

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛНАХ В ГАЗЕ

Ш. У. ГАЛИЕВ, М. А. ИЛЬГАМОВ, А. В. САДЫКОВ

(Казань)

Приводятся результаты экспериментальных исследований продольных нелинейных колебаний газа, возбуждаемых в закрытой трубе. Дается сравнение амплитуды и профиля ударных волн с их расчетными значениями при частотах возбуждения  $\omega$ , близких к первой собственной частоте столба газа  $\Omega = \pi a_0 / L$ , где  $a_0$  — скорость звука в невозмущенном газе,  $L$  — длина трубы. Обнаружено существование ударных волн при частоте возбуждения, вдвое меньшей первой собственной частоты. Для последнего случая развита теория, основанная на методе последовательных приближений. Дается обобщение для частот возбуждения в окрестности  $\omega = N\Omega$  ( $2N = 1, 3, 5, \dots$ ).

Экспериментальному и теоретическому рассмотрению колебаний вблизи частот  $\omega = N\Omega$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ) посвящены работы [1–6].

Известны также исследования ударных волн, поддерживаемых периодическим теплоподводом [7], а также возникающих при автоколебаниях газа в двигателях [8, 9].

1. Колебания газа создавались в трубе с одним жестко закрытым концом, на другом конце которой по гармоническому закону двигался плоский поршень. Был использован двигатель автомашины с ходом поршня  $2l = 110$  мм, приводимый в движение через ременную передачу электромотором постоянного тока. Регулированием тока в моторе обеспечивалось плавное изменение частоты возбуждения. Труба имела внутренний диаметр 82 мм, равный диаметру цилиндра двигателя, и крепилась к нему при помощи резьбового соединения. Аналогичная установка с мотоциклетным двигателем была использована авторами работы [5].

Измерение давления ударной волны производилось пьезоэлектрическими датчиками, установленными в различных местах по длине трубы. Для наблюдения и фотографирования сигналов с датчиков использовался измерительный прибор РМ-1 с катодным осциллографом. Показания осциллографа дополнительно проверялись ртутным манометром (при статическом нагружении). Высокая чувствительность измерительной аппаратуры с входным сопротивлением электрометрического каскада  $10^{11}$  ом позволяла определять давление с точностью до  $10^{-3}$  бар.

В эксперименте определялись колебания давления в широком диапазоне частот возбуждения. На фиг. 1 приведены показания датчика, стоящего на закрытом конце трубы, когда ее длина равнялась 340 и 170 см (расстояние отсчитывалось от среднего положения поршня). Поэтому при одних и тех же оборотах двигателя левый столбец показывает колебания давления вблизи  $\omega = \Omega$ , а правый — вблизи  $\omega = \Omega / 2$ . В известной авторам литературе какие-либо указания на существование ударных волн вблизи  $\omega = \Omega / 2$  отсутствуют. Датчики, стоящие на закрытом торце трубы и на боковой поверхности непосредственно около конца, показывали одинаковые значения давления.

Кадры приведены для значений величин  $\gamma$  и  $\gamma_1$ , характеризующих близость частоты колебаний к резонансной частоте:

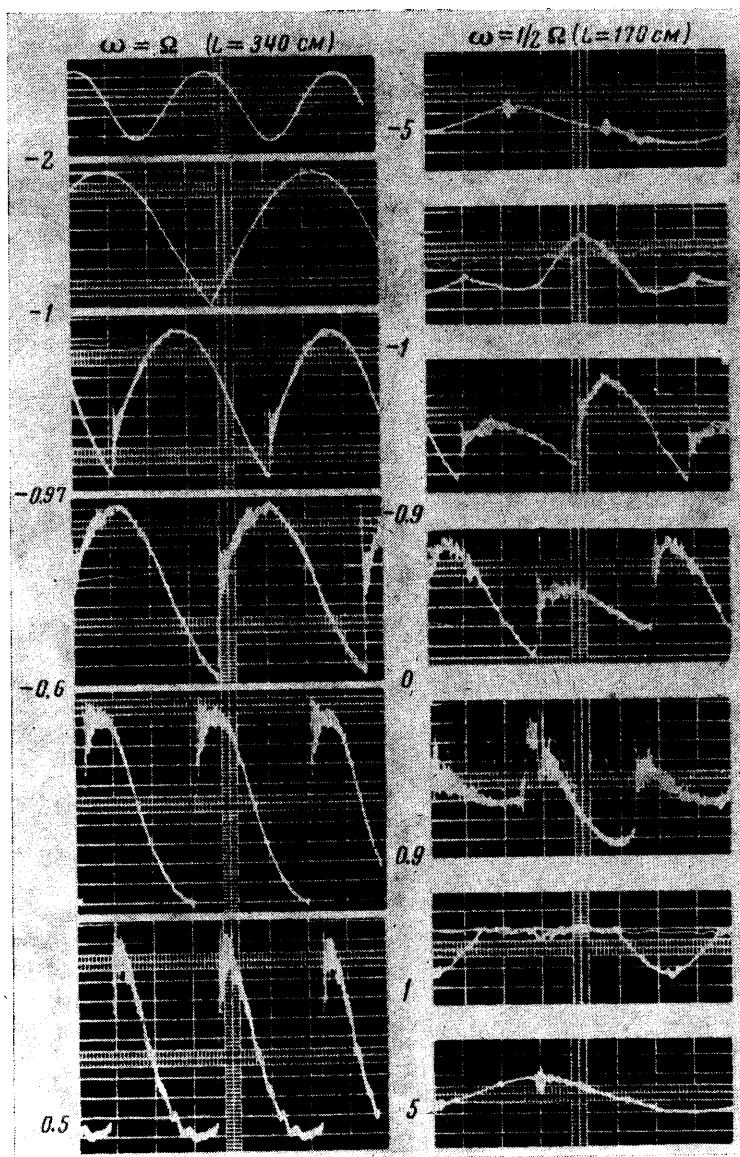
для случая  $\omega = \Omega$  ( $L = 340$ )

$$\gamma = - \frac{\pi a_0 \sin(\omega L / a_0)}{(\kappa + 1) \omega L \sqrt{\epsilon}} \quad \epsilon = \frac{4l}{(\kappa + 1) L} \quad (1.1)$$

для случая  $\omega = 1/2 \Omega$  ( $L = 170$ )

$$r_1 = \frac{\pi a_0 \operatorname{tg}(2\omega L/a_0)}{2(\kappa + 1)\omega L \varepsilon_1}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{l}{(\kappa + 1)L \sin(\omega L/a_0)} \left\{ 1 + \left[ 1 + \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^2 \left( \frac{\omega L}{a_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (1.2)$$

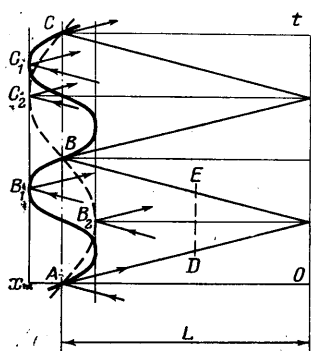


Фиг. 1

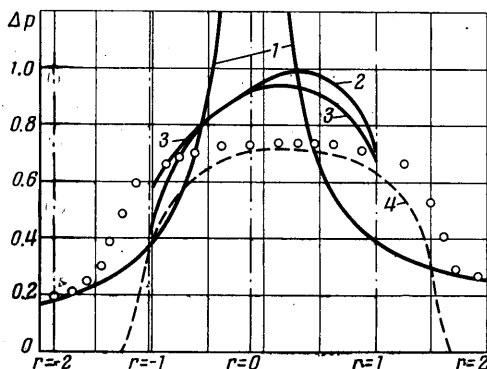
Здесь  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $l$  — амплитуда поршня. Значения  $r = 0$ ,  $r_1 = 0$  соответствуют резонансам  $N = 1$  и  $N = 1/2$ , а  $r < 0$ ,  $r_1 < 0$  и  $r > 0$ ,  $r_1 > 0$  — до- и послерезонансным колебаниям.

Как видно из фиг. 1, сравнительно большим значениям  $|r|$  и  $|r_1|$  (например,  $r = -2$ ,  $r_1 = -5$ ) соответствуют гармонические или близкие к гармоническим колебания столба газа. При  $r = -1$ , что соответствует отношению  $\omega/\Omega = 0.87$ , появляется излом, а при  $r = -0.97$  — слабые разрывы кривой. В дальнейшем эти разрывы возрастают и в резонансе становятся максимальными. В этот момент скачок давления составляет  $\Delta p = p_2 - p_1 = 0.72$  бар, где  $p_1$  и  $p_2$  — наименьшее и наибольшее значения давления за период колебаний (среднее давление в трубе атмосферное).

На правом столбце фиг. 1 приведены кадры, симметричные относительно резонанса  $N = 1/2$  ( $r_1 = 0$ ). Главное отличие от правого столбца состо-



Фиг. 2



Фиг. 3

ит в том, что между сильными разрывами в каждом периоде поршня располагаются разрывы с меньшим скачком. Кроме того, все волнообразование является менее интенсивным (наибольшее значение  $\Delta p$  за период поршня при  $r_1 = 0$  составляет 0.4 бар).

Эти особенности можно объяснить графически, рисуя траектории волн в плоскости  $x, t$  (фиг. 2). В дорезонансном режиме соударение поршня с падающей на него волной происходит вблизи точек A, B, C. Так как при этом движение поршня направлено противоположно движению падающей волны, то отраженная волна усиливается (случай  $\omega \lesssim \Omega$ ). В случае  $\omega \lesssim \Omega/2$  аналогичное отражение происходит лишь в точках A и C, а в точке B волна падает на поршень, движущийся влево. Отраженная от этой «мягкой» стенки волна оказывается ослабленной, и за каждый период хода поршня наряду с сильным ударом появляется ударная волна с меньшим скачком давления. При  $\omega = \Omega$  и  $\omega = \Omega/2$  волна падает на поршень в положениях  $B_1, C_1$  и  $B_2, C_2$  соответственно. За резонансом происходит дальнейший сдвиг фазы и волны ослабевают.

На фиг. 3 точками нанесены экспериментальные значения  $\Delta p$  в барах в окрестности  $\omega = \Omega$ . Штриховая линия указывает величину разрывов в эюре давления. Кривая 2 построена по формулам работы [6], а кривая 3 — по формулам, полученным в данной статье. При расчете малых колебаний значение скорости звука  $a_0$  принималось для комнатной температуры, а при расчете ударных волн для  $40^\circ \text{C}$  (ввиду нагрева газа).

Как видно из фиг. 3 (кривая 1), вдали от резонансов, когда еще не возникают разрывы, колебания газа, достигающие даже амплитуд, равных 0.1 бар, хорошо описываются линейной акустической теорией

$$p = -\frac{\rho_0 a_0 \omega l}{\sin(\omega L/a_0)} \cos \omega t \quad (x=0) \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho_0$  — равновесная плотность газа. Для описания ударных волн следует обратиться к нелинейным уравнениям газовой динамики.

2. Эксперимент указывает на малое влияние вязкости на амплитуду ударных волн. Например, датчик, поставленный в середине трубы, дает практически одинаковые показания для волны, движущейся вправо (в точке  $D$  на фиг. 2) и влево (в точке  $E$ ). Это служит показателем того, что поглощение энергии в газе на длине  $L$  мало. Поэтому в теоретическом анализе вязкостью, а также теплопроводностью пренебрегаем. Далее не будем учитывать изменение энтропии, и решение задачи проведем с точностью до величин второго порядка малости. Такое решение будет достаточно точным для слабых ударных волн, а для сильной нелинейности, которой характеризовался эксперимент, даст в основном качественный результат.

Задача сводится к решению одномерного уравнения газовой динамики в лагранжевых координатах

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{a_0^2}{(1 + \partial \xi / \partial c)^{\kappa+1}} \frac{\partial^2 \xi}{\partial c^2} = 0 \quad (2.1)$$

при граничных условиях

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = -l\omega \sin \omega t \quad (2.2)$$

Здесь  $\xi$  — смещение,  $v = \partial \xi / \partial t$  — скорость,  $c$  — переменная Лагранжа. Представим  $\xi$  и  $v$  в виде разложений по малому параметру  $\gamma$

$$\xi = \gamma \xi_1 + \gamma^2 \xi_2 + \dots, \quad v = \gamma v_1 + \gamma^2 v_2 + \dots \quad (\gamma = l/L)$$

Подставляя их в (2.1) и (2.2) и приравнивая члены одинаковых порядков, получаем систему линейных дифференциальных уравнений и граничных условий. Из них для  $v_1$  и  $v_2$  находим

$$\begin{aligned} v_1 &= -L\omega \frac{\sin(\omega c / a_0)}{\sin(\omega L / a_0)} \sin \omega t \\ v_2 &= -\frac{(\kappa + 1)L^2\omega^3}{8a_0^2 \sin^2(\omega L / a_0)} \left( c \cos \frac{2\omega c}{a_0} - L \operatorname{ctg} \frac{2\omega L}{a_0} \sin \frac{2\omega c}{a_0} \right) \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (2.3)$$

Согласно (2.3) возмущение скорости неограниченно возрастает при  $\omega = N\pi a_0 / L = N\Omega$ , где  $N = 1, 2, 3, \dots$  и  $2N = 1, 3, 5, \dots$ . Учет членов  $\gamma^3 \xi_3$  и  $\gamma^3 v_3$  позволил бы установить еще другие резонансы, например  $\omega = \Omega/3$ . Но при этой частоте вызвать ударные волны на нашей установке не удалось, поэтому ограничимся рассмотрением случаев  $N = 1, 2, 3, \dots$  и  $2N = 1, 3, 5, \dots$ . Метод малого параметра, позволяющий легко найти резонансы, обладает, однако, существенным недостатком, а именно не дает ограниченных разрывных решений, как это требуется по результатам экспериментов. Поэтому области резонансов следует рассмотреть более тщательно.

С этой целью, следуя работе [6], в которой исследован случай  $N = 1, 2, 3, \dots$ , применим метод последовательных приближений к уравнениям газовой динамики в эйлеровых координатах

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + a_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( v + \frac{2a}{\kappa - 1} \right) &= -(v + a) \frac{\partial}{\partial x} \left( v + \frac{2a}{\kappa - 1} \right) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - a_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( v - \frac{2a}{\kappa - 1} \right) &= -(v - a) \frac{\partial}{\partial x} \left( v - \frac{2a}{\kappa - 1} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $a$  — возмущение скорости звука.

Первое приближение находим, отбрасывая правые (нелинейные) части (2.4) и интегрируя левые части

$$v_1 + \frac{2a_1}{\kappa - 1} = 2a_0\psi_1(\zeta_1), \quad v_1 - \frac{2a_1}{\kappa - 1} = 2a_0\psi_2(\zeta_2) \quad (2.5)$$

$$\zeta_1 = t - x/a_0, \quad \zeta_2 = t + x/a_0$$

Здесь  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — произвольные функции. Подставляя найденные отсюда  $v_1$  и  $a_1$  в правые части (2.4), получаем поправки  $v_2$  и  $a_2$ . Суммы  $v = v_1 + v_2$  и  $a = a_1 + a_2$  можно записать в виде [6]

$$\begin{aligned} \frac{v}{a_0} = & \psi_1(\zeta_1) + \psi_2(\zeta_2) + \frac{\kappa + 1}{2a_0} x [\psi_1(\zeta_1)\psi_1'(\zeta_1) + \psi_2(\zeta_2)\psi_2'(\zeta_2)] - \\ & - \frac{3 - \kappa}{4} [\psi_1'(\zeta_1)\psi_2(\zeta_2) - \psi_2'(\zeta_2)\psi_1(\zeta_1)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{2a}{(\kappa - 1)a_0} = & \psi_1(\zeta_1) - \psi_2(\zeta_2) + \frac{\kappa + 1}{2a_0} x [\psi_1(\zeta_1)\psi_1'(\zeta_1) - \psi_2(\zeta_2)\psi_2'(\zeta_2)] - \\ & - \frac{3 - \kappa}{4} [\psi_1'(\zeta_1)\psi_2(\zeta_2) + \psi_2'(\zeta_2)\psi_1(\zeta_1)], \quad \psi_i(\zeta_i) = \int \psi_i(y) dy \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по аргументам  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  соответственно.

Первое граничное условие (2.2) дает  $\psi_1(t) = -\psi_2(t) = \psi(t)$ . Прежде чем удовлетворить второму условию (2.2), представим  $\psi$  в виде суммы

$$\psi = f + F \quad (2.7)$$

Здесь согласно (2.3) будем считать  $f$  функцией, имеющей период колебаний поршня, а  $F$  — функцией, имеющей период, равный половине периода поршня.

Сдвиг фазы между ними пока остается неопределенным. В отношении их абсолютных значений принимаем, что вблизи резонансов  $2N = 1, 3, 5, \dots$  обе функции имеют первый порядок малости, в окрестности  $N = 1, 2, 3, \dots$  функция  $f$  — первый, а  $F$  — третий порядок, и, наконец, вдали от резонансов  $f$  — первый, а  $F$  — второй порядок малости.

Далее учтем, что в случае  $2N = 1, 3, 5, \dots$  имеет место неравенство  $2|\omega L/a_0 - N\pi| \ll 1$ . При этом

$$\operatorname{tg}(2\omega L/a_0) = \operatorname{tg}(2\omega L/a_0 - 2N\pi) \approx 2(\omega L/a_0 - N\pi) \quad (2.8)$$

В эйлеровых координатах граничное условие на поршне должно удовлетворяться при  $x = L + l \cos \omega t$ , поэтому функции  $F(t \pm x/a_0)$  в этом сечении принимают значения

$$F\left(t \pm \frac{L}{a_0} \pm \frac{l}{a_0} \cos \omega t\right)$$

Введем обозначение

$$\chi_1 = \zeta_1(L) = t - L/a_0, \quad \chi_2 = \zeta_2(L) = t + L/a_0$$

и с учетом (2.8) в окрестности  $\chi_1 - la_0^{-1} \cos \omega t$  разложим в ряд Тейлора функцию

$$F\left(\chi_2 + \frac{l}{a_0} \cos \omega t\right) = F\left(\chi_1 - \frac{l}{a_0} \cos \omega t\right) + \\ + \left(\frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \frac{2\omega L}{a_0} + \frac{2l}{a_0} \cos \omega t\right) F'\left(\chi_1 - \frac{l}{a_0} \cos \omega t\right) + \dots \quad (2.9)$$

Здесь использовано условие периодичности

$$F(z + 2N\pi/\omega) = F(z)$$

В рассматриваемом случае  $2N = 1, 3, 5, \dots$  функция  $f$  описывает волнообразование вне резонанса и для нее можно принять линейное решение

$$f\left(t \pm \frac{x}{a_0}\right) = -\varepsilon_* \cos \omega\left(t \pm \frac{x}{a_0}\right), \quad \varepsilon_* = \frac{l\omega}{2a_0 \sin(\omega L/a_0)} \quad (2.10)$$

Для  $f(\chi_1)$  и  $f(\chi_2)$  справедливы равенства

$$f(\chi_2) \approx -f(\chi_1), \quad f'(\chi_2) \approx -f'(\chi_1), \quad \int_{\chi_1}^{\chi_2} f(y) dy \approx -\int_{\chi_2}^{\chi_1} f(y) dy \quad (2.11)$$

Теперь удовлетворим второму условию (2.2); подставим (2.6), (2.7), (2.9) в (2.2). В полученном выражении отбрасываем члены третьего порядка малости. При этом второй член в правой части (2.9) и произведения типа  $lF$  считаем величинами второго порядка. Производя согласно (2.9) и (2.11) сокращения членов вида  $F(\chi_1)f'(\chi_1)$  и  $F(\chi_2)f'(\chi_2)$  (сумма приведенных членов имеет порядок  $\varepsilon_*^3$ ) и учитывая формулы

$$\cos \omega t = -\frac{\sin \omega \chi_1}{\sin(\omega L/a_0)} + O(\varepsilon_*), \quad \sin 2\omega t = \frac{\sin 2\omega \chi_1}{\cos(2\omega L/a_0)} + O(\varepsilon_*)$$

справедливые при  $\omega L/a_0 \approx N\pi$  ( $2N = 1, 3, 5, \dots$ ), приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$-\frac{a_0}{\omega} \operatorname{tg} \frac{2\omega L}{a_0} F'(\chi_1) + \frac{2l \sin \omega \chi_1}{\sin(\omega L/a_0)} F'(\chi_1) + (\kappa + 1)L[f(\chi_1)f'(\chi_1) + \\ + F(\chi_1)F'(\chi_1)] - \varepsilon_* \omega l \cos \frac{\omega L}{a_0} \frac{\sin 2\omega \chi_1}{\cos(2\omega L/a_0)} - \\ - \frac{(3 - \kappa)a_0}{2} \left[ f'(\chi_1) \int_{\chi_1}^{\chi_2} F(y) dy - F'(\chi_1) \int_{\chi_2}^{\chi_1} f(y) dy \right] = 0 \quad (2.12)$$

Решение этого уравнения примем в виде

$$F(\chi_1) = \varepsilon_1 \left( \frac{2r_1}{\pi} - \sin \omega \chi_1 \right) \quad (2.13)$$

где  $\varepsilon_1$  и  $r_1$  подлежат определению. Как отмечалось выше,  $F$  имеет период, равный половине периода поршня ( $2\pi$ ), поэтому  $\Delta \leq \omega \chi_1 \leq \Delta + \pi$ . Подставим (2.13) и (2.10) в уравнение (2.12). При этом можно показать, что последняя скобка (2.12) составляет

$$\sim \varepsilon_* \varepsilon_1 r_1 (a_0/\pi) (3 - \kappa) \omega \chi_1 \sin \omega \chi_1 \quad (2.14)$$

Здесь

$$\sin \omega \chi = \sin \omega(t - L/a_0)$$

согласно линейному решению (2.10) имеет период  $2\pi$ . При исследовании колебаний вблизи резонанса ( $|r_1| \approx |\varepsilon_*|$ ) последняя скобка (2.12) согласно (2.14) имеет порядок  $\varepsilon_*^3$  и поэтому должна быть отброшена. В силу малости  $\cos(\omega L/a_0)$  при  $\omega L/a_0 \approx N\pi$  ( $2N = 1, 3, 5, \dots$ ) такой же порядок имеет и предпоследний член, который также отбрасывается.

Тогда в полученном в результате подстановки уравнении приравнявая нулю коэффициенты при  $\cos \omega \chi_1$  и  $\sin 2\omega \chi_1$ , находим неизвестные  $\varepsilon_1$  и  $r_1$ . Значения  $r_1$  и первого корня квадратного уравнения относительно  $\varepsilon_1$  приведены в (1.2).

Для определения  $\Delta$ , т. е. пределов существования функции  $F$ , используем условие равенства нулю возмущений плотности в каком-либо сечении (например,  $x = 0$ ) за период хода поршня

$$\int_{\Delta}^{\Delta+2\pi} \rho[\psi] d\tau = \int_{\Delta}^{\Delta+\pi} \rho[f(\tau) + F(\tau)] d\tau + \int_{\Delta}^{\Delta+\pi} \rho[f(\tau + \pi) + F(\tau)] d\tau = 0 \quad (2.15)$$

( $\tau = \omega t$ )

Из соотношения адиабаты и (2.6) с точностью до величин второго порядка малости имеем ( $x = 0$ )

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{2}{\kappa - 1} \frac{a}{a_0} + \frac{3 - \kappa}{(\kappa - 1)^2} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 = 2\psi - \frac{3 - \kappa}{2} \psi' \Psi + (3 - \kappa) \psi^2 \quad (2.16)$$

Интегрируя (2.15) с учетом (2.16), (2.7), (2.10), (2.13), находим

$$\pm \Delta = \arccos \left[ r_1 + \frac{3\pi(3 - \kappa)}{16\varepsilon_1} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_*^2) \right] \quad (2.17)$$

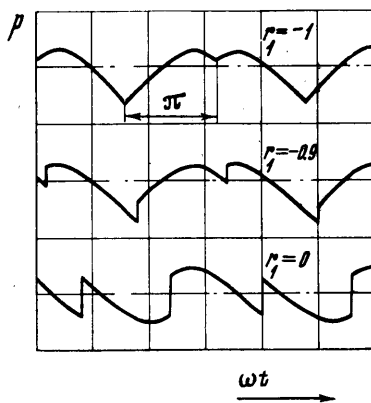
Следовательно, нижнее значение  $\Delta$  (верхнее значение не соответствует физической картине) меняется в пределах  $-\pi \leq \Delta \leq 0$ .

Колебание давления  $p$  может быть выражено через возмущение плотности  $\rho$  или по (2.16) через возмущение скорости звука  $a$

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \kappa \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \frac{\kappa(\kappa - 1)}{2} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 = \\ &= \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left( \frac{a}{a_0} \right) + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{(\kappa - 1)^2} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Подставляя сюда значение  $a$  из (2.6), (2.7), (2.10), (2.13) и пользуясь соотношениями (1.2), (2.17), определяем давление.

При нулевом сдвиге фазы между функциями  $f$  и  $F$  эпюра давления для  $r_1 = 0, -0.9, -1$  показана на фиг. 4, где деление по оси  $p$  равно 0.2 бар. Очевидно, ударные волны, отраженные в точках  $B_2$  и  $C_2$  (фиг. 2), в сечении  $x = 0$  должны иметь одинаковые формы. Однако, как следует из фиг. 4, это условие при синфазных  $f$  и  $F$  не выполняется. Если функцию  $F$  сдвинуть на угол  $\pi/2$ , то формы волн, отраженных из точек  $B_2$  и  $C_2$ , будут подобны.



Фиг. 4

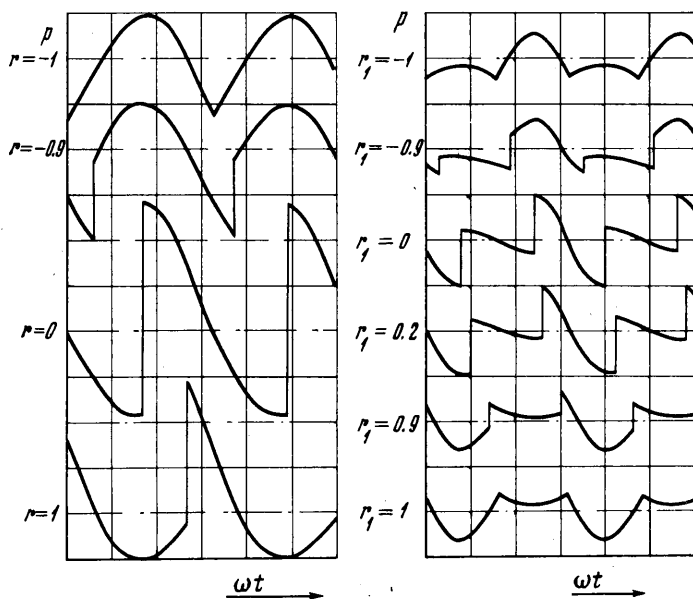
Соответствующая расчетная формула для давления согласно (2.18), (2.6), (2.7), (2.10), (2.13) имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = -\kappa \left\{ 2\varepsilon_* \cos \frac{\omega x}{a_0} \cos \omega t - \varepsilon_1 \left[ \frac{4r_1}{\pi} + \cos \omega \left( t - \frac{x}{a_0} \right)_1 + \right. \right. \quad (2.19)$$

$$\left. \left. + \cos \omega \left( t + \frac{x}{a_0} \right)_1 \right] \right\} + O(\varepsilon_*^2)$$

$$\pi/2 + \Delta \leq \omega(t + x/a_0)_1 \leq \Delta + 3\pi/2, \quad -\pi \leq \Delta \leq 0$$

Здесь величины второго порядка не приведены ввиду их громоздкости. Колебания давления, рассчитанные по (2.19) при  $x=0$ , построены на фиг. 5 справа (деление по оси  $p$  равно 0,2 бар) и удовлетворительно согласуются с экспериментальными значениями (фиг. 1). Амплитуды кривых давления на фиг. 1 и 5 отличаются не более, чем на 10%. Любопытно отметить, что колебания давления в сечении  $x=L$  согласно (2.19) совпадают



Фиг. 5

по форме с колебаниями в случае  $\omega = \Omega$  (фиг. 5 слева). Эта особенность полученного решения для частоты  $\omega = \Omega/2$  полностью подтверждается экспериментом.

Вдали от резонанса  $F$  является величиной второго порядка, а  $\cos(\omega L/a_0)$  уже не мало, поэтому (2.12) принимает вид

$$-\frac{a_0}{\omega} \operatorname{tg} \frac{2\omega L}{a_0} F'(\chi) + (\kappa + 1) L f(\chi) f'(\chi) -$$

$$- \varepsilon_* \omega l \cos \frac{\omega L}{a_0} \frac{\sin 2\omega \chi}{\cos(2\omega L/a_0)} = 0,$$

Отсюда с учетом (2.10)

$$\psi(\xi_1) = -\frac{l\omega \cos \omega \xi_1}{2a_0 \sin(\omega L/a_0)} + \frac{(\kappa+1)Ll^2\omega^3}{16a_0^3 \sin^2(\omega L/a_0)} \operatorname{ctg} \frac{2\omega L}{a_0} \cos 2\omega \xi_1 + \left(\frac{l\omega}{2a_0}\right)^2 \frac{\cos 2\omega \xi_1}{2 \sin^2(\omega L/a_0)} \quad (2.20)$$

Если по (2.6), (2.7), (2.10) и (2.20) найти выражение скорости, то оно, как и следовало ожидать, совпадет с выражением (2.3) при замене в последнем лагранжевых координат эйлеровыми.

Колебания вблизи  $\omega = N\pi a_0/L$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ) наиболее полно были рассмотрены в [8]. Однако повторяя предыдущие выкладки для этого случая, в рамках теории идеальной жидкости можно построить более точное решение, чем в [8], так как здесь учитываются некоторые новые величины второго порядка, а именно в эйлеровых координатах граничное условие на поршне выполняется при  $x = L + l \cos \omega t$  (а не при  $x = L$ ). Кроме того, для определения  $\Delta$  используется условие сохранения массы

$$\int_{\Delta}^{\Delta+\pi} \rho(\psi) d\tau = 0 \quad \left( \tau = \frac{\omega t}{2} + \frac{N\pi}{2} \right) \quad (2.21)$$

а не условие равенства нулю среднего значения  $\psi$  за период колебаний и применяется более строгое разложение

$$\psi \left( \chi_2 + \frac{l}{a_0} \cos \omega t \right) = \psi \left( \chi_1 - \frac{l}{a_0} \cos \omega t \right) + \left( \frac{2}{\omega} \cos N\pi \sin \frac{\omega L}{a_0} + \frac{2l}{a_0} \cos \omega t \right) \psi' \left( \chi_1 - \frac{l}{a_0} \cos \omega t \right) + \dots \quad (2.22)$$

Проделанные выкладки и сравнение с экспериментом показали, что полученное решение сравнительно мало отличается от решения [8] и по амплитуде отклоняется от последнего в сторону экспериментальных данных (фиг. 3, кривая 3). Однако не исключена возможность, что в других случаях, отличных от нашего эксперимента, отличие будет значительным. Следует заметить, что вязкость и теплопроводность согласно работе [8] приводят к некоторому снижению амплитуд, т. е. к дальнейшему сближению с экспериментом.

В рассматриваемом случае с точностью до величин второго порядка  $\psi = f$ . Используя (2.22), граничное условие на поршне запишем в виде

$$2 \left( \frac{a_0}{\omega} \cos N\pi \sin \frac{\omega L}{a_0} + l \cos \omega t \right) f'(\chi_1) - (\kappa+1)Lf(\chi_1)f'(\chi_1) = l\omega \sin \omega t \quad (2.23)$$

в котором величины третьего порядка малости отброшены. Принимая решение в виде

$$f(\chi_1) = \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{2r}{\pi} + \cos \frac{\omega t}{2} \right) \quad (2.24)$$

и интегрируя уравнение (2.23) приближенно по методу Бубнова — Галеркина в пределах от  $\Delta$  до  $\Delta + \pi$ , получаем два уравнения, из которых определяем  $\varepsilon$  и  $r$

$$\varepsilon = \frac{4l}{(\kappa+1)L}, \quad r = \frac{\pi}{(\kappa+1)L\sqrt{\varepsilon}} \left[ \frac{a_0}{\omega} (-1)^N \sin \frac{\omega L}{a_0} - \frac{l}{3} (2 \sin^2 \Delta + 1) \right]$$

Вблизи резонанса  $|\sin(\omega L/a_0)| \approx 1$ , поэтому для практических расчетов с большой точностью можно принять

$$r = \frac{\pi a_0 (-1)^N}{(\kappa+1)L\sqrt{\varepsilon} \omega} \sin \frac{\omega L}{a_0}$$

Из (2.21), (2.16), (2.24) находим уравнение для определения  $\Delta$

$$r^2 + r \left[ \frac{\pi}{(3-\kappa)\sqrt{\varepsilon}} - \frac{5}{2} \sin \Delta + \frac{\pi + 2\Delta}{4} \cos \Delta \right] - \frac{\pi \sin \Delta}{(3-\kappa)\sqrt{\varepsilon}} + \frac{3\pi^2}{16} = 0$$

которое решается численно. Значения  $\Delta$  следует искать в пределах  $-\pi/2 \leq \Delta \leq \pi/2$ .  
Общее выражение для давления имеет вид

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\varepsilon} \kappa \left[ \frac{4r}{\pi} + \cos \frac{\omega}{2} \left( t - \frac{x}{a_0} + \frac{N\pi}{\omega} \right) + \cos \frac{\omega}{2} \left( t + \frac{x}{a_0} + \frac{N\pi}{\omega} \right) \right] + O(\varepsilon)$$

$$\Delta \leq \frac{\omega}{2} \left( t \pm \frac{x}{a_0} + \frac{N\pi}{\omega} \right) \leq \Delta + \pi$$

При  $x = 0$  отсюда получается выражение для давления на закрытом конце трубы, по которому произведен расчет, представленный на фиг. 3 (кривая 3) и фиг. 5 (левый столбец).

Поступило 29 IV 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lettau E. Messungen an Schwingungen von Gassäulen mit steilen Fronten in Rohrleitungen. Dtsch. Kraftfahrforsch., 1939, Bd 39, Nr 1.
2. Betchov R. Nonlinear oscillations of the column of a gas. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 3.
3. Saenger R. A., Hudson G. E. Periodic shock waves in resonating gas columns. J. Acoust. Soc. America, 1960, vol. 32, No. 8.
4. Горьков А. П. Нелинейные акустические колебания столба газа в закрытой трубе. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 2.
5. Гуляев А. И., Кузнецов В. М. Колебания газа с большой амплитудой в закрытой трубе. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 2.
6. Chester W. Resonant oscillations in closed tubes. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, pt. 1.
7. Bao-Teh Chu, Ving S. J. Thermally driven nonlinear oscillations in a pipe with travelling shock waves. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 11.
8. Brownlee W. G. Nonlinear axial combustion instability in solid propellant motors. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 2. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 2.)
9. Sirignano W. A., Crocco L. A shock waves model of unstable rocket combustors. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 7. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 7.)