

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

В. Б. БАРАНОВ

(Москва)

Работа посвящена исследованию простых волн в плазме в приближении Чу, Гольдбергера и Лоу без ограничений на гидродинамические параметры. Получен ход интегральных кривых для медленных и быстрых магнитозвуковых волн. В некоторых предельных случаях доказано, что такие волны имеют тенденцию к опрокидыванию.

Необходимость исследований движений плазмы, для которых характерная длина изменения параметров мала по сравнению с длиной свободного пробега заряженных частиц, но велика по сравнению с их ларморовским радиусом, возникает в различных областях космической и лабораторной физики.

Чу, Гольдбергером и Лоу [1] было показано, что в этом случае поведение плазмы может быть описано системой магнитогидродинамических уравнений с анизотропным давлением.

В работе [2] на основе этих уравнений был проведен детальный анализ распространения волн малой амплитуды в бесстолкновительной плазме, а в работе [3] исследовались простые волны в плазме — пример нелинейных волн в предположении, что продольное и поперечное давления (p_{\parallel} и p_{\perp}) малы по сравнению с $B^2/4\pi$, где \mathbf{B} — вектор индукции магнитного поля. В предельном случае малых давлений анализ данной работы для быстрых волн совпадает, а для медленных не совпадает с результатами работы [3].

1. Уравнения для простых волн. Система магнитогидродинамических уравнений в приближении Чу, Гольдбергера и Лоу имеет вид (см., например, [4])

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{p_{\perp}}{\rho B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{b} (p_{\parallel} - p_{\perp})$$

Здесь ρ — плотность, \mathbf{v} — средняя скорость, p_{\parallel} , p_{\perp} — продольное и поперечное давления плазмы, \mathbf{P} — тензор напряжений, \mathbf{B} — вектор индукции магнитного поля, $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ — единичный вектор вдоль магнитного поля.

Будем рассматривать такие движения плазмы, для которых все параметры зависят только от одной координаты x и времени t . Тогда система уравнений (1.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= - (1-l) \frac{\partial p_{\perp}}{\partial x} - l \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial x} + \frac{B_y}{B^2} \left[2l(p_{\parallel} - p_{\perp}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B^2}{4\pi} \right] \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{B_z}{B^2} \left[2l(p_{\parallel} - p_{\perp}) - \frac{B^2}{4\pi} \right] \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{B_x B_y}{B^2} \left(\frac{\partial p_{\perp}}{\partial x} - \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial x} \right) + \frac{B_x}{B^2} \left[p_{\perp} - p_{\parallel} - \right. \\ &\quad \left. - 2(p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{B_y^2}{B^2} + \frac{B^2}{4\pi} \right] \frac{\partial B_y}{\partial x} - 2(p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{B_x B_y B_z}{B^4} \frac{\partial B_z}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \frac{B_x B_z}{B^2} \left(\frac{\partial p_{\perp}}{\partial x} - \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial x} \right) + \frac{B_x}{B^2} \left[p_{\perp} - p_{\parallel} - \right. \\
 &\quad \left. - 2(p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{B_z^2}{B^2} + \frac{B^2}{4\pi} \right] \frac{\partial B_z}{\partial x} - 2(p_{\perp} - p_{\parallel}) \frac{B_x B_y B_z}{B^4} \frac{\partial B_y}{\partial x} \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} + u \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\
 \frac{\partial B_z}{\partial t} + u \frac{\partial B_z}{\partial x} - B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_z \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial p_{\perp}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{\perp}}{\partial x} - \frac{p_{\perp}}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \\
 &\quad - \frac{p_{\perp} B_y}{B^2} \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} + u \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) - \frac{p_{\perp} B_z}{B^2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + u \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = 0 \\
 \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial t} + u \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial x} - \frac{3p_{\parallel}}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \\
 &\quad + \frac{2p_{\parallel} B_y}{B^2} \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} + u \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + \frac{2p_{\parallel} B_z}{B^2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + u \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = 0 \\
 \frac{\partial B_x}{\partial t} + u \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad \left(l = \frac{B_x^2}{B^2} \right) &\quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Будем искать такие решения этой системы, для которых все величины зависят лишь от комбинации $\varphi(x, t)$ независимых переменных x и t (простые волны или волны Римана). Кроме того, из двух последних уравнений (1.2) следует, что $B_x = \text{const}$. Введем скорость движения фазы волны относительно газа по формуле

$$a = \lambda - u \quad (1.3)$$

где λ — фазовая скорость простой волны. Из (1.2) получим линейную однородную систему уравнений для производных искомых функций

$$\begin{aligned}
 -\rho a u' + (1-l)p_{\perp}' + lp_{\parallel}' - \frac{B_y}{B^2} \left[2(p_{\parallel} - p_{\perp})l - \frac{B^2}{4\pi} \right] B_y' - \\
 - \frac{B_z}{B^2} \left[2(p_{\parallel} - p_{\perp})l - \frac{B^2}{4\pi} \right] B_z' = 0 \\
 -\rho a v' + \frac{B_x B_y}{B^2} (p_{\parallel}' - p_{\perp}') + \frac{B_x}{B^2} \left[p_{\parallel} - p_{\perp} - 2(p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B_y^2}{B^2} - \frac{B^2}{4\pi} \right] B_y' - \\
 - 2(p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B_x B_y B_z}{B^4} B_z' = 0 \\
 -\rho a w' + \frac{B_x B_z}{B^2} (p_{\parallel}' - p_{\perp}') + \frac{B_x}{B^2} \left[p_{\parallel} - p_{\perp} - 2(p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B_z^2}{B^2} - \frac{B^2}{4\pi} \right] B_z' - \\
 - 2(p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{B_x B_y B_z}{B^4} B_y' = 0 \\
 -\rho a' + \rho u' = 0, \quad -a B_y' + B_y u' - B_x v' = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -aB_z' + B_z u' - B_x w' = 0 \\
 & -ap_{\perp}' + \frac{p_{\perp}}{\rho} a\rho' + \frac{p_{\perp} B_y}{B^2} aB_y' + \frac{p_{\perp} B_z}{B^2} aB_z' = 0 \\
 & -ap_{\parallel}' + \frac{3p_{\parallel}}{\rho} a\rho' - \frac{2p_{\parallel} B_y}{B^2} aB_y' - \frac{2p_{\parallel} B_z}{B^2} aB_z' = 0
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по функции $\varphi(x, t)$. Для существования нетривиальных решений определитель этой системы должен быть равен нулю. Вычисление определителя системы (1.4) приводит к характеристическому уравнению, которое имеет вид

$$D(a) \equiv a^2 [F(a^2) - l(1-l)p_{\perp}^2] \left[a^2 - \frac{1}{\rho} \left(\frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right) l \right] = 0 \quad (1.5)$$

Здесь

$$F(a^2) = \left[\rho a^2 - l \left(\frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right) - 2(1-l) \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) \right] (\rho a^2 - 3lp_{\parallel}) \quad (1.6)$$

Характеристическое уравнение (1.5) для простых волн, естественно, совпадает с характеристическим уравнением для волн малой амплитуды в работе [2]. Результаты, полученные в [2], в дальнейшем используются при исследовании простых волн. Решение характеристического уравнения (1.5) приводит к следующим значениям a , при которых система уравнений (1.4) имеет нетривиальные решения

$$a_{1,2} = 0, \quad a_{3,4} = \pm a_A, \quad a_{5-8} = \pm a_{\pm}, -$$

где

$$a_A^2 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right) l \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
 a_{\pm}^2 = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{2p_{\perp}}{\rho} + \frac{B^2}{4\pi\rho} + (2p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{1}{\rho} l \pm \right. \\
 & \left. \pm \left[\left(\frac{2p_{\perp}}{\rho} + \frac{B^2}{4\pi\rho} + (2p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{1}{\rho} l \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4 \left(\left(\frac{p_{\perp}}{\rho} \right)^2 l(1-l) - \frac{3p_{\parallel} p_{\perp}}{\rho^2} l(2-l) + 3 \left(\frac{p_{\parallel}}{\rho} l \right)^2 - \frac{3p_{\parallel}}{\rho} l \frac{B^2}{4\pi\rho} \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

Нулевой корень, а также корни a_A и a_{\pm} , — определяют решения, являющиеся аналогом энтропийной волны, альфвеновской волны, а также быстрой и медленной магнитозвуковых волн в магнитной гидродинамике с изотропным давлением [5]. Аналог альфвеновских волн исследован в [3], а аналог энтропийных волн легко исследовать на основе системы уравнений (1.4). В дальнейшем подробно исследуются только быстрые и медленные магнитозвуковые волны.

В работе [2] получены неравенства

$$\begin{aligned}
 \rho a_{+}^2 & \geq \max \{ 3lp_{\parallel}; (1-l)p_{\perp} + 3lp_{\parallel} + p_M - 4lp_{\parallel} \} \\
 \rho a_{-}^2 & \leq \min \{ 3lp_{\parallel}; (1-l)p_{\perp} + 3lp_{\parallel} + p_M - 4lp_{\parallel} \} \\
 & (p_M = p_{\perp} + B^2/4\pi) \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Кроме того, показано [2], что корень для медленной магнитозвуковой волны действителен лишь при выполнении неравенства (из написанных

выше неравенств следует, что корень для a_+ всегда действителен)

$$p_m \equiv \frac{p_{\perp}^2}{6p_{\perp} + 3/4\pi^{-1}B^2} \leq p_{\parallel} \quad (1.10)$$

а область изменения продольного давления, в которой корни характеристического уравнения (1.5) действительны, разбивается на три части

$$p_m \leq p_{\parallel} < 1/4 p_M \quad (a_- \leq a_A \leq a_+) \quad (1.11)$$

$$1/4 p_M < p_{\parallel} < 1/4 (p_M + 3p_m) \quad (a_- \leq a_A < a_+) \quad (1.12)$$

$$1/4 (p_M + 3p_m) < p_{\parallel} \leq p_M \equiv p_{\perp} + 1/4\pi^{-1}B^2 \quad (a_A \leq a_- < a_+) \quad (1.13)$$

Следует заметить, что при $p_{\parallel} > p_M$ в плазме развивается так называемая «шланговая» неустойчивость (альфвеновская волна в этом случае имеет чисто мнимый корень).

2. Исследование быстрых и медленных магнитозвуковых волн. Положим в системе уравнений (1.4)

$$a = a_{+,-}$$

Выбрав систему координат таким образом, чтобы в некоторой произвольной точке выполнялись условия $w = B_z = 0$, можно заметить, что в этом случае из (1.4) следует:

$$w' = B_z' = 0$$

При этом, как и в [5], можно положить всюду $w = B_z = 0$. Кроме того, принимая за функцию $\varphi(x, t)$ плотность плазмы ρ и разрешая систему уравнений относительно производных, из (1.4) получаем следующую систему уравнений, описывающую изменение параметров в быстрой и медленной магнитозвуковых волнах (при этом пятое уравнение в (1.4) отбрасывается, поскольку простой подстановкой легко показать, что оно линейно зависимо)

$$\begin{aligned} \frac{dB_y^2}{d\rho} &= \frac{2B^2}{\rho} \frac{A_{+,-}}{C}, & \frac{du}{d\rho} &= \frac{a_{+,-}}{\rho^3} \\ \frac{d}{d\rho} \left(\frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) &= 0, & \frac{d}{d\rho} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{B_x}{\rho^2 B_y a_{+,-}} \left\{ (3p_{\parallel} - p_{\perp})(1-l) + [p_{\parallel} - p_M - (4p_{\parallel} - p_{\perp})(1-l)] \frac{A_{+,-}}{C} \right\}$$

Здесь

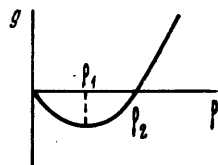
$$\begin{aligned} A_{+,-} &= \rho a_{+,-}^2 - (1-l)p_{\perp} - 3lp_{\parallel}, & C &= p_M - l(4p_{\parallel} - p_{\perp}) \\ l &= B_x^2 / B^2, & B^2 &= B_x^2 + B_y^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величину $A_{+,-}$ легко преобразовать к виду

$$A_{+,-} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{B^2}{4\pi} - l(4p_{\parallel} - p_{\perp}) \pm \left[\left(\frac{B^2}{4\pi} - l(4p_{\parallel} - p_{\perp}) \right)^2 + 4(1-l)p_{\perp}C \right]^{1/2} \right\} \quad (2.3)$$

Из (2.1) видно, что в простых волнах имеем

$$p_{\parallel} B^2 / \rho^3 = \text{const} \equiv C_1, \quad p_{\perp} / \rho B = \text{const} \equiv C_2 \quad (2.4)$$



Фиг. 1

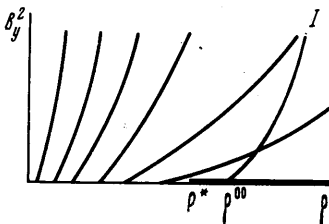
Кроме того, при $B_y^2 \rightarrow 0$ ($l \rightarrow 1$) имеем

$$A_{+,-} = \frac{1}{2} \left[\frac{B_x^2}{4\pi} - g(\rho) \pm \left| \frac{B_x^2}{4\pi} - g(\rho) \right| \right], \quad C = p_M^* - g(\rho) \quad (2.5)$$

где

$$g(\rho) \equiv 4p_{\parallel}^* - p_{\perp}^* = C_1^* \rho^3 - C_2^* \rho \quad (B_x = \text{const}) \quad (2.6)$$

Индекс * означает, что функции берутся при $B_y^2 = 0$, а C_1^* , C_2^* — постоянные. Функция $g(\rho)$ имеет вид, представленный на фиг. 1. Очевидно, что $p_{\parallel} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, а $p_{\perp} \rightarrow 0$ в этом случае, если B_y ограничено. Но при $B_y \gg B_x$ ($l \rightarrow 0$) имеем для быстрой волны



Фиг. 2

$$\frac{dB_y^2}{d\rho} = \frac{2B_y^2}{\rho}, \quad \text{или} \quad \frac{B_y}{\rho} = \text{const} \quad (2.7)$$

а для медленной волны при $B_y \gg B_x$

$$p_{\perp} + 1/8\pi^{-1} B_y^2 = \text{const} \quad (2.8)$$

Теперь перейдем к построению поля интегральных кривых.

Быстрая магнитозвуковая волна. Из выражений (2.3) для A_+ и (2.2) для C видно, что знак A_+ всюду совпадает со знаком C . В частности, легко показать, что в диапазонах, определяемых неравенствами (1.11) и (1.12), имеем $A_+ > 0$ и $C > 0$ при любых значениях параметра $l = B_x^2/B^2 \leq 1$, а в диапазоне, определяемом неравенствами (1.13), значение C может менять знак (при этом в точке, где $C = 0$, имеем $A_+ = 0$).

Таким образом, можно сделать вывод, что, как и в магнитной гидродинамике с изотропным давлением [5], магнитное поле в волне сжатия растет, а в волне разрежения уменьшается.

При $B_y^2 \rightarrow 0$ при малых ρ , как видно из фиг. 1, имеем $g(\rho) < B_x^2/4\pi$, а из (2.5), (2.6) получим

$$A_+ = \frac{B_x^2}{4\pi} + p_{\perp}^* - 4p_{\parallel}^* \equiv \frac{B_x^2}{4\pi} - g(\rho) > 0$$

При $\rho > \rho^*$ из (2.5) и (2.6) имеем $A_+ = 0$, где ρ^* определяется уравнением

$$g(\rho^*) = 1/4\pi^{-1} B_x^2$$

При $\rho \rightarrow 0$ имеем $A_+ \rightarrow B^2/4\pi$, $C \rightarrow B^2/4\pi$. Поэтому

$$dB_y^2/d\rho \rightarrow \infty \quad (B \neq 0)$$

Легко также показать, что производная $dB_y^2/d\rho$ при $B_y^2 \rightarrow 0$ — убывающая функция ρ . Учитывая все рассмотренное выше, а также формулу (2.7), поле интегральных кривых в плоскости (ρ, B_y^2) для быстрой магнитозвуковой волны можно представить в виде, изображенном на фиг. 2. На этой фигуре кривая I определяется уравнением

$$p_{\parallel} = p_{\perp} + 1/4\pi^{-1} B^2 \equiv p_M$$

Правее этой кривой быстрая магнитозвуковая волна попадает в область «шланговой» неустойчивости.

Медленная магнитозвуковая волна. Из (1.9) и (2.2) видно, что в медленной магнитозвуковой волне $A_- \leq 0$. Следовательно, в области, где $C > 0$, имеем $dB_y^2/d\rho \leq 0$. В точке, где $C = 0$, имеем $A_- < 0$ и производная обращается в бесконечность, т. е. в этой точке с ростом магнитного поля плотность не меняется. В области, где $C < 0$, в медленной магнитозвуковой волне имеем $dB_y^2/d\rho > 0$. При $B_y^2 \rightarrow 0$ имеем $dB_y^2/d\rho = 0$ при $\rho < \rho^*$ и $dB_y^2/d\rho < 0$ при $\rho^* < \rho < \rho^{**}$, где ρ^{**} определяется уравнением

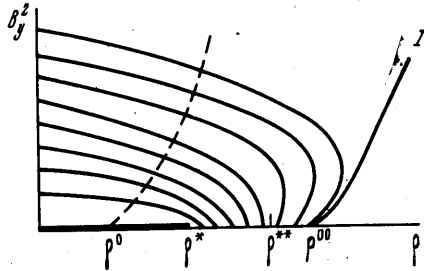
$$p_M^* - 4p_{||}^* + p_{\perp}^* = 0$$

При $B_y^2 \rightarrow 0$ имеем $dB_y^2/d\rho \rightarrow \infty$ в точке $\rho = \rho^{**}$, а при $\rho > \rho^{**}$ имеем $dB_y^2/d\rho > 0$. Однако, при $B_y \gg B_x$ ($l \rightarrow 0$) имеем $dB_y^2/d\rho < 0$. Отсюда следует, что интегральная кривая, проходящая через точку ($\rho > \rho^{**}$, $B_y^2 = 0$), меняет знак производной. При этом, используя (2.4), легко показать, что знак производной меняется лишь один раз.

При $\rho \rightarrow 0$ имеем $C \rightarrow B^2/4\pi$, $A_- \rightarrow -(1-l)p_{\perp}$, а следовательно,

$$dB_y^2/d\rho \rightarrow -8\pi(1-l)C_2B.$$

Таким образом, при $\rho \rightarrow 0$ имеем $dB_y^2/d\rho < 0$. Эта производная ограничена и тем больше по абсолютной величине, чем больше B^2 . Поле интегральных кривых в плоскости (ρ, B_y^2) для медленной магнитозвуковой волны имеет вид, изображенный на фиг. 3. На этой фигуре пунктиром изображена кривая, определяемая уравнением



Фиг. 3

$$p_M \equiv \frac{p_{\perp}^2}{6p_{\perp} + 3/4\pi^{-1}B^2} = p_{||}$$

Левее этой кривой $p_{||} < p_M$ и медленная магнитозвуковая волна становится мнимой. Очевидно, что положение кривой I и пунктирной линии, изображенных на фиг. 2 и 3, существенно зависит от постоянных C_1 и C_2 в (2.4).

3. Некоторые дополнительные результаты. Кривая I и пунктирная кривая на фиг. 2 и 3 определяются уравнениями

$$p_{||} = p_M, \quad p_{||} = p_m$$

которые при учете (2.4) имеют вид соответственно

$$\frac{C_1\rho^3}{B_x^2 + B_y^2} = C_2\rho\sqrt{B_x^2 + B_y^2} + \frac{B_x^2 + B_y^2}{4\pi} \quad (3.1)$$

$$\rho = -\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{16\pi C_2} + \left[\frac{B_x^2 + B_y^2}{(16\pi C_2)^2} + \frac{C_2(B_x^2 + B_y^2)^{3/2}}{6C_1} \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

Из (3.2) видно, что при $B_y^2 \rightarrow 0$ имеем

$$\rho \rightarrow \rho^0 = -\frac{B_x}{16\pi C_2} + \left[\left(\frac{B_x}{16\pi C_2} \right)^2 + \frac{C_2 B_x^3}{6C_1} \right]^{1/2}$$

и, очевидно, $\rho^0 < \rho^*$ (так как $p_m < 1/4 p_M$).

Легко показать, что для кривой (3.2) имеем $d\rho/dB_y^2 > 0$ и $d\rho/dB_y^2 \rightarrow 0$ при $B_y^2 \rightarrow \infty$, а кривая (3.1) пересекает ось $B_y^2 = 0$ в точке ρ^{00} , удовлетворяющей неравенству

$$\rho^{00} > \rho^{**}$$

Кроме того, дифференцируя (3.1) по ρ , можно показать, что в точке $(\rho^{00}, B_y^2 = 0)$ магнитное поле вдоль интегральной кривой для медленной магнитозвуковой волны растет быстрее, чем магнитное поле вдоль кривой (3.1) (кривая I на фиг. 3 соответствует уравнению $p_{\parallel} = p_M$).

В предельном случае $p_{\perp} \ll B^2/4\pi$ и $p_{\parallel} \ll B^2/4\pi$ уравнения и весь анализ для быстрой магнитозвуковой волны совпадают с полученными в работе [3]. В частности, для быстрой магнитозвуковой волны имеем

$$\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} (u + a_+) > 0$$

где λ определяется формулой (1.3), т. е. имеет место опрокидывание волны.

Для медленной магнитозвуковой волны имеем в этом предельном случае

$$\begin{aligned} \frac{dB_y^2}{d\rho} &= -(1-l) \frac{8\pi p_{\perp}}{\rho}, & \frac{du}{d\rho} &= \frac{a_-}{\rho}, & \frac{dv}{d\rho} &= \frac{(1-l)B_y}{\rho B_x} a_- \\ \frac{dp_{\perp}}{d\rho} &= \frac{p_{\perp}}{\rho}, & \frac{dp_{\parallel}}{d\rho} &= \frac{3p_{\parallel}}{\rho}, & a_-^2 &= \frac{3p_{\parallel} l}{\rho} \end{aligned}$$

Это не совпадает с уравнениями и анализом, полученными в работе [3]. В частности, в этом предельном случае отсутствует аномальный случай и всюду $d\lambda/d\rho > 0$, т. е. имеет место опрокидывание медленной магнитозвуковой волны. В общем случае имеем

$$\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{du}{d\rho} + \frac{da_{+,-}}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho a_{+,-}}{d\rho}$$

Дифференцируя характеристическое уравнение для быстрых и медленных магнитозвуковых волн, после громоздких преобразований получаем

$$a_1 \frac{d\lambda}{d\rho} = a_2 \frac{A_{+,-}}{C} + a_3 \quad (3.3)$$

$$a_1 = 2\rho^2 a_{+,-} [2\rho a_{+,-}^2 - (p_{\perp} + p_M) - l(2p_{\parallel} - p_{\perp})], \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} a_2 = \rho a_{+,-}^2 [2\rho p_M - l(8p_{\parallel} - p_{\perp})] + 3l(6 - 5l)p_{\parallel} p_{\perp} + 2l^2 p_{\perp}^2 - \\ - 24l^2 p_{\parallel}^2 + 3/2 \pi^{-1} l p_{\parallel} B^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} a_3 = \rho a_{+,-}^2 [3p_{\perp} + p_M + 2l(4p_{\parallel} - p_{\perp})] - 18l(2-l)p_{\parallel} p_{\perp} + \\ + 4l(1-l)p_{\perp}^2 + 24l^2 p_{\parallel}^2 - 15/4 \pi^{-1} l p_{\parallel} B^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если волна Римана распространяется почти перпендикулярно магнитному полю ($l \rightarrow 0$), то для быстрой волны имеем

$$\frac{d\lambda}{d\rho} \rightarrow \frac{3}{2\rho} \left[\frac{1}{\rho} \left(2p_{\perp} + \frac{B^2}{4\pi} \right) \right]^{1/2} > 0$$

В этом случае для медленной магнитозвуковой волны имеем

$$a_-^2 \rightarrow \frac{3l}{\rho} (p_{\parallel} - p_m), \quad A_- \rightarrow -p_{\perp}, \quad C \rightarrow p_m \quad (3.7)$$

После несложных преобразований при использовании (3.3) — (3.7) получим

$$\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{l}{2\rho^2 a_- (p_{\perp} + p_m)} \left[4(p_{\parallel} - p_m) \left(6p_{\perp} + 3 \frac{B^2}{4\pi} \right) + \frac{6p_{\parallel} p_{\perp}}{p_m} (2p_{\perp} + p_m) + 6p_{\parallel} p_{\perp} + 3p_m (p_{\perp} + p_m) \right] > 0$$

т. е. в случае, когда медленная магнитозвуковая волна распространяется почти перпендикулярно магнитному полю, в области существования этой волны ($p_{\parallel} \geq p_m$) она имеет тенденцию к опрокидыванию.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и Г. А. Любимова за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступило 22 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G., Goldberger M., Low F. The Boltzmann equation and the one-fluid-hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. Proc. Roy. Soc., A236, 1956, p. 112.
2. Kato Y., Tajiri M., Taniuti T. Propagation of hydromagnetic waves in collisionless plasma, I. J. Phys. Soc. Japan, 1966, vol. 21, No. 4.
3. Ахиезер И. А., Половин Р. В., Цинцадзе Н. Л. Простые волны в приближении Чу, Гольдбергера и Лоу. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 3.
4. Волков Т. Ф. Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы. Сб. «Вопросы теории плазмы», М., Атомиздат, 1964, вып. 4.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.