

## ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТУПЫХ ТЕЛ ВЯЗКИМ ГАЗОМ

К. М. МАГОМЕДОВ

(Москва)

Различия в подходах и результатах исследования гиперзвукового обтекания тупых тел наиболее заметны в переходном режиме, начинающемся от области, где перестает быть справедливым разделение потока на «внешнее» невязкое течение и пограничный слой, и до свободно-молекулярного течения. Обычно при изучении этого режима придерживаются умозрительной классификации Пробстина [1], хотя нет достаточно строгого анализа ее справедливости. По-видимому, более ближе к истине анализ, проведенный в работе [2].

Решение полных уравнений Навье — Стокса, как, например, в работе [3], связано, с рядом существенных трудностей даже при современных ЭВМ, особенно при больших, но все еще лежащих в переходном режиме, чисел Рейнольдса [4, 5]. Поэтому делаются те или иные допущения; это позволяет иногда решать несколько измененную задачу аналитически или провести для нее численные расчеты [4–10]. При таких допущениях часто нарушается принцип сохранения членов одного и того же порядка в уравнениях и граничных условиях, что приводит к отклонениям не только количественного, но и качественного характера.

Характерным малым параметром гиперзвукового невязкого обтекания тупых тел является отношение плотностей  $k$  до и после прямого скачка уплотнения, вычисленное с учетом возможных физико-химических превращений. Эта величина меняется в пределах  $k = 0.05 \div 0.2$  при полете тел в атмосфере Земли с числами Маха  $M_\infty \geq 6$ . Другой малый параметр в уравнениях Навье — Стокса  $R^{-1}$  (число Рейнольдса  $R$  вычислено по параметрам за скачком уплотнения и радиусу миделя тела) характеризует толщины ударной волны и пограничного слоя. Эти слои при очень больших  $R$  ограничивают зону невязкого течения.

В данной работе задача гиперзвукового обтекания тупых тел рассматривается с точки зрения решения уравнений Навье — Стокса в диапазоне  $R$ , для которого справедливы эти уравнения с условием прилипания на поверхности тела. В том случае, когда толщина всей возмущенной зоны, причем при очень больших значениях  $R$  эта зона содержит невязкий ударный слой и пограничный слой, существенно меньше характерного размера тела, а такой случай имеет место для лобовой поверхности тупых тел при  $k \ll 1$ , удается построить простую и достаточно точную теорию, основанную на асимптотических разложениях или оценках.

Для внешней границы ударного слоя предложены обобщенные условия Ренкина — Гюгонно, справедливые при понижении порядка упрощенных уравнений Навье — Стокса в основной области. Например, для уравнений Эйлера ( $R = \infty$ ) имеем обычные соотношения на разрывах, для уравнений типа Прандтля обобщенные условия Ренкина — Гюгонно учитывают члены порядка  $R^{-1/2}$ .

Для гиперзвукового обтекания «гладких» тупых тел построено асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса при  $k \rightarrow 0$ ,  $R^{-1} \rightarrow 0$ , но при  $m = R^{-1} / k$  конечном. Полученные уравнения имеют аналитическое решение в случае обтекания полусферы, отражающее не только качественное влияние различных факторов, но и имеющее удовлетворительную точность в диапазоне вязкого слоя  $k^2 \leq R^{-1} < k^{1/2}$ . Ранее эта задача рассматривалась в работе [6], но ставились неверные граничные условия. В работе [7] получено численное решение подобной задачи.

В п. 4 рассматривается общий случай гиперзвукового обтекания тупых тел, включая диапазоны вязкого слоя и классического пограничного слоя Прандтля. На основе асимптотических оценок получены уравнения, граничными условиями для которых на внешней границе служат обобщенные условия Ренкина — Гюгонно, а на поверхности тела — обычные условия прилипания. Если для тел гладкой формы типа сферы, которые в основном рассматривались в литературе с учетом вязкости [3–10], уравнения параболического типа решаются шаг за шагом, начиная от линии симметрии, то для «сильно затупленных» тел типа диска и для промежуточных случаев решение в окрестности критической точки не замкнуто.

**1. Асимптотическое приближение уравнений Навье — Стокса в случае вязкого слоя.** Пусть  $uV_\infty$ ,  $vV_\infty$ ,  $\rho\rho_\infty$ ,  $p\rho_\infty V_\infty^2$ ,  $hV_\infty^2$ ,  $\mu\mu_0$  — компоненты вектора скорости в связанной с телом криволинейной системе координат  $xr_0$ ,  $yr_0$ , плотность, давление, энтальпия и вязкость. Рассмотрим задачу гиперзвукового обтекания тупых тел потоком газа с плотностью  $\rho_\infty$  и скоростью  $V_\infty$  ( $M_\infty^2 \gg 1$ ). Будем рассматривать в качестве малых параметров обратную величину числа Рейнольдса  $R^{-1} = \mu_0 / (\rho_\infty V_\infty r_0)$  и отношение плотностей  $k = \rho_\infty / \rho_0$ . Значения  $\rho_0$  и  $\mu_0$  могут быть выбраны в некоторой характерной точке, например, по параметрам за прямым скачком или на поверхности тела. Условие  $k \rightarrow 0$  при  $M_\infty^2 \gg 1$  равносильно  $\gamma \rightarrow 1$ , где  $\gamma$  — эффективный показатель адиабаты.

Гиперзвуковой невязкий ударный слой перед затупленным телом при  $k \rightarrow 0$  имеет много общего с пограничным слоем Прандтля. При таком предельном переходе в уравнениях Эйлера величины  $\delta k^{-1}$ ,  $p$ ,  $vk^{-1}$ ,  $k \cdot \rho$  ( $\delta$  — отход ударной волны) остаются конечными, хотя физическая толщина ударного слоя по сравнению с характерным размером тела стремится к нулю. Наиболее интересным следствием этого асимптотического решения является обращение в нуль на поверхности тела касательной составляющей скорости  $u$ , т. е. выполняется граничное условие прилипания для уравнений Навье — Стокса, а подход Прандтля для вычисления тепловых потоков и трения теряет смысл. Оставляя пока открытым вопрос о реальном существовании такого режима, получим формальное решение уравнений Навье — Стокса при  $k \rightarrow 0$ ,  $R^{-1} \rightarrow 0$ . При этом будем предполагать, что параметр подобия  $m$  остается конечным, т. е.  $k/m \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ , или  $k^2 R \rightarrow 0$ .

Будем искать решение полных уравнений Навье — Стокса в виде

$$\begin{aligned} y &= ky_0, & u &= u_0 + ku_1 + \dots, & v &= k(v_0 + kv_1 + \dots) \\ p &= p_0 + kp_1 + \dots, & \rho &= k^{-1}(\rho_0 + k\rho_1 + \dots), & h &= h_0 + kh_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для функций с нулевым индексом (в дальнейшем индекс опустим) можно получить систему уравнений

$$\begin{aligned} (ur^j)_x + (vr^j)_y &= 0, & uu_x + vv_y &= m\rho^{-1}(\mu u_y)_y \\ \kappa u^2 \rho - p_y &= 0, & uH_x + vH_y &= m\rho^{-1}[P^{-1}(\mu h_y)_y + (\mu uu_y)_y] \\ H &= h + \frac{1}{2}u^2, & \rho &= pkZ(p, h) / h = pZ_0(p, h) / h, & \mu &= \mu(h, p) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь величина  $j = 0$  или  $j = 1$  соответственно для плоских или осесимметричных тел,  $r$  и  $\kappa$  — расстояние до оси и кривизна тела,  $P$  — число Прандтля.

Поставим граничные условия для уравнений (1.2) при обтекании гладких тупых тел. На поверхности тела будем предполагать прилипание ( $u = v = 0$ ) и  $h = h_w$  (или  $h_y = 0$ ). Условия скольжения и скачка температуры на поверхности тела имеют порядок числа Кнудсена  $K \sim mk^{1/2}$ , так что условие прилипания будет выполняться по крайней мере при  $mk^{1/2} \ll 1$ . С другой стороны, нельзя задавать для уравнений (1.2) условия в невозмущенном потоке, где несправедливы разложения (1.1). Для того чтобы связать параметры в набегающем потоке и в возмущенной области вблизи тела необходимо особо исследовать структуру переходного слоя (ударной волны) или получить соответствующие граничные условия.

**2. Структура ударной волны. Обобщенные условия Ренкина — Гюгонио.** Рассмотрим известный способ вывода условий сохранения, или соотношений Ренкина — Гюгонио, но с сохранением вязких членов в тензоре напряжений [11].

Уравнения установившегося течения вязкого газа могут быть записаны в виде интегралов по произвольной замкнутой поверхности

$$\iint G_{in} d\sigma = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.1)$$

$$G_{1n} = \rho V_n - \rho_\infty V_{n\infty}, \quad G_{in} = \rho V_n V - P_n - (\rho V_n V - P_n)_\infty \quad (i = 1, 2)$$

$$G_{4n} = (\rho H - p) V_n - P_n V - \mu P^{-1} n \operatorname{grad} h - (\rho H V_n)_\infty$$

Здесь  $P_n$  — нормальная составляющая тензора напряжений,  $n$  — внешняя нормаль к выбранной поверхности. Газодинамические функции с индексом  $\infty$  являются постоянными.

Проведем вдоль (и внутри) ударной волны, точнее в области резких изменений параметров, некоторую непрерывную гладкую линию  $L$  и введем связанную с ней ортогональную систему координат  $x, y$  ( $x$  — дуга вдоль линии  $L$ ,  $y$  — расстояние по нормали к ней). Выделим в рассматриваемой области площадку (в осесимметричном случае — сечение кольцевого элемента меридиональной плоскостью  $\varphi = \text{const}$ )

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x, \quad 0 \leq y < \infty.$$

Тогда (2.1) можно записать в виде

$$\int_0^\infty G_x(x + \Delta x, y) H_\varphi dy - \int_0^\infty G_x(x, y) H_\varphi dy - \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} G_y(x, 0) H_x H_\varphi dx = 0$$

где  $H_x, H_\varphi$  — коэффициенты Ляме. Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем

$$G_{iy} = \frac{1}{H_x H_\varphi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty G_{ix} H_\varphi dy \quad (2.2)$$

Если пренебречь в соотношениях (2.2) вязкими членами, то уравнения  $G_{iy} = 0$  дадут условия совместности Ренкина — Гюгонио на линии разрыва  $L$ . Если течение газа не зависит от  $x$ , то соотношения  $G_{iy} = 0$  с добавлением уравнения состояния и условия зависимости вязкости от энthalпии  $h$  образуют полную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, являющуюся автомодельным решением уравнений Навье — Стокса типа решения Беккера. Но можно показать, например, как в работе [14], что уравнения

$$G_{iy} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.3)$$

определяют структуру ударной волны в общем случае с точностью до членов порядка  $\mu(R^{-1})$  по сравнению с величинами с индексом  $\infty$  в соотношениях (2.2).

Таким образом, соотношения (2.3) описывают с точностью  $O(R^{-1})$  структуру ударной волны, определяемой моделью уравнений Навье — Стокса. Если имеем дело не со скачком уплотнения в неограниченном объеме газа, а рассматривается задача, где граничные условия, например, на обтекаемом теле могут влиять на структуру и расположение ударной волны, то решение (2.3) необходимо каким-то образом сопрягать с решением уравнений Навье — Стокса в примыкающей к волне области вдоль некоторой линии  $L$ . Но имеется один класс задач, для которых (2.3) можно использовать как граничные условия, не интересуясь при этом самой структурой волны, или решением системы (2.3). Это имеет место в том случае, когда ударная волна примыкает к области, где асимптотическое приближение уравнений Навье —

Стокса ( $R^{-1} \ll 1$ ) имеет пониженный порядок. Тогда вместо задания, например, четырех параметров на бесконечности для полной системы Навье — Стокса нужно задать в связи с понижением порядка уравнений три условия на бесконечности. Но вместо этого можно задать четыре условия (2.3) на линии  $L$ , причем добавочное условие позволяет найти саму линию. Именно в этом смысле соотношения (2.3) будут обобщением условий Ренкина — Гюгонно. Причем, когда они используются как граничные условия, то газодинамические функции и их производные по  $y$  на линии  $L$ , очевидно, должны подчиняться принятым в основной области оценкам.

В произвольной системе координат, вообще говоря, не связанной с линией  $L$ , обобщенные условия Ренкина — Гюгонно можно записать в виде  $G_{in} = 0$ , или

$$\begin{aligned} \rho V_n &= \rho_\infty V_{n\infty}, & \rho V_n V_\tau - \mu \partial V_\tau / \partial n &= \rho_\infty V_{n\infty} V_{\tau\infty} \\ \rho V_n^2 + p - (4/3\mu + \mu') \partial V_n / \partial n &= \rho_\infty V_{n\infty}^2 + p_\infty \\ \rho V_n H - \mu V_\tau \partial V_\tau / \partial n - (4/3\mu + \mu') V_n \partial V_n / \partial n - \mu P^{-1} \partial h / \partial n &= \rho_\infty V_{n\infty} H_\infty \\ [H &= h + 1/2 (V_\tau^2 + V_n^2)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $\tau, n$  — касательное и нормальное к  $L$  направления.

Таким образом, строгими асимптотическими условиями на ударной волне при приближении Эйлера для уравнений Навье — Стокса являются условия Ренкина — Гюгонно, а для приближений типа уравнений Прандтля (1.2) — обобщенные условия (2.4). Хотя уравнения (2.4) описывают и асимптотическую структуру ударной волны, но для определения динамического и теплового воздействия газа на тело, т. е. для решения уравнений (1.2), нет необходимости находить решение (2.4). Такая необходимость возникла бы, если в асимптотических уравнениях сохранялся член со вторыми производными от  $v$ . В этом случае необходимо каким-то образом сопрягать решение в пристеночном слое с решением в ударной волне. Отметим без вывода, что такая картина возникает при обтекании тонких тел при умеренных числах  $R$ .

Возвращаясь к исходной задаче упростим обобщенные условия Ренкина — Гюгонно. Подставляя разложения (1.1) в (2.4), получаем

$$\begin{aligned} v_\infty (u - u_\infty) &= m \mu u_y, & \rho v &= v_\infty + \rho u y_s', & p &= p_\infty + v_\infty^2 \\ v_\infty (H - H_\infty) &= m \mu P^{-1} [H_y + (P - 1) u u_y] & (H &= h + 1/2 u^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $y_s = y_s(x)$  — уравнение линии  $L$ , являющейся границей переходной зоны (ударной волны) и рассматриваемого в п. 1 возмущенного слоя вблизи тела (вязкого ударного слоя). Отметим, что аналогичные (2.5) условия были получены также в работе [7] из других предпосылок.

**3. Аналитическое решение уравнений для сферы.** Рассмотрим задачу гиперзвукового обтекания сферы, описываемую уравнениями (1.2). Полученное в работе [6] решение этой задачи недостоверно из-за использования неправильных граничных условий.

Введем переменные Дородницына  $x, \eta$

$$\eta = \int_0^y \rho dy, \quad V = \rho v + u \eta_x$$

Тогда если, как в работе [6], принять для вязкости функциональную зависимость  $l \equiv \mu \rho = l_0(\eta) \cos x$  (это соотношение достаточно точно выполняется в окрестности критической точки и вдоль ударной волны при небольших  $m$ ), то поставленная выше задача имеет автомодельное решение следующего вида:

$$\begin{aligned} u &= u_0(\eta) \sin x, & V &= -v_0(\eta) \cos x, & p &= p_0(\eta) + p_1(\eta) \sin^2 x, \\ h &= h_0(\eta) + h_1(\eta) \sin^2 x \end{aligned}$$

где  $f_i(\eta)$  определяются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 2u_0 - v_0' &= 0, & u_0^2 - vu_0' &= m(l_0u_0')', & p_0' &= 0, & p_1' &= u_0^2 \\ -v_0h_0' &= mP^{-1}(l_0h_0')', & 2u_0H_1 - v_0H_1' &= m[P^{-1}(l_0h_1')' + (l_0u_0u_0')'] \\ & & (H_1 &= h_1 + 1/2u_0^2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \eta = 0, & \quad u_0 = v_0 = 0, & h_0 &= h_w, & h_1 &= 0 & (h_0' = h_1' = 0) \\ \eta = \eta_s \equiv \Delta, & \quad u_0 + ml_0u_0' = 1, & v_0 &= 1, & p_0 &= 1, & p_1 = -1 \\ h_0 + ml_0P^{-1}h_0' &= H_\infty, & H_1 + ml_0(1 - P^{-1})u_0u_0' &= 0 \end{aligned}$$

Для получения наглядных аналитических результатов положим в уравнениях (3.1)

$$l_0 = l_*(h_*) = \text{const} \quad (h_* = 1/2(h_s + h_w))$$

Для теплоизолированной поверхности это предположение близко к действительности, для холодной стенки можно попробовать улучшить результаты за счет выбора среднего значения  $h_*$ .

Тогда получим

$$u_0 = \eta/\Delta^2, \quad v_0 = \eta^2/\Delta^2, \quad p_0 = 1,$$

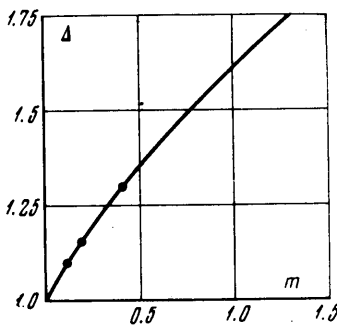
$$p_1 = -1 - \frac{1}{3\Delta} \left(1 - \frac{\eta^3}{\Delta^3}\right)$$

$$\frac{h - h_w}{H_\infty - h_w} = \frac{\gamma^{1/3}(t)}{\Delta [\gamma^{1/3}(\omega) + \omega^{-2/3} e^{-\omega}]} \quad (3.2)$$

$$(t = \omega(\eta/\Delta)^3, \quad \omega = \Delta P/3ml_*) \quad (3.2)$$

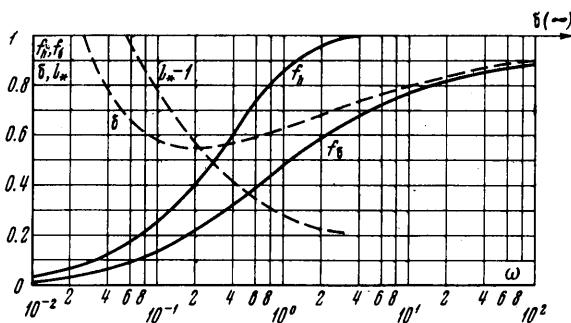
$$\Delta = 1/2(1 + \sqrt{1 + 4ml_*}) \quad (3.3)$$

где  $\gamma^{1/3}(t)$  — неполная  $\gamma$ -функция порядка  $1/3$ .



Фиг. 1

Рассмотрим некоторые полезные следствия этих решений. Отход граничной линии от тела возрастает с ростом  $m$  (вязкости) и дается формулой (3.3). В работе [6] эта величина принята равной единице, что вносит существенные ошибки при больших  $m$  не только в отход, но и в другие физические параметры. На фиг. 1 приведена зависимость от  $m$  величины отхода  $\Delta$ , вычисленной согласно (3.3), для теплоизолированной стенки; там же точками указаны результаты решения почти полных уравнений Навье — Стокса, полученные А. И. Толстых [5]. Несмотря на довольно



Фиг. 2

большое значение параметра  $k \approx 0.17$ , результаты практически совпадают. Для холодной стенки физический отход надо уточнить с использованием (3.2) по формуле

$$\frac{\delta H_\infty}{\Delta} = h_w + (H_\infty - h_w) f_\delta \quad \left( \delta = \int_0^\Delta \rho^{-1} d\eta, f_\delta = \frac{3\omega I_2(\omega) e^\omega}{1 + 3\omega I_1(\omega) e^\omega} \right) \quad (3.4)$$

Приведем для удобства выражения для  $I_1$  и  $I_2$

$$I_1(\omega) = \frac{\gamma_{1/2}(\omega)}{3\omega^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\omega^n}{1 + 3n}$$

$$I_2(\omega) = \frac{1}{3} \left[ \frac{\gamma_{1/2}(\omega)}{\omega^{1/2}} - \frac{\gamma_{2/2}(\omega)}{\omega^{2/2}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\omega^n}{(1 + 3n)(2 + 3n)}$$

При малых  $\omega$  ( $\omega < 2$ ) удобно вычислять функции по рядам

$$I_1(\omega) = 1 - \frac{1}{4}\omega + \frac{1}{14}\omega^2 - \frac{1}{60}\omega^3 + \frac{1}{312}\omega^4 - \frac{1}{1920}\omega^5 + \dots$$

$$I_2(\omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}\omega + \frac{1}{112}\omega^2 - \frac{1}{660}\omega^3 + \frac{1}{4508}\omega^4 + \dots$$

При больших  $\omega$  ( $\omega \geq 2$ ) имеем

$$I_1(\omega) = \frac{1}{3}\omega^{-1/2}(2.68 - \omega^{-1/2}e^{-\omega}), \quad I_2(\omega) = \frac{1}{3}\omega^{-1/2}(2.68 - 1.35\omega^{-2/3})$$

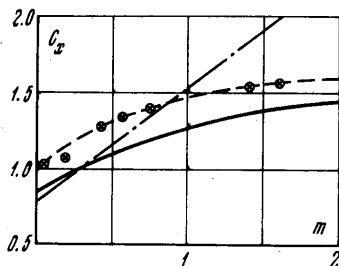
Отсюда легко получить, что  $f_\delta \approx 1 - 0.503\omega^{-1/2}$  при  $\omega \geq 2$ . На фиг. 2 приведена функция  $f_\delta$ , позволяющая вычислять  $\delta$  при произвольном  $h_w/H_\infty$ , а также величина  $\delta$  для охлаждаемой стенки при  $h_w/H_\infty = 0.05$ . Видно, что отход ударной волны для охлаждаемого тела с уменьшением  $\omega(R)$  сначала уменьшается, затем при приближении к области смешанного течения начинает расти.

Коэффициенты давления  $C_p$ , трения  $C_f$  на поверхности сферы, а также суммарный коэффициент сопротивления  $C_x$  имеют вид

$$C_p = \frac{p_w - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = 2 - \left( 2 + \frac{2}{3\Delta} \right) \sin^2 x$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2m_*}{\Delta^2} = \frac{8m_*}{(1 + \sqrt{1 + 4m_*})^2}$$

$$(m_* = ml_*)$$



Фиг. 3

$$C_x = \frac{3\Delta}{1 + 3\Delta} + \frac{m_*}{\Delta^2}$$

При  $m_* \rightarrow 0$  эти соотношения переходят к соответствующим формулам свободно-молекулярного течения. Известно, что в ньютоновском приближении с учетом центробежных сил (формула Ньютона — Буземана) давление на сфере при  $x = 60^\circ$  обращается в нуль. В работе [6] сохраняется такое же распределение давления и при учете вязкости, тогда как из приведенной выше формулы следует, что с увеличением  $m_*$  точка равенства нулю давления сдвигается вниз по потоку и при  $m_* \rightarrow \infty$  имеет место свободно-молекулярный режим  $p_w = \cos^2 x$ .

На фиг. 3 приведена зависимость  $C_x = C_x(m)$  (сплошная линия). Там же приведена формула В. Н. Шидловского  $C_x = 0.75 + \frac{11}{15}m$  (штрих-пунктирная линия) и экспериментальные данные [12] (крестики). Экспериментальные точки на 15–20% выше, но если формулу для  $C_x$  написать в виде  $C_x = 3\Delta / (1 + 3\Delta) + m / \Delta^2$ , где постоянную  $A$  подбирать из условия совпадения  $C_x$  при  $m \rightarrow 0$  с экспериментальными данными, то эта кривая практически совпадает с экспериментальными данными.

Профили энтальпии в рассматриваемой зоне вблизи тела могут быть найдены из формул (3.2), причем для вычисления  $\gamma_{1/2}(t)$  можно использовать формулы для

$I_1(\omega), I_2(\omega)$ . Энтальпия  $h_s$  на внешней границе зоны, на ударной волне, имеет вид

$$\frac{h_s - h_w}{H_\infty - h_w} = \frac{3\omega I_1(\omega)e^{\omega}}{1 + 3\omega I_1(\omega)e^{\omega}} \equiv f_h \quad \left( \text{при } \omega \geq 2 \quad f_h \approx 1 - \frac{\omega^{-2/3}e^{-\omega}}{2.68} \right)$$

На фиг. 2 показана функция  $f_h(\omega)$ . Плотность можно получить из приближенного уравнения  $\rho = H_\infty / h$  ( $Z_{0p} \approx 1$ ). Плотность  $\rho_s$ , вообще говоря, не совпадает с плотностью за прямой ударной волной  $\rho = 1$ . Соответственно, и  $l_s = \rho_s \mu_s$  также будет отличаться от единицы. Поэтому среднее значение зависит не только от  $h_w / H_\infty$ , но и от  $\omega$ . На фиг. 2 приведена функция

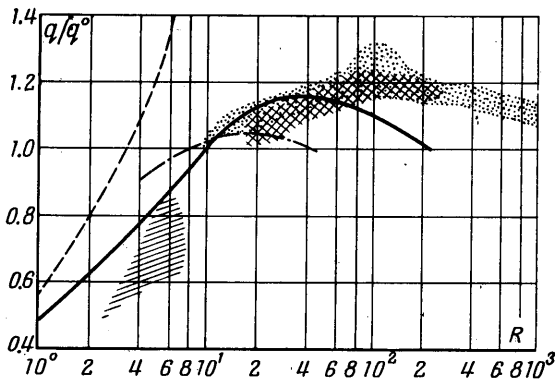
$$l_s = l_*(h_s) = (h_s / H_\infty)^{-n}$$

при  $h_w / H_\infty = 0.05$   
и  $n = 0.33$

Тепловой поток в критической точке можно найти из соотношений

$$C_h = \frac{q}{\rho_\infty V_\infty^2 (H_\infty - h_w)} = \frac{e^\omega}{1 + 3\omega I_1(\omega)e^\omega}$$

( $q = \lambda_* T_v(0)$ )



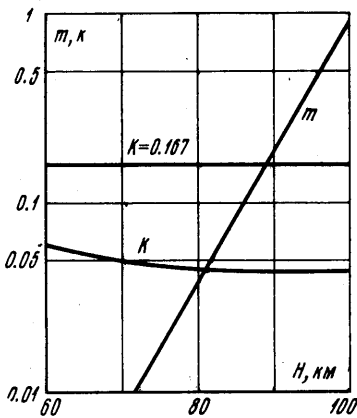
Фиг. 4

При  $\omega \rightarrow 0$  тепловой поток стремится к своему значению в свободно-молекулярном течении, т. е.  $C_h \rightarrow 1 - 2\omega \rightarrow 1$ , а при  $\omega \geq 2$  имеет место  $C_h \approx \omega^{-2/3} / 2.68$ .

На фиг. 4 показано отношение  $q$  к тепловому потоку  $q^0$ , определяемому уравнениями пограничного слоя, в зависимости от  $R$  при  $k = 0.10$ . Там же показаны результаты А. И. Толстых и экспериментальные данные, взятые из работы [13].

Можно показать, что при  $m \ll 1$  имеет место  $q / q_0 \sim m^{1/6} (2k)^{-1/4}$ . Отсюда следует, что нижняя граница  $m$  по тепловым потокам определяется неравенством  $m > (2k)^{3/2}$ , хотя решение получено в предположении  $m \geq k$ , точнее  $k/m \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ . При оценке верхней границы возникает ряд вопросов, хотя формальный переход  $m \rightarrow \infty$  и дает физически правдоподобное решение для свободно-молекулярного потока, в частности: до каких пор можно применять уравнение Навье — Стокса, следует ли вводить скольжение или температурный скачок на поверхности тела. Отметим еще, что при больших  $m$  искомая граничная линия удаляется от тела по закону  $\delta \sim km^{1/2}$  и решение, в основном, определяется процессами в отброшенной нами зоне от этой линии до невозмущенного потока (например,  $h_s \rightarrow h_w$ ). Этот режим необходимо исследовать особо.

Рассмотрим теперь, каким же высотам атмосферы Земли соответствует рассмотренный выше диапазон. На фиг. 5 приведены зависимости  $m$



Фиг. 5

и  $k$  от высоты полета сферы диаметром 1 м со скоростью 8 км/сек, полученные в предположении равновесных физико-химических превращений в окрестности критической точки. Там же показана прямая  $k = 0.167$  для сравнения влияния диссоциации. Из кривых видно, что предлагаемый метод может быть применен начиная с высот порядка 80 км, а с точки зрения расчета тепловых потоков и ниже. Отсюда, в частности, следует справедливость вывода работы [2], что на этих высотах является сомнительным отдельный расчет неравновесных физико-химических процессов для невязкого потока.

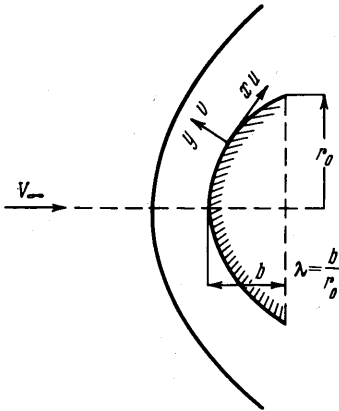
4. Асимптотические уравнения гиперзвукового обтекания тупых тел с учетом вязкости в общем случае. Рассмотрим гиперзвуковые течения около тупых тел удлинения  $\lambda = b/r_0$ , где  $r_0$  — радиус миделя и  $b$  — длина наветренной части тела (фиг. 6). Предполагается, что параметр  $\lambda$  характеризует эффективные кривизну и местный угол атаки образующей тела, а также удовлетворяет условию  $0 < \lambda \lesssim 1$ . В силу этого условия нормальная к телу составляющая скорости  $V_{n\infty} \sim O(1)$ .

Пусть  $k$  — основной малый параметр задачи. Из малости  $k$ , очевидно, следует и малость  $M_\infty^{-2}$ , например, для совершенного газа  $k = (\gamma - 1 + 2M_\infty^{-2}) / (1 + \gamma)$ , но величина  $kM_\infty^2$  может оставаться конечной при  $k \rightarrow 0$ .

Другой малый параметр в уравнениях Навье — Стокса  $R^{-1}$  характеризует толщины размытой ударной волны, пограничного слоя вблизи тела, а при определенных значениях  $k$  и  $R^{-1}$  и толщину всего возмущенного слоя. Даже при  $m = R^{-1}/k \ll 1$  параметр  $R^{-1}$  нельзя отбрасывать при общем рассмотрении, так как он входит в члены со старшими производными. В отличие от обычного асимптотического исследования течения вязкого газа около тупого тела при малом  $R^{-1}$  (см. [15]), дополнительное предположение о малости  $k$  позволяет существенно упростить задачу.

Для вывода упрощенных уравнений гиперзвукового обтекания при  $k \ll 1$  и  $R^{-1} \ll 1$  воспользуемся методом оценок. Пусть при  $k \rightarrow 0$  в возмущенной зоне координаты и газодинамические величины имеют следующие порядки:

$$\begin{aligned} x &= O(1), & y &= O(\delta), & u &= O(\tau_u), \\ & & v &= O(\tau_v) \\ p &= O(1), & h &= O(1), & \rho &= O(k^{-1}) \end{aligned} \quad (4.1)$$



Фиг. 6

Выбор порядка изменения давления следует, например, из ньютоновского распределения давления при конечных  $\lambda$  ( $p \sim V_{n\infty}^2$ ). Связь величин  $\delta$ ,  $\tau_u$ ,  $\tau_v$  с известными параметрами задачи необходимо получить из уравнений Навье — Стокса и граничных условий.

Используя в качестве внешних граничных условий для возмущенного слоя обобщенные условия Ренкина — Гюгонио (2.4) и учитывая, что  $u_\infty = O(\lambda)$ ,  $v_\infty = O(1)$ ,  $\rho_\infty = 1$ , можно получить

$$\tau_u \sim (\lambda + \delta) / (1 + R^{-1}/\delta), \quad \tau_v \sim k(1 + \delta\tau_u/k) \quad (4.2)$$

Как и в п. 1, предполагается, что  $R^{-1}/\delta \lesssim O(1)$ , т. е.  $1 + R^{-1}/\delta = O(1)$ , где  $\delta$  — порядок толщины всего возмущенного слоя.

Подставляя оценки (4.1) в уравнения Навье — Стокса и сводя коэффициенты при основных членах к единице, получим

$$1 \quad \tau_v / (\delta\tau_u) \\ [(r + y \sin\theta)^j \rho u]_x + [(1 + \kappa x)(r + y \sin\theta)^j \rho v]_y = 0 \quad (4.3)$$

$$1 \quad \tau_v / (\delta\tau_u) \quad \lambda\tau_v / \tau_u \quad k / \tau_u^2 \quad kR^{-1} / (\delta\tau_u) \\ u \frac{u_x}{1 + \kappa y} + v u_y + \frac{\kappa v}{1 + \kappa y} + \frac{p_x}{\rho(1 + \kappa y)} = \frac{R^{-1}}{\rho} \{[\mu u_y]_y [1 + O(\delta_\mu)]\} \quad (4.4)$$

$$\tau_u \tau_v \delta / k \quad \tau_v^2 / k \quad \lambda \tau_u^2 \delta / k \quad 1 \quad \delta \tau_v R^{-1} / \delta_\mu \quad (4.5)$$



$$u \frac{v_x}{1 + \kappa y} + v v_y - \frac{\kappa u^2}{1 + \kappa y} + \frac{p_y}{\rho} = \frac{R^{-1}}{\rho} \{O(\delta_\mu^{-1})\}$$

$$1 \quad \tau_v / (\delta \tau_u) \quad k R^{-1} / (\tau_u \delta_\mu^2) \quad k \tau_u R^{-1} / \delta_\mu^2$$

$$u \frac{H_x}{1 + \kappa y} + v H_y = \frac{R^{-1}}{\rho} \{P^{-1}(\mu h_y)_y + (u \mu u_y)_y [1 + O(\delta_\mu^{-1})]\} \quad (4.6)$$

Из уравнения (4.3) следует, что  $\tau_v / (\delta \tau_u) = O(1)$ , ибо в противном случае уравнение неразрывности вырождается и нельзя удовлетворить граничному условию прилипания на теле. Из этого соотношения с учетом (4.2) можно получить

$$\frac{k}{\delta(\lambda + \delta)} = c = O(1), \quad \delta = -\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{k}{c}} \quad (4.7)$$

Отсюда видно, что при произвольном  $\lambda$  при  $k \rightarrow 0$   $\delta \rightarrow 0$ , причем для  $\lambda = O(1)$  имеем  $\delta = O(k)$ , а для  $\lambda^2 \leq k$  получим  $\delta = O(k^{1/2})$ . Поэтому можно написать условные неравенства  $k \leq \delta \leq k^{1/2}$ . Из этих неравенств с учетом (4.7) следует, что

$$1 + \kappa y = 1 + O(\lambda \delta) = 1 + O(k + \delta^2) = 1 + O(k)$$

Третий член слева в уравнении (4.4) имеет также порядок  $\lambda \delta = O(k)$ . При помощи соотношения  $\delta^2 \tau_u^2 / k = O(k)$  можно убедиться, что первые два члена (4.5) имеют порядок  $k$ . Порядок третьего члена уравнения (4.5), связанного с центробежными силами,  $\lambda \delta \tau_u^2 / k \leq \lambda(\lambda + \delta)$  и меняется от единицы для «гладких» тел ( $\lambda = O(1)$ ) до  $k$  для «сильно затупленных» тел ( $\lambda \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ ).

Рассмотрим порядки вязких членов. Здесь  $\delta_\mu$  характеризует толщину слоя, где вязкость существенна и меняется от толщины пограничного слоя до толщины всего возмущенного слоя  $\delta$ . Последний случай будет иметь место, например, при  $R^{-1} / k = O(1)$  для гладких тел и при  $R^{-1} / k^{1/2} = O(1)$  для сильно затупленных тел. Но и в том и в другом случае вязкие члены в уравнении (4.5), а также отброшенные члены в уравнениях (4.4), (4.6) имеют более высокий порядок.

Оценим величину четвертого члена уравнения (4.4). Для гладких тел  $k / \tau_u^2 \sim k / (\lambda + \delta)^2 = O(k)$  и из оценок по параметрам на ударной волне этот член можно отбросить; для сильно затупленных тел  $k / \tau_u^2 = O(1)$ . В последнем случае из уравнения (4.5) следует  $p_y = O(k)$ , и, тогда формально  $p_x = \partial p / \partial x = dp_0(x) / dx$  с точностью до членов порядка  $k$ .

Приведенные выше оценки, основанные на порядках величин вдоль ударной волны, могут нарушаться при  $R^{-1} / k \ll 1$  в пристеночном слое вблизи тела. Действительно, полагая в уравнении (4.4)  $R^{-1} = 0$  и  $v = 0$ , получаем  $u = O(k^{1/2})$ , тогда как для гладких тел  $u = O(1)$ . Приведем для этого слоя оценки, полагая его толщину величиной порядка  $\delta_0$

$$u = O(\tau_u) = O(k^{1/2}), \quad v = O(\tau_v), \quad p = O(1)$$

Из уравнения неразрывности опять получаем  $\tau_v / (\delta_0 k^{1/2}) = O(1)$ , и отличие от основного случая будет заключаться в том, что  $k / \tau_u^2 = O(1)$  и член нельзя отбрасывать. Так как из (4.5) следует  $p_y = 0$ , то в пристеночном слое  $p_x = dp_0 / dx = p_0'$ , где  $p_0(x)$  — давление на поверхности тела.

Таким образом, при  $k \rightarrow 0$  асимптотические уравнения гиперзвукового обтекания тупых тел конечной толщины ( $0 < \lambda \sim O(1)$ ) с учетом вязкости имеют вид

$$(u p r^j)_x + (v p r^j)_y = 0, \quad u u_x + v u_y + \rho^{-1} p_0'(x) = \rho^{-1} R^{-1} (\mu u_y)_y$$

$$p_y = \kappa \rho u^2, \quad u H_x + v H_y = \rho^{-1} R^{-1} [P^{-1}(\mu h_y)_y + (\mu u u_y)_y] \quad (4.8)$$

$$\rho = p Z(p, h) / h, \quad \mu = \mu(p, h), \quad H = h + 1/2 u^2$$

На ударной волне должны выполняться обобщенные условия Ренкина — Гюгонно (2.4). Эти условия можно упростить в соответствии с оценками (4.1). Тогда имеем

$$\rho V_n - \rho_\infty V_{n\infty} = 0, \quad \rho_\infty V_{n\infty} (V_\tau - V_{\tau\infty}) = R^{-1} \mu u_y \quad (4.9)$$

$$p - \rho_\infty V_{n\infty}^2 = 0, \quad \rho_\infty V_{n\infty} (H - H_\infty) = R^{-1} (P^{-1} \mu h_y + \mu u u_y)$$

Рассмотрим некоторые свойства полученных уравнений.

1. В случае гиперзвукового обтекания гладких тупых тел (сфера, параболоид, эллипсоиды с отношением осей порядка 1 и т. п.) уравнения в переменных Дородницына могут быть записаны в форме

$$(ur^j)_x + (Vr^j)_\eta = 0, \quad uu_x + Vu_\eta + \rho^{-1}p_0'(x) = R^{-1}(\mu\sigma u_\eta)_\eta \quad (4.10)$$

$$p_\eta = \kappa u^2, \quad uH_x + VH_\eta = R^{-1}[P^{-1}(\mu\sigma h_\eta)_\eta + (\rho\mu uu_\eta)_\eta]$$

$$\left( \eta = \int_0^y \rho dy, \quad V = \rho v + u\eta_x \right)$$

$$u = V = 0, \quad h = h_w (h_\eta = 0) \quad \text{при } \eta = 0$$

$$\rho_\infty v_\infty (u - u_\infty) = R^{-1}\mu\sigma u_\eta, \quad V = v_\infty + u\eta_x' \quad (4.11)$$

$$p = v_\infty^2, \quad \rho_\infty v_\infty (H - H_\infty) = R^{-1}\mu\sigma (P^{-1}h_\eta + uu_\eta) \quad \text{при } \eta = \eta_s(x)$$

Граничные условия (2.5), справедливые, вообще говоря, лишь для гладких тел, и уравнения типа (4.8) использовались Ченгом [7] для численного расчета некоторых задач гиперзвукового обтекания тел. Но здесь в отличие от Ченга частная производная от давления по  $x$  заменена на полную производную по  $x$  от давления на теле,

что является асимптотически верным и существенно облегчает решение задачи, в частности делает справедливым преобразование Дородницына. Задача (4.10), (4.11) имеет замкнутое решение в окрестности критической точки, т. е. система обыкновенных дифференциальных уравнений для первых членов разложения функций по  $x$  является замкнутой. Это означает, что уравнения параболического типа (4.10) можно решать по  $x$  шаг за шагом, начиная от линии  $x = 0$ . Отметим, что численное решение (4.10) в окрестности критической точки сферы в диапазоне  $R = 10 \div 10^4$  плавно меняется от решения п. 3 до обычного режима невязкое течение — пограничный слой.

2. В общем случае условие для касательной составляющей скорости на ударной волне имеет вид

$$u - (\rho_\infty V_{n\infty})^{-1} R^{-1} \mu u_y = u_\infty + v_\infty y_s'$$

и при  $\lambda \sim O(\delta)$  нельзя пренебрегать вторым слагаемым в правой части. Это приводит к тому, что, во-первых, решение в окрестности критической точки не замкнуто из-за появления неизвестного параметра — радиуса кривизны ударной волны и, во-вторых, преобразование Дородницына не справедливо для граничных условий.

3. Рассмотрим уравнения (4.8) при  $R^{-1} = 0$  (невязкое гиперзвуковое обтекание). Вводя в качестве независимых переменных  $x, \psi$  ( $\psi$  — функция тока [18]) и используя соотношения

$$\rho^{-1} = h / (Zp_0) = (H_\infty - 1/2 u^2) / (Zp_0)$$

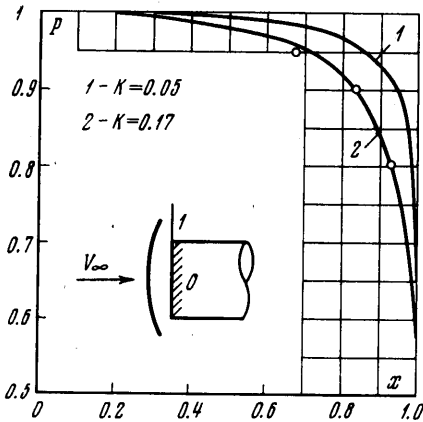
из второго уравнения (4.8), можно получить

$$u^2 = 2H_\infty - p_0^\varepsilon(x)\Phi(\psi) \quad (\varepsilon = Z^{-1}) \quad (4.12)$$

Для гладких тел условия на волне позволяют выразить  $\Phi$  через  $p_0$  и для нахождения давления на теле из третьего уравнения (4.8) получаем интегральное уравнение ( $j = 1$ )

$$p_0(r) = p_s(r) - \frac{\kappa}{r} \int_0^{r^2/2} u d\psi \quad \left( u^2 = 2H_\infty - p_0^\varepsilon(r) \frac{2H_\infty - u_\infty^2(\sqrt{2\psi})}{p_0^\varepsilon(\sqrt{2\psi})} \right) \quad (4.13)$$

При  $\varepsilon = 0$  эта формула совпадает с формулой Буземана. Остальные параметры задачи могут быть получены затем в квадратурах.



Фиг. 7

Для сильно затупленных тел  $p_0(x) = p_s(x)$  и на ударной волне (4.12) дает функциональную связь между  $\Phi$  и углом наклона волны. Интегро-дифференциальное уравнение для формы волны имеет вид

$$y_s = \frac{1}{2Z\rho_0 r} \int_0^{r^2/2} \frac{2H_\infty - u^2}{u} d\psi \quad (4.14)$$

Приведем без вывода решение в окрестности осесимметричной критической точки

$$\begin{aligned} u &= (\sqrt{2kb} + \kappa_s \eta) \kappa_s x + \dots, & v &= -2k\kappa_s \eta (\sqrt{2kb} + 1/2\kappa_s \eta) + \dots \\ p &= p_s(0) + p_2(\eta) \kappa_s^2 \eta^2 + \dots & \left( p_2 &= -b + \frac{\kappa}{\kappa_s^2} \int_0^\eta u^2 d\eta, \eta = \int_0^y \rho dy \right) \\ b &= 1 + 1/3\kappa / \kappa_s, & \Delta \kappa_s &= \kappa_s \delta / k = (1 + \sqrt{2kb})^{-1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Если для гладких тел в силу условия  $u_s = u_\infty$  имеем  $\kappa_s = \kappa$  и задача замкнута, то для сильно затупленных тел  $\kappa_s$  нельзя определить, рассматривая течение в окрестности критической точки. В связи с тем, что для диска  $\kappa = 0$ ,  $\kappa_s \sim k^{1/2}$ ,  $\delta \sim k^{1/2}$  и изменение давления в окрестности  $x = 0$  имеет порядок  $k$ , этот случай необходимо исследовать особо для более точного определения асимптотики  $p(k)$ . Тем не менее уравнения (4.12), (4.14) с граничным условием на угловой звуковой точке удовлетворительно описывают течение в целом и для этого случая. Отличие от решения полных уравнений в отходе волны и распределения давления по телу не превышает 5% даже при  $k = 0.17$  (фиг. 7). Численные результаты, полученные А. С. Холодовым, отмечены на графике кружочками.

4. Для решения уравнений вязкого обтекания может быть предложен метод последовательных приближений  $L(\Phi_{n+1}) = kQ(\Phi_n)$ . Асимптотические уравнения получаем в первом же приближении, если в качестве нулевого приближения задавать параметры на поверхности тела.

Итак, гиперзвуковое ( $k \ll 1$ ) обтекание тупых тел во всем диапазоне изменения чисел  $R$ , где справедливы уравнения Навье — Стокса, описываются уравнениями (4.8) с обобщенными условиями Ренкина — Гюгонио (4.9). Можно выделить три режима в зависимости от чисел Рейнольдса  $R$ :

- 1) режим пограничного слоя  $R^{-1} \ll \delta^2$ ;
- 2) режим вихревого взаимодействия  $R^{-1} < \delta^2$ ;
- 3) режим вязкого слоя  $\delta^2 \lesssim R^{-1} \lesssim \delta^{1/2}$ .

Величина  $\delta$ , характеризующая толщину возмущенного слоя от тела до «заднего» фронта ударной волны, меняется в пределах  $k \lesssim \delta \lesssim k^{1/2}$  (гладкие тела — сильно затупленные тела), т. е. режим течения зависит не только от  $R$  и  $k$ , но и от формы тела. В зависимости от режима течения могут быть сделаны определенные упрощения в уравнениях или граничных условиях. Для вязкого слоя необходимо использовать обобщенные условия Ренкина — Гюгонио, но член с  $p_x$  в уравнениях можно опустить. Одна из задач подобного типа исследовалась в п. 2. Эта задача относится к обтеканию гладких тел. Для сильно затупленных тел или для промежуточных случаев это решение будет иметь другой вид. Для режима вихревого взаимодействия в граничных условиях (2.4) можно пренебречь вязкими членами, т. е. использовать обычные условия Ренкина — Гюгонио. Уравнения (4.8) сохраняют свой вид. В случае первого режима можно использовать классический подход решения уравнений Навье — Стокса: сначала решаются уравнения (4.8) без вязкости и условия прилипания (упрощенные уравнения Эйлера), затем решаются асимптотические уравнения пограничного слоя (уравнения Прандтля). При этом решение внешней задачи для уравнений (4.8), как уже указывалось, сводится к решению одного интегро-дифференциального уравнения.

Автор благодарит О. М. Белоцерковского, В. В. Лунева и В. В. Сычева за внимание к работе и полезное обсуждение.

Поступила 5 II 1969

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Авдеевский В. С., Иванов А. В. Течение разреженного газа вблизи передней критической точки затупленного тела при гиперзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
3. Павлов Б. М. Численное решение задачи о сверхзвуковом вязком течении газа около затупленных тел. Сб. работ ВЦ МГУ 1968, № 11.
4. Исследование гиперзвуковых течений. Сб. статей. М. «Мир», 1964.
5. Белоцерковский О. М., Булекбаев А., Голомазов М. М. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа (теорет. и эксперимент. исслед.). Изд. 2. М., Тр. ВЦ АН СССР 1967.
6. Шидловский В. П. К задаче об обтекании сферы сверхзвуковым потоком разреженного газа. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
7. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. Inst. Aeronaut. Sci. Paper, 1963, No. 63—92.
8. Мурзин И. Н. О теплообмене в критической точке тупого тела при малых числах Рейнольдса. ПМТФ, 1963, № 5.
9. Ермак Ю. Н., Нейланд В. Я. К расчету теплопередачи на лобовой поверхности затупленного тела в гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
10. Као Н. С. Hypersonic viscous flow near the stagnation streamline of a blunt-body. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 11.
11. Кочин Н. Е. К теории разрывов в жидкости. Собр. соч. Изд. АН СССР, 1949, т. 2, стр. 5—42.
12. Masson D. I., Morris D. N., Bloxson D. E. Measurement of sphere drag from hypersonic continuum to free-molecule flow. In: Rarefield Gas Dynamics, New York-London, Acad. Press, 1961.
13. Potter I. Z. The transitional rarefied-flow regime. Rarefied Gas Dynamics, 1966, vol. 2, New York—London, Acad. Press, 1967, p. 881—937.
14. Толстых А. И. О структуре криволинейной ударной волны. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
15. Марков А. А., Чудов Л. А. Асимптотическое исследование течения вязкого сжимаемого газа около затупленного тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
16. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.