

В результате подстановки (1.12) во второе уравнение (1.10) имеем

$$y''+\left[(\beta+1)f_0+\frac{f_0''}{f_0'}\right]y'+\left[2\frac{f_0'''}{f_0'}-\frac{f_0''^2}{f_0'^2}+\right.$$

$$\left.+(\beta+1)\frac{f_0f_0''}{f_0'}-(3\beta+1+\lambda)f_0'\right]y=0 \qquad (1.13)$$

Учитывая первое уравнение системы (1.10), полученное уравнение (1.13) можно записать в виде

$$y''+\left[(\beta+1)f_0+\frac{f_0''}{f_0'}\right]y'+\left[(\beta+1-\lambda)f_0'-(\beta+1)\frac{f_0f_0''}{f_0'}-\frac{f_0''^2}{f_0'^2}\right]y=0 \qquad (1.14)$$

Граничные условия (1.4) согласно (1.7) примут следующий вид

$$\begin{aligned} f_0(0) &= f_1(0) = f_2(0) = \ldots = 0 \\ f_0'(\infty) &= f_1'(\infty) = f_2'(\infty) = \ldots = 0 \\ f_0''(0) &= f_1''(0) = f_2''(0) = \ldots = 0 \end{aligned} \qquad (1.15)$$

Перейдем к решению системы дифференциальных уравнений (1.10) с граничными условиями (1.15) и определим значения параметра λ в случаях развития свободной и полуограниченной струй.

2. Распространение затопленной струи в безграничном пространстве. В случае развития свободной струи задача сводится к решению системы уравнений (1.10) при $\beta=-^2/_3$ с граничными условиями (1.15) и интегральным соотношением, выражающим закон сохранения количества движения

$$K_0=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho u^2\,dy=\mathrm{const} \qquad (2.1)$$

Постановка задачи и автомодельное решение (решение первого уравнения системы (1.10)) принадлежит Г. Шлихтингу [1].

Это решение имеет вид

$$f_0=6\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\zeta \qquad (2.2)$$

Здесь α — постоянная интегрирования, выражающаяся через количество движения K_0 согласно (2.1) с учетом (1.7) и (1.2).

Неавтомодельность задачи состоит в замене точечного источника щелью конечной ширины и учете начального профиля распределения скорости, т. е. задача сводится к построению разложения функции тока ψ (1.7). Уравнения для определения неизвестных функций $f_1, f_2, \ldots$ в разложении (1.7) в этом случае согласно (1.10) имеют вид

$$3f_1'''+f_0f_1''-3(\lambda-1)f_0'f_1'+3\lambda f_0''f_1=0 \qquad (2.3)$$

$$3f_2'''+f_0f_2''-3(\lambda_1-1)f_0'f_2'+3\lambda_1f_0''f_2=-3\lambda f_1f_1''+3(\lambda-2)f_1'^2 \qquad (2.4)$$

Рассмотрим уравнение (2.3). Определим λ, при котором уравнение (2.3) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.15) и интегральному соотношению. Воспользовавшись заменой (1.12) в уравнении (2.3), приходим к уравнению второго порядка согласно (1.14)

$$y''+\left[\frac{1}{3}f_0+\frac{f_0''}{f_0'}\right]y'+\left[\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)f_0'-\frac{1}{3}\frac{f_0f_0''}{f_0'}-\frac{f_0''^2}{f_0'^2}\right]y=0 \qquad (2.5)$$

Вводим новую независимую переменную

$$z=\mathrm{th}\,\alpha\zeta \qquad (2.6)$$

Выражения функций f_0, f_0', f_0'' в новой переменной согласно (2.2) и (2.6) имеют вид

$$f_0 = 6\alpha z, \qquad f_0' = 6\alpha^2(1-z^2), \qquad f_0'' = -12\alpha^3 z(1-z^2) \tag{2.7}$$

Уравнение (2.5) в новой переменной z с учетом (2.7) будет

$$(1-z^2)y'' - 2zy' + 2(1-3\lambda)y = 0 \tag{2.8}$$

Это уравнение Лежандра, собственные числа которого определяются по формуле

$$\lambda = {}^1/_3 - {}^1/_6 n(n+1) \qquad (n \text{ — целое число}) \tag{2.9}$$

Первым собственным значением λ согласно (2.9), при котором функция f_1 удовлетворяет граничным условиям, будет $\lambda = -{}^2/_3$ $(n = 2)$ и функция f_1 согласно условию ограниченности

$$\partial f_1 / \partial z \qquad \text{при } z \to 1$$

и в силу условий (1.15) примет вид

$$f_1 = c(1-z^2)\int_0^z \frac{P_2(z)}{(1-z^2)^2}\,dz \tag{2.10}$$

$P_2(z)$ — полином Лежандра

$$P_2(z) = {}^1/_2(3z^2 - 1) \tag{2.11}$$

После подстановки $P_2(z)$ согласно (2.11) в (2.10) и вычисления интеграла будет

$$f_1 = \frac{c}{2}\left[z - (1-z^2)\ln\frac{1+z}{1-z}\right] \tag{2.12}$$

Возвращаясь к переменной ζ согласно (2.6) в выражении (2.12) имеем единственный частный интеграл уравнения (2.3), удовлетворяющий граничным условиям (1.15)

$$f_1(\zeta) = \gamma(f_0 - 2f_0'\zeta) \tag{2.13}$$

Здесь $\gamma = {}^1/_2\, c$ — постоянная интегрирования.

Составим интегральные соотношения для функций $f_0, f_1, f_2, \ldots$ Для этого подставим в выражение (2.1) разложение (1.7) с учетом (1.2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0'\,d\zeta = \frac{K_0}{\rho}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_0' f_1'\,d\zeta = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1'^2 + 2f_0' f_2')\,d\zeta = 0, \ldots \tag{2.14}$$

Первое интегральное соотношение (2.14) согласно (2.2) дает связь постоянной интегрирования α с количеством движения K_0

$$\alpha = ({}^1/_{52} K_0 / \rho)^{1/3} \tag{2.15}$$

Легко видеть, что второе интегральное соотношение (2.14) с учетом (2.2) и (2.13) выполнимо при любом значении постоянной интегрирования γ.

Следовательно, γ является произвольной постоянной задачи, проходящей через граничные условия (1.15) и интегральное соотношение (2.14) и зависящей от распределения скоростей на выходе из щели.

Обратимся к уравнению (2.4). Это уравнение при $\lambda = -{}^2/_3$ и $\lambda_1 = -{}^5/_3$ согласно (1.9) примет вид

$$3f_2''' + f_0 f_2'' + 8f_0' f_2' - 5f_0'' f_2 = 2f_1 f_1'' - 4f_1'^2 \tag{2.16}$$

Подставляя в правую часть выражения f_1, f_1', f_1'', согласно (2.13) имеем

$$3f_2''' + f_0 f_2'' + 8f_0' f_2' - 5f_0'' f_2 = \gamma^2[(8f_0' f_0''' - 16f_0''^2)\zeta^2 - \\ - (4f_0' f_0'' + 4f_0 f_0''')\zeta - 6f_0 f_0'' - 4f_0'^2] \qquad (2.17)$$

Соответствующее уравнению (2.17) однородное уравнение заменой (1.12) можно свести к виду (2.8), но хотя λ_1 и входит в число собственных значений лежандрова уравнения ($n = 3$ в формуле (2.9)), полученное решение не будет ограниченным в интервале $-1 \leqslant z \leqslant 1$ в силу граничных условий (1.15) с учетом (2.6). Следовательно, единственным ограниченным решением однородного уравнения будет тривиальное решение $f_2 \equiv 0$. Таким образом, решение полного уравнения (2.17) сводится к нахождению его частного решения. Частным решением полного уравнения (2.17), удовлетворяющего граничным условиям (1.15), будет, как легко убедиться, выражение

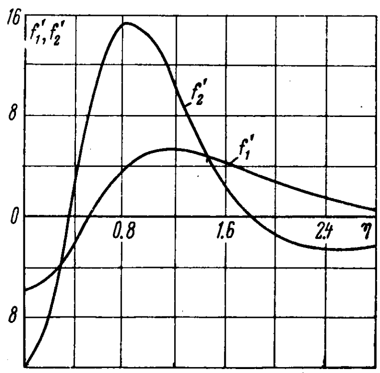
$$f_2 = \gamma^2(2f_0''\zeta^2 + 3f_0'\zeta - f_0) \qquad (2.18)$$

Третье интегральное соотношение (2.14) согласно (2.13) и (2.18) сводится к интегралу

$$\gamma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [4(f_0' f_0''\zeta^2)' + 5(f_0'^2\zeta)'] d\zeta \equiv 0$$

который тождествен нулю согласно граничным условиям (1.15).

Изменение функций $f_1'(\zeta)$ и $f_2'(\zeta)$ представлено на фиг. 1.



Фиг. 1

Таким образом, имеем неавтомодельное решение задачи о развитии свободной струи в безграничном пространстве в виде трех приближений в разложениях функции тока ψ (1.7), скоростей u и v (1.2), выраженные через автомодельное решение $f_0(\zeta)$ (2.2)

$$\psi = \nu^{1/3}\left[f_0 x^{1/3} + \gamma(f_0 - 2f_0'\zeta)\frac{1}{x^{2/3}} + \gamma^2(2f_0''\zeta^2 + 3f_0'\zeta - f_0)\frac{1}{x^{5/3}}\right]$$

$$u = \frac{1}{\nu^{1/3}}\left[f_0'\frac{1}{x^{1/3}} + \gamma(-2f_0''\zeta - f_0')\frac{1}{x^{4/3}} + \gamma^2(2f_0'''\zeta^2 + 7f_0''\zeta + 2f_0')\frac{1}{x^{7/3}}\right] \qquad (2.19)$$

$$v = \nu^{1/3}\left[\frac{1}{3}(2f_0'\zeta - f_0)\frac{1}{x^{2/3}} - \frac{2}{3}\gamma(2f_0''\zeta^2 - 3f_0'\zeta - f_0)\frac{1}{x^{5/3}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3}\gamma^2(4f_0'''\zeta^3 + 24f_0''\zeta^2 + 19f_0'\zeta - 5f_0)\frac{1}{x^{8/3}}\right]$$

Здесь γ — произвольная постоянная, зависящая от начального профиля скоростей на выходе из щели.

3. Распространение затопленной струи вдоль твердой плоской поверхности. В случае развития струи вдоль твердой плоской поверхности задача сводится к решению системы уравнений (1.10) при $\beta = -3/4$ с граничными условиями (1.15) и интегральным соотношением

$$\int\limits_0^{\infty} u^2\psi\, dy = E = \text{const} \qquad (3.1)$$

Постановка задачи и автомодельное решение (решение первого уравнения системы (1.10)) принадлежит Н. И. Акатнову [2].

Решение Н. И. Акатнова можно представить в параметрической форме следующим образом:

$$f_0 = z^2, \qquad f_0' = {}^1/_6 z(1 - z^3) \tag{3.2}$$

$$\zeta = 12\alpha \int_0^z \frac{dz}{1 - z^3} = 2\alpha\left[\ln\frac{1 + z + z^2}{(1 - z)^2} + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{z\sqrt{3}}{z + 2}\right]$$

Здесь α — постоянная интегрирования, выражающаяся через интегральное соотношение (3.1).

Составим интегральные соотношения для функций f_0, f_1, f_2, входящих в разложение функции тока ψ (1.7). Подставляем выражение ψ согласно (1.7) и u согласно (1.2) в интегральное соотношение (3.1), и переходим к переменным автомодельности (x, ζ) согласно (1.5). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x имеем

$$\int_0^\infty f_0'^2 f_0\, d\eta = E, \qquad \int_0^\infty (f_0'^2 f_1 + 2f_0 f_0' f_1')\, d\zeta = 0,$$
$$\int_0^\infty [f_0'^2 f_2 + 2f_0' f_1 f_1' + f_0(f_1'^2 + 2f_0' f_2')]\, d\zeta = 0 \tag{3.3}$$

Аналогично случаю развития свободной струи задача сводится к построению разложения функции тока ψ (1.7). Уравнения для определения неизвестных функций f_1, f_2, ... в разложении (1.7) в этом случае согласно (1.10) имеют вид

$$4f_1''' + f_0 f_1'' - (4\lambda - 5) f_0' f_1' + 4\lambda f_0'' f_1 = 0 \tag{3.4}$$

$$4f_2''' + f_0 f_2'' - (4\lambda_1 - 5) f_0' f_2' + 4\lambda_1 f_0'' f_2 = -4\lambda f_1 f_1'' + (4\lambda - 3) f_1'^2 \tag{3.5}$$

Постоянная интегрирования α, входящая в автомодельное решение (3.2), может быть определена из первого интегрального соотношения (3.3) после подстановки в него выражений f_0 и f_0' согласно (3.3) и вычисления интеграла

$$\alpha = 28E$$

Рассмотрим уравнение (3.4). Определим λ, при котором уравнение (3.4) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.15) и второму интегральному соотношению (3.3). Воспользовавшись заменой (1.12) в уравнении (3.4), приходим к уравнению второго порядка

$$y'' + \left[\frac{1}{4} f_0 + \frac{f_0''}{f_0'}\right] y' + \left[\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) f_0' - \frac{1}{4}\frac{g_0 f_0''}{f_0'} - \frac{f_0''^2}{f_0'^2}\right] y = 0 \tag{3.6}$$

которое в переменной z согласно (3.2) имеет вид

$$z^2(1 - z^3) y'' + z(1 - 4z^3) y' + [-1 + (10 - 24\lambda) z^3] y = 0 \tag{3.7}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по z. Вводя новую функцию

$$W = z y(z) \tag{3.8}$$

и подставляя W в (3.7), получаем уравнение

$$z(1 - z^3) W'' + (-1 + 2z^3) W' + (12 - 24\lambda) z^2 W = 0 \tag{3.9}$$

которое заменой переменной

$$t = z^3 \tag{3.10}$$

сводится к гипергеометрическому уравнению

$$t(1-t)\frac{d^2W}{dt^2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}t\right)\frac{dW}{dt} + \frac{4-8\lambda}{3}W = 0 \tag{3.11}$$

Решение гипергеометрического уравнения (3.11) выражается через гипергеометрические функции [4]

$$W = c_1F\left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \frac{1}{3}, t\right) + \\ + c_2t^{2/3}F\left(\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \frac{5}{3}, t\right) \tag{3.12}$$

Здесь c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Вспомним, что $\partial f_0 / \partial \zeta$ будет частным интегралом уравнения (3.4) согласно (1.11), и, пользуясь связью f_1 и y (1.12), а также выражением y согласно (3.12), (3.10) и (3.8), получаем общее решение уравнения (3.4) в переменной z

$$f_1 = z(1-z^3)\int_0^z \frac{12}{z^2(1-z^3)^2}\left[c_1F\left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \frac{1}{6} - \right.\right. \\ \left. - \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \frac{1}{3}, z^3\right) + c_2z^2F\left(\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \frac{5}{6} - \right. \\ \left.\left. - \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \frac{5}{3}, z^3\right)\right] dz + c_3z(1-z^3) \tag{3.13}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования.

Граничным условиям (1.15) удовлетворяет только лишь частный интеграл

$$f_1 = 12c_2z(1-z^3)\int_0^z \frac{1}{(1-z^3)^2}F\left(\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \right. \\ \left. \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{49-96\lambda}}{6}, \frac{5}{3}, z^3\right) dz \tag{3.14}$$

Заметим, что в случае выполнения равенства

$$5/6 + 1/6\sqrt{49-96\lambda} = -n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.15}$$

гипергеометрическая функция может быть выражена через полином [4].

Таким образом, выражение f_1 (3.14) является решением нашей задачи с числом собственных значений λ согласно (3.15), удовлетворяющих равенствам

$$\lambda = 1/96[49 - (5+6n)^2] \quad (n \text{ — целое число}) \tag{3.16}$$

Первым собственным значением λ согласно (3.16), при котором функция f_1 удовлетворяет граничным условиям (1.15), является

$$\lambda = -3/4 \quad (n = 1)$$

и функция f_1 согласно (3.14) имеет вид

$$f_1(z) = 12c_2 z(1-z^3)\int\limits_0^z \frac{F(-1, {}^8/_3, {}^5/_3, z^3)}{(1-z^3)^2}dz \tag{3.17}$$

Заметим, что

$$F(-1, {}^8/_3, {}^5/_3, z^3) = 1 - {}^8/_5 z^3$$

Пользуясь этим, выражение $f_1(z)$ (3.17) приводим к виду

$$f_1(z) = \frac{12}{5}c_2\left[-z^2 + 6z(1-z^3)\int\limits_0^z \frac{dz}{1-z^3}\right] \tag{3.18}$$

Выражение (3.18) в переменной ζ согласно (3.2) запишем в виде

$$f_1(\zeta) = \gamma(-f_0 + 3f_0'\zeta) \tag{3.19}$$

Здесь $\gamma = {}^{12}/_5 c_2$ — постоянная интегрирования.

Легко видеть, что второе интегральное соотношение (3.3) с учетом (3.2), (3.19) и граничных условий (1.15) выполнимо тождественно при любом значении постоянной интегрирования γ. Следовательно, γ является характерной постоянной, зависящей от начального распределения скоростей на выходе из щели.

Рассмотрим уравнение (3.5). Это уравнение при $\lambda = -{}^3/_4$ и $\lambda_1 = -{}^7/_4$ согласно (1.9) примет вид

$$4f_2''' + f_0 f_2'' + 12f_0'f_2' - 7f_0''f_2 = 3f_1 f_1'' - 6f_1'^2 \tag{3.20}$$

Подставляя выражения f_1, f_1', f_1'' согласно (3.19) в это уравнение, после приведения подобных членов относительно ζ имеем

$$\begin{aligned} 4f_2''' + f_0 f_2'' + 12f_0'f_2' - 7f_0''f_2 &= (27f_0'f_0''' - 54f_0''^2)\zeta^2 + \\ &+ (-9f_0 f_0''' - 27f_0'f_0'')\zeta - 15f_0 f_0'' - 24f_0'^2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

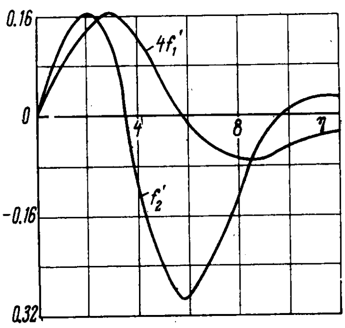
Соответствующее этому уравнению однородное уравнение заменой (1.12) можно свести к уравнению второго порядка вида (3.7) с $\lambda_1 = -{}^7/_4$, которое не имеет ограниченных решений в интервале $0 \leqslant z \leqslant 1$, так как $\lambda_1 = -{}^7/_4$ не входит в число собственных значений, определяемых выражением (3.16). Следовательно, единственным ограниченным решением однородного уравнения будет тривиальное решение $f_2 \equiv 0$, и решение полного уравнения (3.21) тем самым сводится к нахождению его частного решения. Частным решением полного уравнения (3.21), удовлетворяющего граничным условиям (1.15), как легко убедиться, будет выражение

$$f_2 = \gamma^2(3f_0''\zeta^2 + 5f_0'\zeta - f_0) \tag{3.22}$$

Третье интегральное соотношение (3.3) согласно (3.19) и (3.22) сводится, в чем нетрудно убедиться, к интегралу

$$\gamma^2\int\limits_0^\infty \left[9(f_0 f_0' f_0''\zeta^2)' - \frac{3}{2}(f_0'^3\zeta^2)' + \frac{21}{2}(f_0 f_0'^2\zeta)'\right]d\zeta \equiv 0$$

который тождественно равен нулю согласно граничным условиям (1.15).



Фиг. 2

Изменение функций $f_1'(\zeta)$, $f_2'(\zeta)$ представлено на фиг. 2. Окончательно запишем неавтомодельное решение задачи о развитии затопленной струи вдоль твердой плоской поверхности в виде трех приближений в разложениях функции тока ψ (1.7) и скорости u, v, выраженные через автомодельное решение $f_0(\zeta)$ (3.2)

$$\psi = \nu^{1/4}\left[f_0x^{1/4} + \gamma(3f_0'\zeta - f_0)\frac{1}{x^{3/4}} + \nu^2(3f_0''\zeta^2 + 5f_0'\zeta - f_0)\frac{1}{x^{7/4}}\right]$$

$$u = \frac{1}{\nu^{1/4}}\left[f_0'\frac{1}{x^{1/4}} + \gamma(3f_0''\zeta + 2f_0')\frac{1}{x^{5/4}} + \gamma^2(3f_0'''\zeta^2 + 11f_0''\zeta + 4f_0')\frac{1}{x^{9/4}}\right]$$

$$v = \nu^{1/4}\left[\frac{1}{4}(3f_0'\zeta - f_0)\frac{1}{x^{3/4}} + \frac{3}{4}\gamma(3f_0''\zeta^2 + 5f_0'\zeta - f_0)\frac{1}{x^{7/4}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\gamma^2(9f_0'''\zeta^3 + 54f_0''\zeta^2 + 47f_0'\zeta - 7f_0)\frac{1}{x^{11/4}}\right] \qquad (3.23)$$

Здесь γ — постоянная, зависящая от начального профиля скоростей на выходе из щели.

4. Замечания об решениях неавтомодельных задач о плоских струйных течениях. Анализ рассмотренных примеров позволяет сделать общие для этих случаев выводы.

Численное значение параметра β для рассмотренных задач установлено достаточно строго (см. [1] и [2]), строго также установлен автомодельный член в разложении функции тока ψ (1.7).

Обращаясь к выражению (1.9) и рассмотренным задачам, заключаем, что

$$\lambda = \beta, \qquad \lambda_1 = \beta - 1, \ldots \qquad (4.1)$$

Следовательно, разложение функции тока ψ (1.7) в рассмотренных случаях с учетом (4.1) имеет вид

$$\psi(x, \zeta) = \nu^{\beta+1}(f_0x^{\beta+1} + f_1x^{\beta} + f_2x^{\beta-1} + \ldots) \qquad (4.2)$$

Полученные выражения функции $f_1(\zeta)$ в случаях развития свободной струи (2.13) и струи вдоль твердой плоскости (3.19) позволяют записать общее решение второго уравнения (1.10) для обеих задач, выраженное через автомодельное решение $f_0(\zeta)$ и показать «автомодельности» β, которое отвечает граничным условиям (1.15) и интегральным соотношениям

$$f_1(\zeta) = \gamma(-1)^{1/(\beta+1)}\frac{1}{\beta+1}\left[-\beta\frac{\partial(f_0\zeta)}{\partial\zeta} - f_0\right] \qquad (4.3)$$

Здесь γ — характеристическая постоянная, зависящая от начального профиля распределения скоростей на выходе из щели.

Аналогично, сравнение выражений $f_2(\zeta)$ в случаях развития свободной струи (2.18) и струи вдоль твердой плоскости (3.22) дает возможность записать решение третьего уравнения (1.10)

$$f_2(\zeta) = -3\gamma(-1)^{1/(\beta+1)}(1 + 2\beta)\frac{\partial(f_1\zeta)}{\partial\zeta} \qquad (4.4)$$

а $f_1(\zeta)$ выражается через автомодельное решение $f_0(\zeta)$ согласно (4.3).

5. Замечания о решениях неавтомодельных задач об осесимметричных струйных течениях. В случае неавтомодельной задачи о развитии осесимметричной струи в безграничном пространстве, заполненном той же жидкостью для функции тока $\psi(x, \zeta)$ Л. Г. Лойцянским [5] установлено разложение, которое можно записать в виде, аналогичном (4.2)

$$\psi(x, \zeta) = \nu^{\beta+2}(f_0x^{\beta+2} + f_1x^{\beta+1} + f_2x^{\beta} + f_3x^{\beta-1} + \ldots) \qquad (5.1)$$

Здесь

$$\beta = -1, \qquad \zeta = y / x\nu$$

Л. Г. Лойцянским [5] найдены выражения для $f_0(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$. В работе [6] найдены следующие неавтомодельные члены: $f_2(\zeta)$ и $f_3(\zeta)$. Следовало бы ожидать, что аналогичное (5.1) разложение для функции тока $\psi(x, \zeta)$ должно иметь место и в случае задачи о развитии радиально-щелевой струи в затопленном пространстве, постановка и автомодельное решение которой принадлежат также Л. Г. Лойцянскому [3]. Но радиально-щелевая струя обладает свойством «сильной» симметрии, т. е. кроме осевой симметрии обладает симметрией относительно плоскости, перпендикулярной к оси симметрии, а это накладывает свой отпечаток на разложение (5.1).

Установим первый неавтомодельный член в задаче о развитии радиально-щелевой струи в безграничном пространстве.

6. Развитие радиально-щелевой струи в пространстве, заполненном той же жидкостью. Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости в осесимметричном пограничном слое, для струи, истекающей из круговой щели в пространство, заполненное той же жидкостью в цилиндрической системе координат при постоянном давлении во внешнем потоке, имеет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial(xu)}{\partial x} + \frac{\partial(xv)}{\partial y} = 0 \tag{6.1}$$

Здесь y и v — продольные координата (направления по оси симметрии струи) и скорость, x и u — расстояние от оси струи и радиальная составляющая скорости, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Из последнего уравнения системы (6.1) следует, что осевую и радиальную составляющие вектора скорости можно выразить через функцию тока $\psi(x, y)$, полагая

$$u = \frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{6.2}$$

При этом уравнение движения (6.1) сведется к уравнению третьего порядка

$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + x\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu x^2\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{6.3}$$

Граничными условиями для этого уравнения в рассматриваемом случае являются

$$\begin{gathered}\psi = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \\ \partial\psi / \partial y = 0 \quad \text{при } y \to \pm\infty\end{gathered} \tag{6.4}$$

а интегральное соотношение имеет вид

$$\frac{2\pi\rho}{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 dy = K_0 = \text{const} \tag{6.5}$$

где K_0 — постоянная, равная сумма радиальных проекций секундных количеств движения элементарных объемов струи, расположенных на данном радиусе.

Вводим новые независимые переменные

$$\xi = x, \quad \zeta = (x\nu)^{-1}y \tag{6.6}$$

Уравнение (6.3) в переменных (x, ζ) согласно (6.6) примет вид

$$-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)^2 + x\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial\zeta} - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} = x\frac{\partial^3\psi}{\partial\zeta^3} \tag{6.7}$$

Считаем, что струя истекает из круговой щели конечной ширины. Строим функцию тока $\psi(x, \zeta)$ в виде суммы

$$\psi = f_0(\zeta)x + f(\zeta)x^\lambda \tag{6.8}$$

Первое слагаемое является автомодельным решением, λ — некоторое число.

Подставляя (6.8) в (6.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем для f_0 и f_1 систему уравнений

$$f_0''' + f_0f_0'' + f_0'^2 = 0 \tag{6.9}$$

$$f''' + f_0f'' + (3-\lambda)f_0'f' + \lambda f_0''f = 0 \tag{6.10}$$

с граничными условиями согласно (6.4)

$$f_0(0) = f(0) = 0$$

$$f_0'(\infty) = f'(\infty) = 0, \quad f_0''(0) = f''(0) = 0 \tag{6.11}$$

Заметим, что из соображений симметрии должно быть

$$\psi(-x, \zeta) = -\psi(x, \zeta)$$

Это следует из условия сохранения знака ζ при изменении знака x на $-x$ и y на $-y$.

Отсюда согласно равенству (5.1) заключаем, что в рассматриваемом случае разложение функции тока $\psi(x, \zeta)$ (5.1) должно содержать только лишь члены с нечетными показателями степеней x. Следовательно, λ в (6.8) должно быть нечетным.

Запишем интегральные соотношения для функций $f_0(\zeta)$, $f(\zeta)$. После подстановки (6.8) в (6.5) и приравнивания выражений при одинаковых степенях x имеем из (6.5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0'^2\,d\zeta = \frac{K_0\nu}{2\pi\rho}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_0'f'\,d\zeta = 0 \tag{6.12}$$

Решение уравнения (6.9) выполнено Л. Г. Лойцянским [3] и имеет вид

$$f_0(\zeta) = 2\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\zeta \tag{6.13}$$

Здесь α — постоянная интегрирования, которая выражается через K_0 при помощи первого интегрального соотношения (6.12) с учетом (6.13)

$$\alpha = ({}^1/_8 K_0\nu\,/\,\pi\rho)^{1/3} \tag{6.14}$$

Рассмотрим уравнение (6.10). Это уравнение заменой (1.12) с учетом (6.9) приводится к виду

$$y'' + \left(f_0 + \frac{f_0''}{f'}\right)y' + \left[(1-\lambda)f_0' - f_0\frac{f_0''}{f_0'} - \frac{f_0''^2}{f_0'^2}\right]y = 0 \tag{6.15}$$

Вводим новую независимую переменную

$$z = \mathrm{th}\,\alpha\zeta \tag{6.16}$$

Уравнение (6.15) с учетом (6.13) в новой переменной будет

$$(1-z^2)y'' - 2zy' + 2(1-\lambda)y = 0 \tag{6.17}$$

Это уравнение Лежандра, собственные числа которого определяются по формуле

$$\lambda = 1 - {}^1\!/_2 n(n+1) \qquad (n \text{ — целое число}) \tag{6.18}$$

Первым собственным значением λ согласно (6.18), при котором функция $f(\zeta)$ удовлетворяет граничным условиям (6.11), является $\lambda = -9$ $(n = 4)$, и функция $f(\zeta)$ согласно условию ограниченности $\partial f / \partial z$ при $z \to 1$ и в силу условий (6.11) и (1.12) примет вид:

$$f(z) = \gamma(1 - z^2) \int\limits_0^z \frac{P_4(z)}{(1-z^2)^2} dz \tag{6.19}$$

$$P_4(z) = {}^1\!/_8 (35z^4 - 30z^2 + 3)$$

Здесь γ — постоянная интегрирования. После вычисления интеграла (6.19) имеем выражение

$$f(z) = \gamma\left[\frac{35}{8} z(1-z^2) + \frac{1}{2} z - \frac{9}{4}(1-z^2)\ln\frac{1+z}{1-z}\right] \tag{6.20}$$

Проверим второе интегральное соотношение (6.12). Это соотношение в переменной z согласно (6.16) с учетом (6.13) и (6.20) имеет вид

$$\gamma \int\limits_{-1}^{+1} (1-z^2)\left(\frac{3}{8} - \frac{105}{8} z^2 + \frac{9}{2} z \ln\frac{1+z}{1-z}\right) dz \equiv 0 \tag{6.21}$$

Интеграл (6.21) тождественно равен нулю, в чем нетрудно убедиться в результате его вычисления.

Таким образом, постоянная интегрирования γ проходит через граничные условия (6.11) и интегральное соотношение (6.5) и является произвольной постоянной для рассматриваемой задачи, зависящей от начального профиля скорости.

Выражения функции тока ψ (6.8) и радиальной составляющей скорости u согласно (6.2) имеют вид

$$\psi = f_0(\zeta)x + f(\zeta)\frac{1}{x^9}, \qquad u = \frac{1}{\nu}\left[f_0'(\zeta)\frac{1}{x} + f'(\zeta)\frac{1}{x^{11}}\right] \tag{6.22}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ζ. Следовательно, в случае развития радиально-щелевой струи в пространстве затопленности той же жидкостью разложение функции тока $\psi(x, \zeta)$ (5.1) значительно упрощается, а получаемая поправка в неавтомодельном члене значительно мала по сравнению с автомодельным решением. Таким образом, в этом случае автомодельное решение Л. Г. Лойцянского [3] является практически общим решением задачи в рамках теории пограничного слоя.

Поступило 6 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
2. Акатнов Н. И. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1953, № 5.
3. Лойцянский Л. Г. Радиально-щелевая струя в пространстве, заполненном той же жидкостью. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1953, № 5.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.
5. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
6. Фалькович С. В. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.