

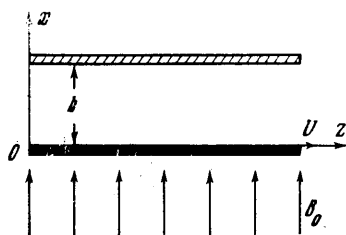
НЕСТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ИЗМЕНЕНИЕМ ВЕЛИЧИНЫ ПРИЛОЖЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. И. ХОЖАИНОВ

(Ленинград)

Большинство теоретических исследований нестационарного течения проводящей жидкости в каналах с непроницаемыми движущимися границами соответствует случаю, когда переходный процесс вызывается движением стенок канала [1-10]. Между тем нестационарное течение в таких каналах может быть обусловлено внезапным изменением величины приложенного магнитного поля. Известна лишь одна работа [11], в которой в точной постановке рассматривается такой тип течения. Однако полученное решение оказалось сложным; это затрудняет проведение анализа и расчетов; поэтому аналогичная задача изучается ниже в приближенной постановке.

1. Рассмотрим нестационарное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости между двумя параллельными плоскими стенками, одна из которых $x = 0$ является идеально проводящей и движется в своей плоскости с постоянной скоростью U_1 , другая — $x = b$ является изолятором и покоится. Однородное магнитное поле B_0 направлено перпендикулярно обеим пластинам (фиг. 1). Будем полагать, что нестационарный процесс вызывается мгновенным изменением величины приложенного магнитного поля. Последнее физически оправдывается в случаях, когда электромагнитные переходные процессы являются кратковременными по сравнению с магнитогиродинамическими.



Фиг. 1

сравнению с магнитогиродинамическими. Как и для каналов с неподвижными стенками [12], в рассматриваемом случае допустима приближенная постановка задач, позволяющая положить $E_y = 0$. При этом уравнение, подлежащее решению, принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{M^2 \nu}{b^2} v = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad M = bB_0 \left(\frac{\sigma}{\eta} \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

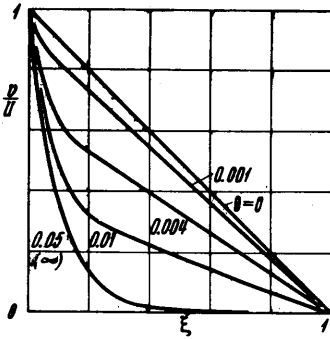
Здесь $v = v_z(x, t)$ — локальная скорость течения жидкости, M — число Гартмана; σ , η и ν — проводимость, динамическая и кинематическая вязкости жидкости.

Граничные условия

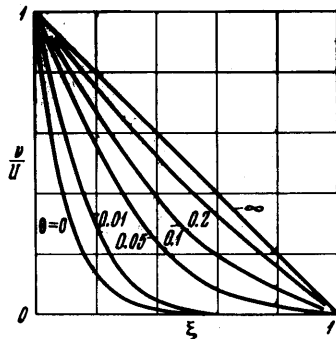
$$v(0, t) = U_1 = \text{const}, \quad v(b, t) = 0 \quad (1.2)$$

Начальное условие должно быть следующим:

$$v(x, 0) = v_0(x) = U_1 \frac{\text{sh } M_0(1 - x/b)}{\text{sh } M_0} \quad (1.3)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение задачи будем искать в виде

$$v(x, t) = F(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(t) \Psi_n(x) \quad (1.4)$$

где $F(x)$ соответствует асимптотическому значению v .

Подставив (1.4) в уравнение (1.1), получим три обыкновенных дифференциальных уравнения, решения которых известны

$$F''(x) - \frac{M^2}{b^2} F(x) = 0, \quad \Phi_n'(t) + \alpha_n^2 \Phi_n(t) = 0, \quad \Psi_n''(x) + \frac{\lambda_n^2}{b^2} \Psi_n(x) = 0$$

При этом решение для v в общем случае можно записать в виде

$$v(x, t) = C_1 \operatorname{ch} \frac{Mx}{b} + C_2 \operatorname{sh} \frac{Mx}{b} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\alpha_n^2 t) \left[B_n \cos \frac{\lambda_n x}{b} + D_n \sin \frac{\lambda_n x}{b} \right], \quad \alpha_n^2 = \frac{M^2 \nu}{b^2} + \frac{\lambda_n^2 \nu}{b^2} \quad (1.5)$$

Из граничных условий (1.2) следует:

$$C_1 = U_1, \quad C_2 = -U_1 \operatorname{cth} M, \quad B_n \equiv 0, \quad \lambda_n = \pi(n+1)$$

С учетом этого решение (1.5) приводится к виду:

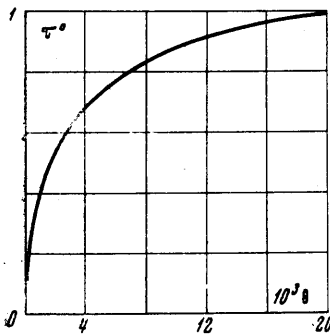
$$v(x, t) = U_1 \frac{\operatorname{sh} M(1-x/b)}{\operatorname{sh} M} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(-\alpha_n^2 t) \sin \frac{\lambda_n x}{b} \quad (1.6)$$

Коэффициенты ряда C_n определяются при $t=0$, исходя из условия (1.3).

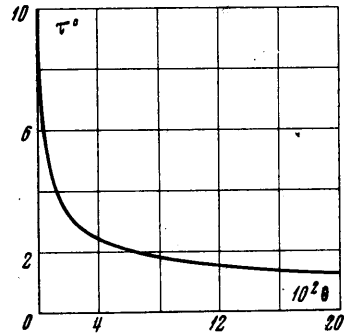
Для этого достаточно воспользоваться ортогональностью системы собственных функций $\varphi_n = \sin(\lambda_n x/b)$ в интервале от 0 до b . Умножив (1.6) на функцию φ_n и проинтегрировав полученное выражение в заданном интервале, получим

$$v(\xi, \theta) = U_1 \left[\frac{\operatorname{sh} M(1-\xi)}{\operatorname{sh} M} + 2(M^2 - M_0^2) \exp(-M^2 \theta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \exp(-\lambda_n^2 \theta) \sin \lambda_n \xi}{(\lambda_n^2 + M_0^2)(\lambda_n^2 + M^2)} \right] \quad (1.7)$$

$$\left(\xi = \frac{x}{b}, \theta = \frac{\nu t}{b^2} \right)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 2 и 3 представлены данные расчетов развития во времени профилей скорости течения жидкости соответственно для случаев включения ($M_0 = 0, \dot{M} = 10$) и отключения ($M_0 = 10, \dot{M} = 0$) магнитного поля. Из сравнения приведенных графиков следует, что развитие профиля скорости в первом и втором случаях является качественно различным. Причем в первом случае переходный процесс затухает значительно быстрее.

В соответствии с решением (1.7) касательное напряжение на движущейся пластине определится следующим выражением:

$$\tau(\theta) = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0} =$$

$$= -\eta U_1 \left[\frac{M}{\text{th } M} - 2(M^2 - M_0^2) \exp(-M^2 \theta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \exp(-\lambda_n^2 \theta)}{(\lambda_n^2 + M_0^2)(\lambda_n^2 + M^2)} \right] \quad (1.8)$$

Данные расчетов касательного напряжения на нижней пластине, выполненные для двух рассмотренных случаев включения и отключения магнитного поля, приведены соответственно на фиг. 4 и 5. Для наглядности текущие значения касательных напряжений отнесены к своим асимптотическим значениям $\tau^0 = \tau/\tau_{\infty}$.

2. Если в момент времени $t = 0$ наряду с мгновенным изменением величины приложенного магнитного поля нижняя пластина начинает двигаться произвольно во времени, то граничные условия должны быть записаны следующим образом:

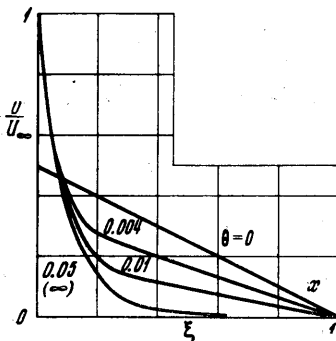
$$v(0, t) = U_1 + U_2(t), \quad v(b, t) = 0$$

при $t > 0$ (2.1)

В этом случае решение задачи можно искать в виде суммы $v = v_1 + v_2$, где v_1 удовлетворяет уравнению (1.1), граничным и начальным условиям (1.2) и (1.3), а v_2

удовлетворяет этому уравнению, нулевым начальным условиям и граничным условиям (2.1) при $U_1 = 0$.

Таким образом, поставленная задача разделяется на две. Первая из них определяет нестационарный процесс при постоянной скорости движения



Фиг. 6

нижней пластины за счет мгновенного изменения величины приложенного магнитного поля. Решение ее было получено выше. Решение второй задачи известно [6]¹. С учетом этого решение поставленной задачи можно представить в виде

$$v(\xi, \theta) = U_1 \left[\frac{\text{sh } M(1 - \xi)}{\text{sh } M} + \right. \tag{2.2}$$

$$\left. + 2(M^2 - M_0^2) \exp(-M^2\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n \exp(-\lambda_n^2\theta) \sin \lambda_n \xi}{(\lambda_n^2 + M_0^2)(\lambda_n^2 + M^2)} \right] + W(\xi, \theta)$$

$$W(\xi, \theta) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\theta \frac{U_2(\theta - \theta_1)}{\theta_1^{3/2}} \exp(-M^2\theta_1) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2n + \xi) \exp\left[-\frac{(2n + \xi)^2}{4\theta_1}\right] - \right. \tag{2.3}$$

$$\left. - [(2n + 2) - \xi] \exp\left[-\frac{[(2n + 2) - \xi]^2}{4\theta_1}\right] \right\} d\theta_1$$

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда при $t > 0$ приращение скорости движения нижней пластины во времени изменяется по экспоненциальному закону

$$U_2\theta = U_{2\infty}(1 - e^{-q^2\theta}) \tag{2, 4}$$

Тогда в решении (2.2) выражение $W(\xi, \theta)$ примет вид

$$W(\xi, \theta) = 1/2 U_{2\infty} [K_n(\xi, \theta) - e^{-q^2\theta} L_n(\xi, \theta)] \tag{2.5}$$

Здесь

$$K_n(\xi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ e^{-(2n+\xi)M} \text{erfc}(s_1) + e^{(2n+\xi)M} \text{erfc}(s_2) - e^{-[(2n+2)-\xi]M} \text{erfc}(s_3) - e^{[(2n+2)-\xi]M} \text{erfc}(s_4) \}$$

$$L_n(\xi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ e^{-(2n+\xi)\sqrt{m}} \text{erfc}(s_5) + e^{(2n+\xi)\sqrt{m}} \text{erfc}(s_6) - e^{-[(2n+2)-\xi]\sqrt{m}} \text{erfc}(s_7) - e^{[(2n+2)-\xi]\sqrt{m}} \text{erfc}(s_8) \}$$

$$m = M^2 - q^2, \quad \text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-s^2} ds, \quad s_{1,2} = \frac{(2n + \xi)}{2\sqrt{\theta}} \mp M\sqrt{\theta}$$

$$s_{3,4} = \frac{[(2n + 2) - \xi]}{2\sqrt{\theta}} \mp M\sqrt{\theta}, \quad s_{5,6} = \frac{(2n + \xi)}{2\sqrt{\theta}} \mp \sqrt{m\theta}$$

$$s_{7,8} = \frac{[(2n + 2) - \xi]}{2\sqrt{\theta}} \mp \sqrt{m\theta}$$

¹ В решении задачи, проведенном в [6], допущена опечатка: в формуле (3.10) под знаком интеграла отсутствует экспоненциальный член.

Так как $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$, $\operatorname{erfc}(-\infty) = 2$, то решение (2.2) для закона (2.4) при $\theta \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\begin{aligned} v(\xi) &= U_1 \frac{\operatorname{sh} M(1-\xi)}{\operatorname{sh} M} + U_{2\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+\xi)M} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-[(2n+2)-\xi]M} \right] = \\ &= U_{\infty} \frac{\operatorname{sh} M(1-\xi)}{\operatorname{sh} M} \end{aligned}$$

Здесь $U_{\infty} = U_1 + U_{2\infty}$.

На фиг. 6 представлены профили скорости течения жидкости, рассчитанные по выражению (2.2) с учетом (2.5) при следующих исходных данных:

$$M_0 = 0, \quad M = 10, \quad q^2 = \infty, \quad U_1 = U_{2\infty}$$

В заключение отметим, что решение (2.2) является обобщающим для широкого круга задач данного класса.

Поступило 27 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С., Чекмарев И. Б. О точном решении одной задачи магнитной гидродинамики. Ж. техн. физ., 1959, т. 29, № 11.
2. Уфлянд Я. С., Чекмарев И. Б. Исследование неустановившегося течения проводящей жидкости в плоском канале с движущимися границами. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 5.
3. Mei C. C. Unsteady incompressible Couette flow in a uniform transverse magnetic field. Appl. Sci. Res., 1960, A9, No. 4.
4. Tao L. N. Magnetohydrodynamic effects on the formation of Couette flow. J. Aero-Space Sci., 1960, vol. 27, No. 5.
5. Stanisic M. M., Fetz B. H., Mickelsen H. P., Czumak F. M. On the flow of a hydromagnetic fluid between two oscillating flat plates. J. Aero/Space Sci., 1962, vol. 29, No. 1.
6. Katagiri M. Flow formation in Couette motion in magnetohydrodynamic. J. Phys. Soc. Japan, 1962, vol. 17, No. 2.
7. Shair F. H. The transient interaction of a transverse magnetic field with fluid in Couette flow. Techn. Inform. Ser., R63SD 16, Space Sci. Laboratory, General Electric Missile and Space Division, 1962.
8. Rathu R. K. Unsteady flow of a conducting fluid between two plates under a transverse magnetic field. Appl. Sci. Res., 1963, Bd 10, No. 3, 4.
9. Poirier J. Etude theorique de certains mouvements d'entrainement d'un liquide par des parois planes, en presence d'un champ d'induction magnetique. C. R. Acad. Sci., Paris, 1967, t. 265, No. 25, A 889.
10. Vidyanidi V. Unsteady Couette flow of a conducting fluid between two parallel plates under a transverse magnetic field. Proc. Indian. Acad. Sci., 1968, A67, No. 4.
11. Vidyanidi V. Unsteady Couette flow of a conducting fluid between two parallel plates under a transverse magnetic field. II. Proc. Indian. Acad. Sci., 1968, A68, No. 2.
12. Рябинин А. Г., Хожанов А. И. О точной и приближенной постановках задач для нестационарных течений проводящей жидкости в магнитогидродинамических каналах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.