

ДОЗВУКОВОЕ И ТРАНСЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА В СЛЕДЕ ПЛОСКОГО ТЕЛА

В. И. МЫШЕНКОВ

(Москва)

В рамках уравнений Навье — Стокса рассматривается задача о течении газа в следе за пластиной конечной толщины при дозвуковых и трансзвуковых скоростях потока и числах $P = 0.71$ и $1 \leq R \leq 1000$. Задача решается методом установления с помощью явной двухшаговой разностной схемы типа Лакса — Вендроффа.

Результаты расчетов качественно согласуются с имеющимися теоретическими и экспериментальными данными.

Численное решение уравнений Навье — Стокса в последнее время находит, несмотря на большие трудности, все большее распространение. К настоящему времени получен ряд результатов для сравнительно простых течений сжимаемой жидкости: для течения во фронте ударной волны [1, 2], на пластине [3], в замкнутой прямоугольной области [4, 5]. Решены задачи об обтекании угла, цилиндра и затупленного тела потоком вязкого сжимаемого газа [6–8]. Рассмотрена задача о нестационарном течении при дифракции поперечной ударной волны на прямоугольной пластине [3] и др. Более полный обзор работ по численному решению уравнений Навье — Стокса приведен в работе [9].

1. Постановка задачи и система уравнений. Пусть ξ, η — прямоугольная система координат; u, v — составляющие скорости по ξ, η ; ρ, p, T, e — плотность, давление, температура и внутренняя энергия.

Рассмотрим задачу о течении газа в следе за пластиной конечной толщины при условии, что параметры потока заданы на бесконечности по ξ, η и на некотором расстоянии ξ_0 вверх по потоку от донного среза пластины. Решение задачи ввиду наличия сложных диссипативных процессов будем искать с помощью уравнений Навье — Стокса. Для удобства интегрирования отобразим посредством преобразования

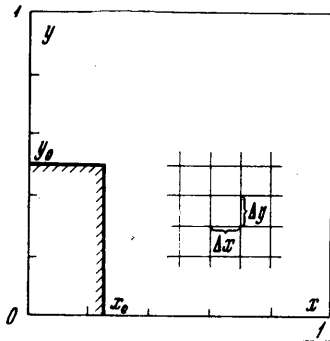
$$x = \xi / \sqrt{\xi^2 + 1}, \quad y = \eta / \sqrt{\eta^2 + 1} \quad (1.1)$$

правую полуплоскость в прямоугольную область с координатами $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ (фиг. 1).

Нестационарные уравнения движения и состояния в безразмерной форме в переменных t, x, y запишем аналогично [3, 10] в виде

$$F_t = (1 - x^2)^{1/2} A_x + (1 - y^2)^{1/2} B_y + C, \quad p = (\gamma - 1) \rho e \\ \mu / \mu_\infty = \lambda / \lambda_\infty = (T / T_\infty)^{1/2} (T_\infty - T_s) / (T - T_s) \quad (1.2)$$

Здесь F, A, B, C — векторы, причем нижние индексы x, y означают частное дифференцирование; γ — показатель адиабаты; μ, λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности; $T_s = 102^\circ \text{K}$ — постоянная Сатерленда. В качестве характерных величин при образовании безразмерных переменных приняты параметры набегающего потока $\rho_\infty, U_\infty, T_\infty, \mu_\infty, \lambda_\infty$ и $L = 1.733 l$ (l — половина толщины пластины).



Фиг. 1

Для совершенного газа с постоянной теплоемкостью векторы F , A , B и C имеют вид

$$\begin{aligned} F &= \{\rho, \rho u, \rho v, \rho[e + 1/2(u^2 + v^2)]\} \\ -A &= \{\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho u[e + 1/2(u^2 + v^2) + p/\rho]\} \\ -B &= \{\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho v[e + 1/2(u^2 + v^2) + p/\rho]\} \\ C &= R^{-1}\{0, C_1, C_2, C_3\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (1-x^2)^{3/2} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \\ C_2 &= (1-x^2)^{3/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \\ C_3 &= \frac{\gamma}{P} \left[(1-x^2)^{3/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda (1-x^2)^{3/2} \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial e}{\partial y} \right) \right] + \Phi + Q \\ \tau_{xx} &= (1-x^2)^{3/2} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left[(1-x^2)^{3/2} \frac{\partial u}{\partial x} + (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left[(1-y^2)^{3/2} \frac{\partial u}{\partial y} + (1-x^2)^{3/2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ \tau_{yy} &= (1-y^2)^{3/2} 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \left[(1-x^2)^{3/2} \frac{\partial u}{\partial x} + (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ \Phi &= \frac{4}{3} \mu \left[\left((1-x^2)^{3/2} \frac{\partial u}{\partial x} - (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1-x^2)^{3/2} (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \mu \left[(1-y^2)^{3/2} \frac{\partial u}{\partial y} + (1-x^2)^{3/2} \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \\ Q &= u \left[(1-x^2)^{3/2} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right] + \\ &\quad + v \left[(1-x^2)^{3/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + (1-y^2)^{3/2} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

а R , P , M — числа Рейнольдса, Прандтля, Маха соответственно.

Задачу будем решать численно методом установления при следующих ниже краевых условиях, предполагая, что такое решение (как следует из физического смысла задачи) существует и единственно.

Граничные условия

$$\begin{aligned} 1) \text{ при } x=1, 0 \leq y \leq 1; y=1, 0 \leq x \leq 1 \\ \rho^1 = 1, u = 1, v = 0, e = e_\infty \end{aligned}$$

¹ Строго говоря, значение плотности на правой границе области $x=1, 0 \leq y \leq 1$ следовало бы определять из уравнения неразрывности. Однако при $x=1$ уравнение неразрывности

$$\partial \rho / \partial t = -(1-y^2)^{3/2} v_\infty \partial \rho / \partial y$$

интегрируется независимо от других уравнений системы и имеет общее решение

$$\rho(t - yv_\infty / \sqrt{1-y^2}),$$

которое при $t \rightarrow \infty$ принимает значение, равное плотности ρ_∞ в точке $x=1, y=1$. Поэтому целесообразно было для ускорения сходимости решения с самого начала положить на правой границе плотность равной ρ_∞ .

2) при $x = 0, y_0 \leq y \leq 1$

$$\rho = f_1(y), u = f_2(y), v = f_3(y), e = f_4(y)$$

3) при $y = y_0, 0 \leq x \leq x_0; x = x_0, 0 \leq y \leq y_0$

$$u = v = 0, e = e_w$$

ρ определяется из уравнения неразрывности с учетом прилипания,

4) при $y = 0, x_0 \leq x \leq 1$

$$\partial \rho / \partial y = \partial u / \partial y = \partial v / \partial y = \partial e / \partial y = 0, \quad v = 0$$

Здесь f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — произвольные функции, удовлетворяющие условиям существования решения, например функции распределения ρ, u, v, e в пограничном слое. Для простоты положим функции f_i постоянными, равными параметрам набегающего потока. x_0, y_0 — координаты поверхностей пластины по x и y (см. фиг. 1). Условие 4), как известно [11], несколько стабилизирует течение в донной области и является поэтому несправедливым при числах R , для которых течение становится нестационарным (например, образование дорожки Кармана).

Начальные условия. Начальные значения полей переменных ρ, u, v, e можно задавать в широком диапазоне. Однако для ускорения счета целесообразнее задавать их как можно ближе к решению задачи. Практически это осуществляется использованием ранее полученного для некоторых чисел R, P, M решения в качестве начальных данных при расчете для других значений характерных параметров.

Решение будем считать установившимся, если норма разности векторов u в ближайшем следе удовлетворяет условию

$$\|u_{k+100} - u_k\| \leq N \tag{1.5}$$

Здесь u_k — величина u в момент $t = k\Delta t$, N — наперед заданное положительное число, в данном случае равное 10^{-3} , Δt — шаг по времени при численном счете. При расчетах процесс сходимости дополнительно контролировался наблюдением за координатой точки торможения в следе.

2. Разностная схема. Систему уравнений (1.2) аппроксимируем условно — устойчивой разностной схемой второго порядка точности типа Лакса — Вендроффа [3, 10]

$$\langle F_t \rangle_{m,n}^{k+1/2} = [1 - (m\Delta x)^2]^{1/2} \langle A_x \rangle_{m,n}^{k+1/2} + [1 - (n\Delta y)^2]^{1/2} \langle B_y \rangle_{m,n}^{k+1/2} + C_{m,n}^k \tag{2.1}$$

где

$$\langle F_t \rangle_{m,n}^{k+1/2} = \frac{1}{\Delta t} (F_{m,n}^{k+1} - F_{m,n}^k) \tag{2.2}$$

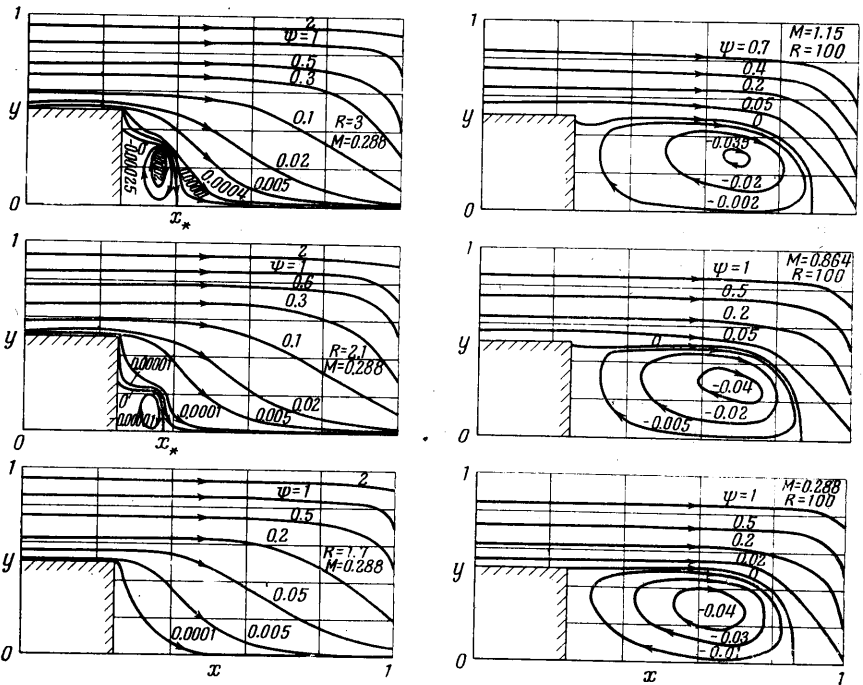
$$\langle A_x \rangle_{m,n}^{k+1/2} = \frac{1}{\Delta x} (A_{m+1/2,n}^{k+1/2} - A_{m-1/2,n}^{k+1/2}), \quad \langle B_y \rangle_{m,n}^{k+1/2} = \frac{1}{\Delta y} (B_{m,n+1/2}^{k+1/2} - B_{m,n-1/2}^{k+1/2})$$

Замена вектора $C_{m,n}^{k+1/2}$ вектором $C_{m,n}^k$ в уравнении (2.1), представляющая значительное упрощение, не приводит к ухудшению точности получаемого стационарного решения.

В развернутом виде уравнение (2.1) принимает вид

$$F_{m,n}^{k+1} = F_{m,n}^k + \Delta t \left\{ [1 - (m\Delta x)^2]^{1/2} \left(\frac{A_{m+1/2,n}^{k+1/2} - A_{m-1/2,n}^{k+1/2}}{\Delta x} \right) + [1 - (n\Delta y)^2]^{1/2} \frac{B_{m,n+1/2}^{k+1/2} - B_{m,n-1/2}^{k+1/2}}{\Delta y} + C_{m,n}^k \right\} + O(\Delta^3) \tag{2.3}$$

Здесь используются следующие обозначения: m, n, k — номера узлов; $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ — расстояния между узлами сетки по осям x, y, t (время) соответственно; $F_{m,n}^k$ — значение вектора F в точке $m\Delta x, n\Delta y$ в момент $k\Delta t$.



Фиг. 2

Векторы A и B выражаются через вектор F (1.5), поэтому для решения уравнения (2.3) достаточно определить

$$F_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_{m,n}^k + F_{m+1,n}^k) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [1 - ((m+\frac{1}{2})\Delta x)^2]^{1/2} (A_{m+1,n}^k - A_{m,n}^k) + \\ + \frac{\Delta t}{8\Delta y} [1 - (n\Delta y)^2]^{1/2} (B_{m,n+1}^k + B_{m+1,n+1}^k - B_{m,n-1}^k - B_{m+1,n-1}^k) + \\ + \frac{\Delta t}{4} [C_{m,n}^k + C_{m+1,n}^k] + O(\Delta^2) \quad (2.4)$$

$$F_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_{m,n}^k + F_{m,n+1}^k) + \frac{\Delta t}{8\Delta x} [1 - (m\Delta x)^2]^{1/2} (A_{m+1,n+1}^k + \\ + A_{m+1,n}^k - A_{m-1,n+1}^k - A_{m-1,n}^k) + \frac{\Delta t}{2\Delta y} [1 - ((n+\frac{1}{2})\Delta y)^2]^{1/2} \times \\ \times (B_{m,n+1}^k - B_{m,n}^k) + \frac{\Delta t}{4} [C_{m,n}^k + C_{m,n+1}^k] + O(\Delta^2) \quad (2.5)$$

Вектор $C_{m,n}^k$ аппроксимируем симметрично относительно точки $m\Delta x, n\Delta y$. Недостающие фиктивные значения переменных у границ области определяем с помощью полиномов третьей степени.

Расчет проводим в два шага: первый — определяем значения векторов $F_{m+\frac{1}{2},n}^{k+\frac{1}{2}}, F_{m,n+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}, A^{k+\frac{1}{2}}, B^{k+\frac{1}{2}}$ в момент $(k+\frac{1}{2})\Delta t$ из уравнений (2.4), (2.5); второй — найденные величины векторов $F^{k+\frac{1}{2}}, A^{k+\frac{1}{2}}, B^{k+\frac{1}{2}}$ подставляем в уравнение (2.3) и определяем вектор $FF_{m,n}^{k+1}$ в момент $(k+1)\Delta t$.

Далее процесс повторяем до выполнения условия стационарности (1.5).

Устойчивость рассматриваемой разностной схемы для уравнений в декартовых координатах ξ, η была исследована на модельных уравнениях в работах [3, 10] и получены следующие критерии устойчивости:

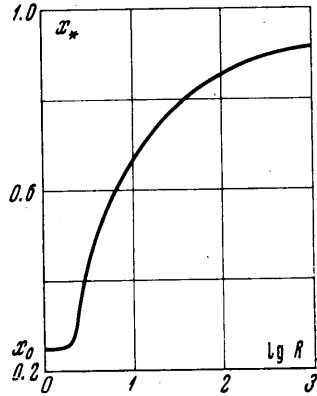
$$\frac{\Delta t}{\Delta \xi^2} \leq \frac{3R\rho}{8} \left[1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta \xi} a \right)^2 \right] \quad \begin{array}{l} \text{при отсутствии} \\ \text{теплообмена} \end{array} \quad (2.6)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta \xi^2} \leq \frac{RP\rho}{2} \frac{1 - (a\Delta t / \Delta \xi)^2}{\gamma + (a\Delta t / \Delta \xi)^2} \quad \begin{array}{l} \text{при наличии} \\ \text{теплообмена} \end{array}$$

Здесь a — скорость звука. Переход к новым координатам, как можно показать, не нарушает устойчивости разностной схемы.

3. Результаты расчетов. Решение задачи было получено при следующих значениях характерных параметров: $T_\infty = T_w = 300^\circ \text{K}$, $\gamma = 1.4$, $c_v = 0,1711$ [ккал / град·кг], $P = 0.71$, $1 \leq R \leq 1000$ при $U_\infty = 100$ [м / сек], $U_\infty = 100, 200, 300, 400$ [м / сек], (или $M = 0.288, 0.576, 0.864, 1.15$) при $R = 100$.

Расчеты проводились на ЭЦВМ М-20. Применялись сетки двух видов: $\Delta x = \Delta y = 0.1$ и $\Delta x = \Delta y = 0.05$. Шаг по времени определялся экспериментально. Стационарное решение при шаге сетки $\Delta x = \Delta y = 0.1$ получается довольно быстро (~30 мин счета), однако распределение переменных ρ, u, v, e по x, y имеет

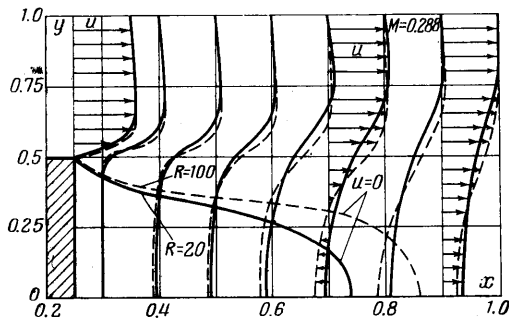
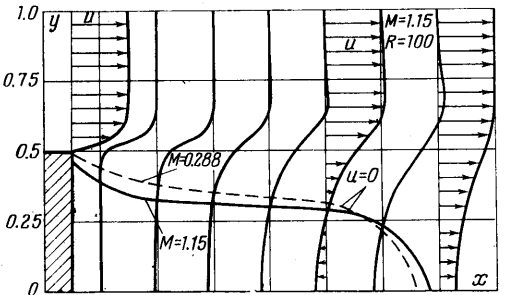


Фиг. 3

сильно осциллирующий характер. При уменьшении шагов сетки $\Delta x, \Delta y$ до 0.05 (при $R = \text{const}$) осцилляции значительно уменьшаются, а с увеличением числа R (при $\Delta x, \Delta y = \text{const}$) вновь возрастают, особенно у правой границы, где сжатие координат максимально. Время решения задачи с уменьшением шагов сетки существенно увеличивается. Так, уже при $\Delta x = \Delta y = 0.05$ оно составляет около 8 час.

Интересно отметить, что при определенных значениях Δt , близких к пределу устойчивости схемы, можно наблюдать также стабильные осцилляции переменных по времени, которые с уменьшением Δt пропадают.

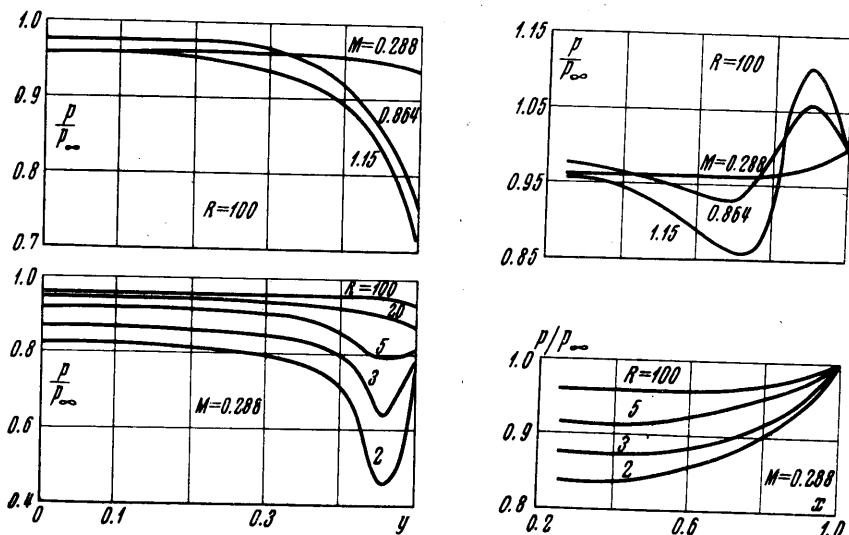
Более гладкого распределения переменных, очевидно, можно добиться уменьшением шагов сетки, однако по техническим причинам такие расчеты не



Фиг. 4

были проведены. Гладкое распределение переменных в данной работе получалось путем осреднения по x, y конечных расчетных данных (в основном при больших числах R).

Расчеты показали, что течение газа в следе за пластиной при малых числах $R \leq 1.7$ имеет безотрывный характер. При $R = 1.7$ у задней критической точки возникает довольно большая область малых скоростей, которая с увеличением числа R трансформируется в область возвратного течения, вызывая отрыв потока у дна. При этом вязкие силы оказываются



Фиг. 5

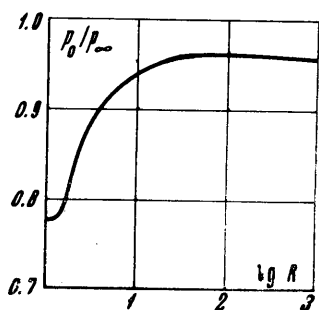
такими, что поток около острой кромки поворачивается на прямой угол без отрыва, причем точка отрыва потока (начало разделительной линии тока $\psi = 0$) находится на дне пластины. С дальнейшим ростом числа R размеры области возвратного течения увеличиваются, а точка отрыва потока перемещается по дну пластины вверх по направлению к угловой точке (см. фиг. 2, а и 3, представляющие собой картину линий тока и изменение координаты задней критической точки следа x_* с числом R). Аналогичные результаты были получены в работе [12] при качественном исследовании течения типа Стокса в окрестности сингулярных точек.

Характерная картина течения в следе за пластиной с развитой областью возвратного движения ($R = 60$ и 100) приведена на фиг. 4.

Увеличение числа M при $R = 100$ вызывает некоторую деформацию области возвратного течения и уменьшение относительных скоростей обратных токов (фиг. 2, б, 4).

Точка отрыва потока при этом смещается от угловой кромки вниз по донной стенке к задней точке торможения. Возможность существования такого отрыва сверхзвукового потока ниже угловой точки ранее предсказывалась в работе [12] и экспериментально исследовалась в работе [13].

Давление на дне пластины (фиг. 5, а) изменяется по y наиболее сильно при малых числах R , когда имеет место безотрывное обтекание. С увеличением числа R и образованием области возвратного течения распределение давления сглаживается и при $R \geq 100$ давление на дне становится



Фиг. 6

почти постоянным. Лишь в окрестности угловой точки пластины заметно некоторое понижение давления. Величина давления в центральной точке дна пластины (донное давление) с увеличением числа R до $R = 100$ увеличивается, а при $R > 100$ несколько снижается, что качественно согласуется с данными работы [14] для несжимаемой жидкости (фиг. 6). С ростом числа M при $R = \text{const}$ донное давление изменяется слабо.

Давление в зависимости от x в плоскости симметрии течения изменяется плавно от величины давления на дне p_0 до давления на бесконечности p_∞ с едва заметным минимумом в области возвратных течений. С увеличением числа M при $M \geq 0.864$ за отрывной зоной образуется область повышенного давления $p \geq p_\infty$, вызванного хвостовой волной сжатия. С дальнейшим увеличением x этот максимум давления рассасывается (фиг. 5, б).

Автор благодарит Б. С. Кирасова за советы и постоянное внимание к работе.

Поступило 15 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Crocco L. A suggestion for the numerical solution of the steady Navier — Stokes equations. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 10.
2. Полежаев В. И. Численное решение системы одномерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
3. Thommen. Numerical integration of the Navier — Stokes equations. Z. angew. Math. and Phys., 1966, vol. 17, No. 5.
4. Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 5.
5. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
6. Браиловская И. Ю. Расчет обтекания угла потоком вязкого сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
7. Павлов Б. М. О расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел с использованием полных уравнений Навье — Стокса. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 3.
8. Scala S. M., Gordon P. Solution of the time-dependent Navier — Stokes equations for the flow around a circular cylinder. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 5.
9. Браиловская И. Ю., Кускова Т. В., Чудов Л. А. Разностные методы решения уравнений Навье — Стокса (обзор). Сб. ВЦ МГУ «Вычислительные методы и программирование», 1968, вып. 11.
10. Gary J. On certain finite difference schemes for hyperbolic systems. Math. Computation, 1964, vol. 18, No. 85.
11. Grove A. S., Shair F. H., Petersen E. E., Acrivos A. On experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder. J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, pt 1.
12. Weinbaum S. H. On the singular points in the laminar two-dimensional near wake flow field. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt 1.
13. Donaldson I. S. On the separation of a supersonic flow at a sharp corner. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 6.
14. Acrivos A., Leal L. G., Snowden D. D., Pan F. Further experiments on steady separated flows past bluff objects. J. Fluids Mech., 1968, vol. 33, pt 1.