ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПЛОСКОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Л. ЯКИМОВ (*Москва*)

В работе получено точное выражение для силы, действующей на цилиндр переменного во времени радиуса, находящегося в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью.

Показано, что для цилиндра достаточно малого размера полученная формула может быть использована и при произвольной завихренности потока. Пусть

$$\mathbf{u}(x,\ y,\ t) = u_x + iu_y \tag{1}$$

вектор скорости произвольного плоского потока идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью в каждой точке потока

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \Omega \tag{2}$$

Прибавляя и вычитая к вектору скорости один и тот же вектор $\boldsymbol{\omega}(x,\ y,\ t)$, представляющий собой вращение всей плоскости как твердого тела около точки $Z_0(t) = x_0 + iy_0$, получаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = \Omega$$

$$\omega_x = -{}^1/_2\Omega(y - y_0), \ \omega_y = {}^1/_2\Omega(x - x_0)$$

Так как $\operatorname{rot}(\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) = \operatorname{rot}\mathbf{u} - \operatorname{rot}\boldsymbol{\omega} = 0$, вектор скорости $\mathbf{u}$ можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \overline{\frac{dw_1}{dz}} + \boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

Здесь $w_1(z,\ t)$ — некоторая комплексная функция. Предположим, что в некоторой окрестности точки $z_0(t)$ $w_1(z,\ t)$ может быть представлена в виде степенного ряда

$$w_1(z, t) = \sum_{2}^{\infty} c_k(t)(z - z_0)^k + \bar{u}_0(t)(z - z_0) + c_0(t) \tag{4}$$

Рассмотрим теперь следующее поле скоростей:

$$\mathbf{v}(x,\ y,\ t) = \overline{\frac{dw}{dz}} + \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\omega} \tag{5}$$

$$w(z,\ t) = w_1(z,\ t) + \left[R\frac{dR}{dt} + \frac{\gamma}{2\pi i}\right]\ln(z - z_0) + \frac{R^2(u_0 - V)}{z - z_0} + \sum_{2}^{\infty} \bar{c}_k R^{2k}(z - z_0)^{-k} =$$

$$= \sum_{2}^{\infty}[c_k r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) + \bar{c}_k R^{2k} r^{-k}(\cos k\theta - i\sin k\theta)] + \tag{6}$$

$$+ \bar{u}_0 r(\cos\theta + i\sin\theta) + C_0 + \left[R\frac{dR}{dt} + \frac{\gamma}{2\pi i}\right](\ln r + i\theta) + R^2(u_0 - V)r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

r, θ — полярные координаты с началом в точке z_0, R — радиус окружности с центром в точке z_0.

Из выражения (5), (6) следует выражение для нормальной составляющей скорости

$$v_n = \nu_n + \omega_n = \nu_r = \frac{\partial}{\partial r}(\operatorname{Re} w) = V_x\cos\Theta + V_y\sin\Theta + \frac{dR}{dt} \tag{7}$$

Таким образом поле скоростей $\mathbf{v}(x,\ y,\ t)$ удовлетворяет граничным условиям на движущемся со скоростью $\mathbf{V}(t)$ и расширяющемся $R(t)$ цилиндре, далеко от цилиндра

$$\mathbf{v}(x,\ y,\ t) \to \mathbf{u}(x,\ y,\ t) \tag{8}$$

При $R \to 0$ и $\gamma \to 0$, $v \to u$ в любой точке потока, отличной от z_0.

Рассмотрим одно из уравнений импульса в форме Лемба [1] в цилиндрических координатах:

$$\rho r \frac{dv_\theta}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{v^2}{2} + \rho r v_r \Omega = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{9}$$

Подставив в (9) выражение (5), получим

$$\rho r \frac{\partial \mathrm{v}_\theta}{\partial t} + \rho r \frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial \theta} [(\mathrm{v}_\theta + \omega_\theta)^2 + \mathrm{v}_r] + \rho r \mathrm{v}_r \Omega = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{10}$$

При вычислении давления P по окружности в данный момент времени $(t = 0)$ удобно перейти к подвижной системе координат, движущейся с постоянной скоростью $\mathbf{V} = V_x(0) + iV_y(0)$. В результате после формальных вычислений получим

$$\mathbf{F} = -\rho \frac{dS(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)}{dt} + \rho S \frac{d\mathbf{u}_0}{dt} + i\gamma(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)\rho + iS\Omega(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)\rho + 4S\rho[(u_{0x} - V_x) -$$

$$- i(u_{0y} - V_y)](\alpha - i\beta) + 2\pi\rho \sum_{k=2}^{\infty} k(k+1) c_k \bar{c}_{k+1} R^{2k} + i\rho R \frac{d\gamma}{dt} + i\rho\Omega \frac{dS}{dt} \tag{11}$$

где $S = \pi R^2$, $c = \alpha + i\beta$.

Последние два члена равны нулю, так как из закона сохранения момента количества движения следует:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -2\pi\Omega \frac{dR}{dt} \tag{12}$$

Учитывая, что при $x = x_0$, $y = y_0$

$$\operatorname{grad} u_x = 2\alpha - i(2\beta + {}^1/_2\Omega), \quad \operatorname{grad} u_y = -2\beta - i(2\alpha - {}^1/_2\Omega) \tag{13}$$

Выражение (11) преобразуем к виду

$$F = -\rho \frac{d(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)S}{dt} + 2\rho S \frac{\tilde{d}\mathbf{u}_0}{dt} - \rho S \frac{d\mathbf{u}_0}{dt} + \tag{14}$$

$$+ i\rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)(\gamma + 2S\Omega) + 2\pi\rho \sum_{k=2}^{\infty} k(k+1) c_k \bar{c}_{k+1} R^{2k}$$

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{u}_0}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} \qquad \frac{d\mathbf{u}_0}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u}$$

Эта формула дает точное выражение для силы, действующей на расширяющийся цилиндр при $\Omega = \mathrm{const}$. Если цилиндр мал $R \to 0$, последним членом можно пренебречь, получим

$$\mathbf{F} = -\rho \frac{d(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)S}{dt} + 2S\rho \frac{\tilde{d}\mathbf{u}_0}{dt} - S\rho \frac{d\mathbf{u}_0}{dt} + i\rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)(\gamma + 2S\Omega) \tag{15}$$

Таким образом, выражение для силы, действующей на малый цилиндр, зависит линейно от ускорений цилиндра и ускорения внешнего потока, γ, Ω и градиента скоростей внешнего потока, а коэффициенты при этих величинах зависят от радиуса цилиндра и относительной скорости.

Если предположим, что при $\operatorname{grad} \Omega \neq 0$ добавится член такой же структуры и линейно зависящий от $\operatorname{grad} \Omega$, то из соображений размерности получим этот член

$$\mathrm{const}\, R^3 \rho (\mathbf{V} - \mathbf{u}_0) \operatorname{grad} \Omega \tag{16}$$

Для малого цилиндра $(R \to 0)$ этот член как угодно мал по сравнению с написанными. Таким образом, можно ожидать, что выражение (15) будет справедливо для малого цилиндра, находящегося в произвольном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 1. Круг (цилиндр) движется со скоростью, которая была бы у частицы жидкости в точке $z_0(t)$ при отсутствии цилиндра $\mathbf{V}(t) \equiv \mathbf{u}_0(t)$. В этом случае

$$\mathbf{F} = \rho S \frac{\tilde{d}\mathbf{u}_0}{dt}$$

т. е. сила, действующая на круг, равна силе, которая действовала бы на жидкую частицу соответствующей площади при отсутствии цилиндра в потоке.

Пример 2. Жидкость при отсутствии цилиндра покоится $u \equiv 0$, $\Omega = \gamma = 0$. В этом случае

$$\mathbf{F} = -\rho \frac{d\mathbf{V}S}{dt}$$

Имея в виду, что для цилиндра присоединенная масса $\lambda_x = \lambda_y = \lambda = S$, получим

$$\mathbf{F} = -\rho\lambda\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho\mathbf{V}\frac{d\lambda}{dt}$$

Пример 3. $\Omega = \gamma = 0$ $u_j \operatorname{grad} u_i$. $V_j \operatorname{grad} u_i$ — малые величины.

В этом случае

$$\frac{d\mathbf{u}_0}{dt} \approx \frac{\widetilde{d}\mathbf{u}_0}{dt} \approx \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$$

и как раз этот случай рассмотрен в работах [3–5] для произвольного тела.

В работе [3] рассмотрен случай движения произвольного твердого тела в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости при $\operatorname{grad} u_i \equiv 0$.

В работе [4] приводятся выражения для сил и моментов с учетом аэродинамических членов, также для случая малого $\operatorname{grad} u_i$.

В работе [5] содержится обобщение выражений [4] на случай деформируемого плоского контура.

Пример 4. Величины $\partial u / \partial t$ и u_0 достаточно малы, однако v — велико ($u \ll v$). Тогда

$$\mathbf{F} = -\rho\frac{d(\mathbf{v}-\mathbf{u}_0)S}{dt} - \rho S\frac{d\mathbf{u}_0}{dt}$$

Учет последнего члена становится существенным при рассмотрении движения тела в воде с большой скоростью, так как член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u}$ может быть в этом случае достаточно велик.

Следует заметить, что в этом случае знак перед последним членом оказывается обратным по сравнению с работами [4, 5]. Таким образом, если выражение $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u}$ достаточно велико, соответствующие члены выражений для сил и моментов в работах [4, 5] должны быть уточнены. Этот случай выходит за рамки постановок задач в работах [4, 5], а также [2], в которой $\operatorname{grad} u_i \equiv 0$.

Примечание. В работе [4] допущен некоторый просмотр — отсутствие ссылки на работу Хаскинда М. Р. [3]. Авторы благодарят М. Г. Щеглову, которая указала на это обстоятельство. Как показано выше, в работах [4, 5, 3] рассматривался только случай, когда можно считать,что $\operatorname{grad} u_i = 0$, тогда это сводится к простой переформулировке парадокса Даламбера на случай наличия массовых сил инерции в относительном движении.

В заключение следует заметить, что при помощи соответствующего конформного отображения можно получить силы и моменты для случая движения контура произвольной формы в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости.

Реализация этого пути показывает, что для определения сил требуется знание трех первых коэффициентов разложения комплексной функции, реализующей конформное отображение рассматриваемого контура на круг. В то время как для определения коэффициентов присоединенных масс λ_x, λ_y, λ_{xy}, достаточно знать только два коэффициента разложения [2]. Автор признателем Л. И. Седову за ценные советы и внимание к работе.

Институт механики МГУ

Поступило 10 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Изд. 6. М., Физматгиз, 1963.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
3. Хаскин М. Д. Неустановившееся движение твердого тела в ускоренном потоке безграничной жидкости. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
4. Григорян С. С., Якимов Ю. Л. Движение тела малых размеров в воде при наличии внешнего потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
5. Якимов Ю. Л. Уравнение движения тонкого тела в возмущенном потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.