ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ВБЛИЗИ НЕОДНОРОДНО НАГРЕТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. Ю. АБРАМОВ, Г. Г. ГЛАДУШ

(*Москва*)

Рассматривается задача о вычислении коэффициентов скольжения газа вблизи поверхности. Найдено решение задачи в двух предельных случаях — при изотропном рассеянии молекул на стенке и при законе рассеяния, близком к зеркальному. Показано, что существует явная связь между коэффициентами теплового и изотермического скольжения. При учете градиента давления величина теплового скольжения оказывается пропорциональной производной от хаотического потока молекул.

Как известно, наиболее последовательным методом получения уравнений гидродинамики является метод разложения по малому параметру λ / L, где λ — средняя длина свободного пробега частиц газа, L — характерный размер неоднородностей [1, 2]. Вблизи границы функция распределения частиц изменяется на расстоянии порядка длины пробега (кнудсеновский слой), поэтому в этой области гидродинамическое приближение не справедливо. Тем не менее к уравнениям гидродинамики можно поставить такие граничные условия, при которых гидродинамическое решение с требуемой точностью будет совпадать с решением кинетического уравнения всюду, кроме областей порядка λ вблизи границы (см., например, [2]).

Для нахождения таких граничных условий необходимо найти решение уравнения Больцмана в кнудсеновском слое и продолжить его в гидродинамическую область. Если радиус кривизны поверхности больше или порядка L, то такая задача всегда сводится к рассмотрению полупространства.

Однако ввиду сложности точного уравнения Больцмана даже для такой простой геометрии до сих пор не получено аналитического решения. В последнее время для исследования многих задач газодинамики используется модельное кинетическое уравнение (например, [2–4]), предложенное Батнагаром, Гроссом и Круком [3]. Ниже это уравнение применяется для исследования задачи о скольжении [2].

Следует отметить, что результаты, полученные при помощи модельного уравнения, в ряде случаев близки к результатам, следующим из уравнения Больцмана [4–6], и могут применяться для сравнения теории с экспериментом. Заметим, что в задачах о скольжении это уравнение использовалось во многих работах (например, [2, 5–8]), при этом во всех цитируемых работах, кроме [8], результаты получены либо численно [2, 6, 7], либо вариационным способом [5], а в [8] использовалась существенно упрощенная модель БГК.

В данной работе проводится аналитическое исследование задачи о скольжении.

1. Пусть газ занимает пространство $x > 0$, расположенное над плоскостью, температура которой T_0 меняется вдоль координаты y ($T_0 = T_0(y)$). В направлении z среда считается однородной. Представим модельное уравнение задачи в следующем виде:

$$C_x \frac{\partial f}{\partial x} + C_y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_0(u_y) - f}{\tau}$$

$$f_0(u_y) = \frac{n}{(2\pi T/m)^{3/2}} \exp \frac{-m[c_x^2 + (c_y - u_y)^2 + c_z^2]}{2T} \tag{1.1}$$

Здесь $f(x, y, \mathbf{c})$ — функция распределения частиц газа; τ — время релаксации, не зависящее в данной модели от скоростей; величины n, T и u_y являются функционалами от f

$$n = \int f \, d\mathbf{c}, \qquad u_y = \frac{1}{n} \int f c_y \, d\mathbf{c}, \qquad T = \frac{m}{3n} \int f (\mathbf{c} - \mathbf{u})^2 d\mathbf{c}$$

Температура измеряется в энергетических единицах. В качестве граничного условия к уравнению (1.1) примем

$$f(x=0,c_x,c_y,c_z)=(1-q)f(x=0,-c_x,c_y,c_z)+ \tag{1.2}$$
$$+qn_r\left(\frac{m}{2\pi T_r}\right)^{3/2}\exp\frac{-mc^2}{2T_r}$$

Здесь q — коэффициент аккомодации, n_r и T_r — плотность и температура частиц, отраженных от стенки [2]. Введем длину пробега λ и предположим, как обычно, что

$$\lambda(\ln T_0)_y'=\frac{\lambda}{L_T}\ll 1,\qquad \frac{u}{\sqrt{2T_0/m}}\ll 1\qquad \left(\lambda=\tau\left(\frac{2T_0}{m}\right)^{1/2}\right) \tag{1.3}$$

При выполнении условий (1.3) естественно считать, что вблизи границы распределение частиц газа мало отличается от максвелловского с локальной температурой, равной температуре стенки. Это предположение подтверждается дальнейшими результатами. Положим поэтому

$$f=f_0^0+\varphi,\qquad \varphi\ll f_0^0,\qquad f_0^0=n_0\left(\frac{m}{2\pi T_0}\right)^{3/2}\exp\frac{-mc^2}{2T_0} \tag{1.4}$$

Из условия непротекания ($u_x=0$) следует, что гидродинамическое давление P_0, имеющее смысл вне слоя Кнудсена, зависит лишь от координаты y ($P_0=P_0(y)$). Будем считать функцию $P(y)$ заданной и положим в выражении для f_0^0 величину $n_0=P_0(y)\,/\,T_0(y)$. Из (1.4) и определения T и u_y следует, что с точностью до величины более высокого порядка

$$n=n_0+\int\varphi\,dc\equiv n_0+\delta n,\qquad \delta n\ll n_0 \tag{1.5}$$

$$u_y=\frac{1}{n}\int\varphi c_y\,dc \tag{1.6}$$

$$T=T_0+\frac{m}{3n_0}\int c^2\varphi\,dc-T_0\frac{\delta n}{n_0}\equiv T_0+\delta T \tag{1.7}$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и линеаризуя полученное уравнение, находим

$$\tau c_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi=f_0^0\left[\frac{\delta n}{n_0}+\frac{\delta T}{2T_0}(c^2-3)+\frac{mu_yc_y}{T_0}-\right. \tag{1.8}$$
$$\left.-\tau c_y\frac{P_0'}{P_0}+\tau c_y\frac{T_0'}{T_0}\left(\frac{5}{2}-\frac{mc^2}{2T_0}\right)\right]$$

(Штрихами обозначены производные по y.) В уравнении (1.8) опущен член $\tau c_y\partial\varphi\,/\,\partial y$, член $\tau c_x\partial\varphi\,/\,\partial x$ может быть порядка φ в кнудсеновском слое, поэтому его необходимо оставить в уравнении.

Умножим уравнение (1.8) на c_y и проинтегрируем по c_z и c_y. При этом получаем

$$\tau c_x\frac{\partial}{\partial x}\langle c_y\varphi\rangle+\langle c_y\varphi\rangle=n_0\left(\frac{m}{2\pi T_0}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\exp\frac{-mc^2}{2T_0}\left[u_y-\frac{\tau P_0'}{mn_0}+\frac{\tau T_0'}{2m}\left(1-\frac{mc_x^2}{T_0}\right)\right]$$

$$\langle c_y\varphi\rangle=\int\limits_{-\infty}\int\limits_{-\infty}c_y\varphi\,dc_z\,dc_y \tag{1.9}$$

Вводя безразмерные координату и скорость согласно

$$\xi=\frac{x}{\tau\sqrt{2T_0/m}}=\frac{x}{\lambda}\qquad v=\frac{c_x}{\sqrt{2T_0/m}} \tag{1.10}$$

перепишем (1.9) в виде

$$v\frac{\partial U}{\partial \xi}+U=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\bar{e}^{v^2}[u-S_1+S_2(1-2v^2)] \tag{1.11}$$

где

$$U=\langle c_y\varphi\rangle\sqrt{2T_0/m}\,\frac{1}{n_0},\qquad u_y=u=\int_{-\infty}^{\infty}U\,dv$$

$$S_1=\tau T_0(\ln P_0)',\qquad S_2={}^1/{}_2\tau T_0(\ln T_0)'$$

Из (1.2) следуют граничные условия к уравнению (1.11)

$$U(\xi=0,\,v)=(1-q)U(\xi=0,\,-v)\qquad(v>0) \tag{1.12}$$

Таким образом, задача о нахождении скорости течения газа вблизи стенки сводится к нахождению решения линейного интегро-дифференциального уравнения (1.11) с граничными условиями (1.12). Введенная величина U с точностью до множителя равна скорости тангенциального потока частиц, имеющих заданное значение c_x (или, что то же v). Граничное условие (1.12) означает, что зеркально отраженные частицы сохраняют величину потоковой скорости, а диффузно отраженные — никакого вклада в поток не дают. Таким образом, стенка поглощает q долю тангенциального потока подлетающих к ней частиц.

2. Из уравнения (1.11) с использованием граничного условия (1.12) несложно получить интегральное уравнение для функции $u(\xi)$. Считая функцию $u(\xi)$ в правой части (1.11) известной, запишем формальное решение для $U(\xi)$, а затем воспользуемся определением

$$u(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}U(v,\xi)\,dv \tag{2.1}$$

$$U(\xi,v<0)=-\frac{\bar{e}^{v^2}}{v\sqrt{\pi}}\int_{\xi}^{\infty}\exp\frac{t-\xi}{v}\,u(t)\,dt-S_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}\bar{e}^{v^2}+S_2(1-2v^2)\frac{\bar{e}^{v^2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$U(\xi,v>0)=\frac{\bar{e}^{v^2}}{v\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\xi}\exp\left(\frac{t-\xi}{v}\right)u(t)\,dt+$$

$$+\frac{1-q}{v\sqrt{\pi}}\bar{e}^{v^2}\int_{0}^{\infty}\exp\frac{-(t+\xi)}{v}\,u(t)\,dt-S_1\left[1-q\exp\frac{-\xi}{v}\right]\frac{1}{\sqrt{\pi}}\bar{e}^{v^2}+$$

$$+S_2(1-2v^2)\left[1-q\exp\frac{-\xi}{v}\right]\frac{1}{\sqrt{\pi}}\bar{e}^{v^2} \tag{2.2}$$

Интегрируя уравнение (2.1) по v от $-\infty$ до 0, а (2.2) — от 0 до ∞ и складывая, находим

$$u(\xi)=\int_{0}^{\infty}J_{-1}(|\xi-t|)u(t)\,dt+(1-q)\int_{0}^{\infty}J_{-1}(\xi+t)u(t)\,dt-$$

$$-S_1+qS_1J_0(\xi)+qS_2[2J_2(\xi)-J_0(\xi)],\qquad \xi>0 \tag{2.3}$$

$$J_n(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}v^n\exp\left(-\frac{|\xi|}{v}-v^2\right)dv,\qquad J_{n-1}=-\frac{dJ_n(\xi)}{d\xi} \tag{2.4}$$

В силу линейности уравнения (2.3) его решение может быть представлено в виде суммы общего решения однородного уравнения и двух частных решений неоднородного уравнения, соответствующих двум источникам S_1 и S_2.

Не сложно показать, что решение однородного уравнения при $\xi \gg 1$ линейно по ξ, т. е.

$$u(\xi) = \text{const}\,(1 + a\xi) \qquad (\xi \gg 1)$$

где a — определенное число, находимое из решения уравнения. При больших ξ указанное решение должно совпадать с гидродинамическим $(u_0(\xi))$. Отсюда следует, что

$$a\,\text{const} = \left.\frac{\partial u_0}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}, \qquad u_0(0) = \frac{1}{a}\left.\frac{\partial u_0}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$$

Получаемое таким образом значение величины $u_0(0)$ называется скоростью изотермического скольжения.

Решение неоднородного уравнения, связанное и с источником $S_2 \sim T_0'$, стремится к некоторой постоянной величине при $\xi \to \infty$. Последняя называется скоростью теплового скольжения. Решение, пропорциональное S_1, описывает вязкое течение газа вблизи поверхности, возникающее под действием градиента давления. Добавка к скорости скольжения, связанная с этим решением, обсуждается ниже.

Ввиду того что уравнение (2.3) не разностного типа, не удалось получить его решения при произвольных q. В данной работе рассмотрим два предельных случая $q = 1$ и $q \ll 1$. Начнем с первого случая. При $q = 1$ решение уравнения (2.3) можно получить методом Винера — Хопфа [9]. Для этого необходимо продолжить функцию $u(\xi)$ на интервал $\xi < 0$. Потребуем, что при $\xi < 0$

$$u(\xi) = \int_0^\infty J_{-1}(|\xi - t|)\,u(t)\,dt \qquad (\xi < 0) \tag{2.5}$$

Применяя к обеим частям уравнения (2.3) двухстороннее преобразование Фурье и вводя стандартные обозначения

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\xi} f(\xi)\,d\xi, \qquad f^+(p) = \int_0^\infty e^{ip\xi} f(\xi)\,d\xi = f(p) - f^-(p)$$

находим

$$u^+(p)\,[1 - J_{-1}(p)] + u^-(p) = -S_1\frac{i}{p} + S_1 J_0^+(p) + S_2[2J_2^+(p) - J_0^+(p)] \tag{2.6}$$

Здесь все «плюсовые» функции аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Im} p > 0$ (верхняя полуплоскость), а «минусовые» — в нижней. Из (2.4) следует, что

$$J_n(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{v^{n+1}e^{-v^2}\,dv}{1 - ipv} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{v^{n+1}e^{-v^2}\,dv}{1 + ipv} \equiv J_n^+(p) + J_n^-(p) \tag{2.7}$$

Введем обозначения

$$1 - J_{-1}(p) = g(p) \equiv p^2 G(p) \tag{2.8}$$

В силу четности функции $J_{-1}(p)$ (см. (2.7)) функции $g(p)$ и $G(p)$ также являются четными. Нетрудно показать, что уравнение $g(p)=0$ имеет единственный двукратный корень $p=0$ и, следовательно, $G(p)$ отлична от нуля при всех p. В силу этого [9] $G(p)$ представлена в виде

$$G(p)=G^{+}(p)G^{-}(p) \tag{2.9}$$

где $G^{+}(p)$ аналитична и не имеет нулей в верхней полуплоскости, а $G^{-}(p)$ — в нижней. Из четности функции $G(p)$ следует, что $G^{-}(p)=$ $=G^{+}(-p)$. Поэтому (2.9) можно также записать в виде

$$G(p)=G^{+}(p)G^{+}(-p) \tag{2.10}$$

С учетом (2.8) и (2.9) уравнение (2.6) преобразуется к виду

$$u^{+}(p)p^2G^{+}+\frac{u^{-}(p)}{G^{-}(p)}=-i\frac{S_1}{pG^{-}(p)}+\frac{S_1J_0^{+}(p)}{G^{-}(p)}+S_2\left[\frac{2J_2^{+}(p)-J_0^{+}(p)}{G^{-}(p)}\right] \tag{2.11}$$

Функции J_n^{+}/G^{-} несложно представить в виде суммы функций, аналитичных соответственно в верхней и нижней полуплоскости

$$\frac{J_n^{+}(p)}{G^{-}(p)}=Y_n^{+}(p)+Y_n^{-}(p) \tag{2.12}$$

Например, из (2.4) следует, что

$$J_0^{+}(p)=\frac{J_{-1}^{+}(p)-{}^1/_2}{ip}$$

откуда, применяя последовательно формулы (2.7), (2.8) и (2.9), находим

$$\frac{J_0^{+}(p)}{G^{-}(p)}=\frac{J_{-1}(p)-J_{-1}^{-}(p)-{}^1/_2}{ipG^{-}(p)}=\frac{(1-g)-J_{-1}^{-}(p)-{}^1/_2}{ipG^{-}(p)}=$$
$$=\frac{{}^1/_2-J_{-1}^{-}}{ipG^{-}}-\frac{p^2G^{+}(p)}{ip}$$

Таким образом, $Y_0^{+}(p)=ipG^{+}(p)$. Аналогично

$$Y_2^{+}(p)=\frac{-i[G^{+}(p)-{}^1/_2\sqrt{2}]}{p}$$

После того как правая часть (2.11) представлена в виде суммы плюсовых и минусовых функций, соберем все плюсовые «функции», например, в левую часть равенства, а минусовые — в правую. Из принципа аналитического продолжения следует, что функция, стоящая в правой части указанного равенства, является аналитическим продолжением функции, находящейся в левой части. Каждая из указанных функций аналитична, следовательно, во всей плоскости, т. е. равна константе. Поступая таким образом, получаем выражение для $u^{+}(p)$.

$$u^{+}(p)=\frac{-c}{p^2G^{+}(p)}+S_2\left\{-\frac{i}{p}-\frac{2i[G^{+}(p)-{}^1/_2\sqrt{2}-i\alpha p]}{p^3G^{+}(p)}\right\}+$$
$$+S_1\left[\frac{i}{p}-\frac{i\sqrt{2}-2\alpha}{p^3G^{+}(p)}\right] \tag{2.13}$$

где c — произвольная константа. Первый член в правой части (2.13) соответствует решению однородного интегрального уравнения для u. В целях удобства из него выделена часть $2S_2\alpha / p^2G^+(p)$ и объединена с остальными членами, соответствующими источнику S_2.

То же самое касается последнего члена с источником S_1. Функция $u(\xi)$ получается из (2.13) применением обратного преобразования Фурье. Если интересоваться лишь поведением $u(\xi)$ при $\xi \to \infty$, то достаточно знать $G^+(p)$ при малых p.

Из (2.7) и (2.8) следует:

$$G(p) = {}^1/_2 - {}^3/_4 p^2 + 0(p^2) \qquad (p \to 0) \tag{2.14}$$

Тогда соотношение (2.10) позволяет заключить, что

$$G^+(p) = 1 / \sqrt{2} + i\alpha p + \beta p^2 \qquad (p \to 0) \tag{2.15}$$

причем

$$\alpha^2 + \beta\sqrt{2} = -{}^3/_4 \tag{2.16}$$

Подставляя разложение (2.15) в формулу (2.13), находим

$$\underset{p\to 0}{u^+(p)} = c\left(\frac{2i\alpha}{p} - \frac{\sqrt{2}}{p}\right) + \frac{iS_2}{p^2}\left(2\alpha^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{iS_1}{p}\left(\frac{1}{2} + 2\alpha^2\right) - \frac{2i}{p^3}S_1 \tag{2.17}$$

Из формулы (2.17) следует, что при $\xi \gg 1$

$$u(\xi) = c(\sqrt{2}\xi + 2\alpha) + (2\alpha^2 + {}^1/_2)S_2 - (2\alpha^2 + {}^1/_2)S_1 + \xi^2 S_1 \tag{2.18}$$

Согласно сказанному в начале этого пункта

$$c\sqrt{2} = \left.\frac{\partial u_0}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$$

и окончательно из (2.18) получаем

$$u_0(0) = \alpha\sqrt{2}\left.\frac{\partial u_0}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} + (S_2 - S_1)\left(2\alpha^2 + \frac{1}{2}\right) \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что между коэффициентами изотермического и теплового скольжения существует явная связь (оба они выражаются через одну константу α).

Величина $u_0(0)$ в формуле (2.19) представляет собой «фиктивную» скорость течения газа у стенки. Представляет интерес сравнить ее с истинным значением скорости, которое несложно получить из общего решения (2.13). Согласно определению

$$\lim(-ip)u^+(p) = \lim(-ip)\int_0^\infty e^{ip\xi}u(\xi)\,d\xi = u(0) \qquad (p \to \infty)$$

Заметим также, что согласно (2.7)

$$\lim J_{-1}(p) = 0 \qquad (p \to \infty),$$

откуда с учетом (2.8) и (2.10) следует, что

$$\lim pG^+(p) = i \qquad (p \to \infty)$$

Умножив (2.13) на $(-ip)$ и устремив p к ∞, получим с учетом сказанного

$$u(0)=c+(S_2-S_1)(2\alpha-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u_0}{\partial \xi}+(S_2-S_1)(2\alpha-1) \quad (2.20)$$

Формулы (2.19) и (2.20) завершают формальное исследование задачи при $q=1$.

Рассмотрим теперь уравнение (2.3) при $q\to 0$. Удобно представить функцию $u(\xi)$ в виде

$$u(\xi)=S_1\xi^2+W(\xi) \quad (2.21)$$

Из (2.3) получаем, что $W(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$W(\xi)=\int_0^\infty J_{-1}(|\xi-t|)W(t)\,dt+(1-q)\int_0^\infty J_{-1}(\xi+t)W(t)\,dt+ \\ +q(S_2-S_1)(2J_2-J_0) \quad (2.22)$$

При $q=0$ единственным решением уравнения (2.22) является $W(\xi)=\text{const}$, поэтому при малых q величина $W(\xi)$ не должна сильно отличаться от константы. Рассмотрим вначале решение неоднородного уравнения (2.22) $W_S(\xi)$. Положим $W_S(\xi)=c_S+q\psi_S(\xi)$, где $\psi_S(\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$ и, следовательно, интеграл от нее конечен. Подставляя указанное выражение в (2.22), получаем с точностью до членов $\sim q^2$

$$\psi_s(\xi)=\int_0^\infty J_{-1}(|\xi-t|)\psi_s(t)\,dt+\int_0^\infty J_{-1}(\xi+t)\psi_s(t)\,dt- \\ -c_sJ_0(\xi)+(S_2-S_1)[2J_2(\xi)-J_0(\xi)] \quad (2.23)$$

Проинтегрируем обе стороны уравнения (2.23) по ξ от 0 до ∞.

При этом в левой части интеграл уничтожается суммой первых двух членов в правой части, и находим

$$c_s=\lim W_s(\xi)=S_2-S_1, \qquad \xi\to\infty \quad (2.24)$$

Чтобы получить решение однородного уравнения (2.22), при $q\to 0$ положим

$$W_0(\xi)=c_0+q\psi_0(\xi), \qquad \psi_0(\xi)\to b\xi, \qquad \xi\to\infty \quad (2.25)$$

Аналогично (2.23) для $\psi_0(\xi)$ получаем уравнение

$$\psi_0(\xi)=\int_0^\infty J_{-1}(|\xi-t|)\psi_0(t)\,dt+\int_0^\infty J_{-1}(\xi+t)\psi_0(t)\,dt-c_0J_0(\xi)$$

Продолжим функции $\psi_0(\xi)$ на область $\xi<0$ четным образом, что несложно сделать, поскольку сумма первых двух членов в правой части (2.26) четная функция ξ. В таком случае из (2.25) следует, что

$$\psi_0(\xi)\to b|\xi|, \quad \xi\to\infty; \quad \psi_0(p)\to -2b/p^2, \quad p\to 0 \quad (2.27)$$

Применяя к уравнению (2.26) двухстороннее преобразование Фурье, находим

$$\psi_0(p)=\frac{-c_0J_0(p)}{1-J_{-1}(p)}\xrightarrow[p\to 0]{}\frac{2c_0}{\sqrt{\pi}p^2} \quad (2.28)$$

Из сравнения (2.27) и (2.28) получаем $b = c_0 / \sqrt{\pi}$ и следовательно

$$W_0(\xi) \to c_0 \left(1 + \frac{q\xi}{\sqrt{\pi}}\right) \qquad (\xi \to \infty) \tag{2.29}$$

Из (2.21), (2.24) и (2.29) имеем при $q \ll 1$

$$u_0(\xi) = c_0 \left[1 + \frac{q\xi}{\sqrt{\pi}}\right] + (S_2 - S_1) + S_1\xi^2 \tag{2.30}$$

$$u_0(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \frac{\partial u_0}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} + (S_2 - S_1) \qquad (q \ll 1) \tag{2.31}$$

Величина $u(0)$ (истинная скорость у стенки) при малых q совпадает с $u_0(0)$.

3. Переходя к размерным переменным (см. (1.10) и (1.11)), перепишем формулы (2.18), (2.20) и (2.31) для u_0, $u(0)$ в виде

$$u_0(0) = \alpha\sqrt{2}\tau v_T \frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg|_{x=0} - \left(2\alpha^2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\tau T_0^{3/2}}{P_0}\left(\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}\right)' \qquad (q=1) \quad (3.1)$$

$$u(0) = \tau \frac{v_T}{\sqrt{2}} \frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg|_{x=0} - (2\alpha - 1)\frac{\tau T_0^{3/2}}{P_0}\left(\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}\right)' \qquad (q=1) \quad (3.2)$$

$$u_0(0) \simeq u(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \tau v_T \frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg|_{x=0} - \frac{\tau T_0^{3/2}}{P_0}\left(\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}\right)' \qquad (q=0) \quad (3.3)$$

где $v_T = \sqrt{2T_0 / m}$ — тепловая скорость атомов.

Первый член в правой части формулы (3.1) описывает эффект изотермического скольжения вблизи диффузно отражающей поверхности. Коэффициент изотермического скольжения в модели БГК ($\alpha\sqrt{2}$) неоднократно вычислялся в ряде работ, посвященных исследованию этого эффекта.

Примем, согласно [6], его значение равным 1.01, что в пределах точности $\sim 1\%$ совпадает с результатами других авторов. Отсюда находим остальные коэффициенты в формулах (3.1) и (3.2)

$$2\alpha^2 + 1/2 = 1.532, \qquad 2\alpha - 1 = 0.44 \tag{3.4}$$

Второй член в формуле (3.1) есть скорость теплового скольжения. Обычно при исследовании этого эффекта давление полагается не зависящим от координат. Из формул (3.1)—(3.3) видно, однако, что наличие градиента давления вдоль поверхности приводит к изменению вида формулы для скорости теплового скольжения, при этом последняя оказывается пропорциональной

$$\frac{d}{dy}\left(\ln\frac{P_0}{\sqrt{T_0}}\right) = \frac{d}{dy}\ln(n_0 v_T)$$

т. е. производной от хаотического теплового потока частиц. Последний факт представляется физически довольно разумным. Кроме того, как указывается, например, в [10], температурное скольжение может приводить к существенным изменениям давления в аэродинамических трубах. Это означает, что в ряде случаев члены пропорциональные P_0, следует учитывать.

Отметим, что в [2] приводится значение коэффициента теплового скольжения (в наших обозначениях $2\alpha^2 + 1/2$), полученное в результате численного интегрирования уравнения для $u(\xi)$. Независимо там же вычисляется и коэффициент изотермического скольжения, приводимое число практически не отличается от принятого нами.

Однако коэффициент теплового скольжения (1.68) уже примерно на 10% отличается от значения, даваемого формулой (3.4), что указывает на ошибку в численных расчетах в [2].

Интересной особенностью формулы (3.3) является то, что скорость теплового скольжения оказывается конечной при $q \to 0$, когда влияние стенки, казалось бы, должно исчезать. В связи с этим возникает вопрос о причине, вызывающей тепловое скольжение газа. Для его обсуждения обратимся к формулам (2.1) и (2.2), положив для простоты $S_1 \backsim P_0' = 0$

$$U_{v<0}(\xi, v) = \frac{e^{-v^2}}{|v|\sqrt{\pi}} \int_\xi^\infty \exp^{-\frac{t-\xi}{|v|}} u(t)\,dt + \frac{\tau(\ln T_0)'}{2\sqrt{\pi}}(1-2v^2)e^{-v^2} \tag{3.5}$$

$$U_{v>0}(\xi, v) = \frac{e^{-v^2}}{v\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp^{-\frac{\xi-t}{v}} u(t)\,dt + \frac{1-q}{v\sqrt{\pi}} e^{-v^2} \int_0^\infty \exp^{-\frac{\xi+t}{v}} u(t)\,dt +$$
$$+ \frac{\tau(\ln T_0)'}{2\sqrt{\pi}}(1-2v^2)e^{-v^2} - q\frac{\tau(\ln T_0)'}{2\sqrt{\pi}}(1-2v^2)\exp^{-v^2-\frac{\xi}{v}} \tag{3.6}$$

Формулы (3.5) и (3.6) допускают следующую физическую интерпретацию. Поток частиц в точке (ξ, y), летящих по направлению к стенке со скоростью v, пополняется, во-первых, за счет частиц, прибывающих из области $t > \xi$ с той же самой температурой T_0 и несущих с собой среднюю потоковую скорость $u(t)$, и, во-вторых, за счет частиц, приходящих из тех областей $t > \xi$, где температура отличается от температуры данной точки. Следует подчеркнуть, что указанное разделение частиц в известном смысле условно. При этом ясно, что «медленные» частицы дают вклад в поток, пропорциональный T_0', поскольку в областях, где температура меньше, больше средняя плотность газа, а «быстрые» частицы дают вклад противоположного знака, поскольку в областях, где температура больше, больше также и быстрых частиц. Это находится в согласии с формулой (3.5) — при $v^2 < 1/2$ вклад в поток из-за наличия T_0' положителен, а при $v^2 > 1/2$ — отрицателен. Суммарный вклад в поток быстрых и медленных частиц равен нулю

$$\int_{-\infty}^0 (1-2v^2)e^{-v^2}\,dv = 0$$

Аналогично, первый член в правой части формулы (3.6) — частицы, прибывающие из области $t < \xi$ с той же температурой, второй — частицы из области $t > \xi$, испытывающие зеркальное отражение от стенки, третий член — поток частиц из областей с отличной температурой при чисто зеркальной поверхности стенки, наличие диффузности учитывается четвертым членом, который означает, что q-доля тангенциального потока частиц, падающих на стенку, поглощается. При этом быстрые частицы обладают большей длиной пробега, поэтому их больше поглощается стенкой, чем медленных. В результате суммарный вклад в поток частиц с $v > 0$ оказывается положительным (направленным в сторону потока медленных частиц), математически это выражается в положительности интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\xi/v - v^2}(2v^2-1)\,dv > 0$$

Таким образом, наличие стенки приводит, с одной стороны. к появлению дополнительного потока, связанного с градиентом температуры и пропорционального степени диффузности, а с другой стороны, к появлению силы, тормозящей поток, также пропорциональный степени диффузности. Роль указанных факторов равно убывает с уменьшением q, поэтому существует предельное значение скорости теплового скольжения при $q = 0$. Из физических соображений нетрудно понять, что с уменьшением степени диффузности отношение величин $u(\infty) / u(0) > 1$ приблизится к единице (напомним, что сейчас речь идет лишь о тепловом скольжении). Это означает, что при уменьшении q должна возрастать роль тормозящего фактора стенки. Таким образом, следует ожидать, что с уменьшением q уменьшается также и значение скорости теплового скольжения $u(\infty)$. Действительно, из (3.1), (3.3) и (3.4) следует, что

$$\frac{u(\infty, q=1)}{u(\infty, q\to 0)} = 2\alpha^2 + {}^1/_2 = 1.532$$

Аналогичные соображения показывают, что величина $u(0)$ растет с уменьшением q. Это подтверждается сравнением формул (3.2) и (3.3)

$$\frac{u(0, q\to 0)}{u(0, q\to 1)} = (2\alpha - 1)^{-1} = 2.27$$

Как следует из обсуждения, эффект теплового скольжения связан с наличием границы и существенно зависит от свойств отражающей поверхности. При законе взаимодействия молекул со стенкой, отличном от принятого, например, если считать, что частицы, подлетающие к стенке с малой скоростью $v < v_0$, отражаются зеркально, а при $v > v_0$ — диффузно ($v_0 \to \infty$ соответствует чисто зеркальному закону отражения, $v_0 = 0$ — диффузному), результат оказывается иным. При $v_0 = 0$ выражение для скорости такое же, как и при $q = 1$. Однако при $v_0 \to \infty$ скорость скольжения неограниченно возрастает. (Это связано с тем, что при $v_0 \to \infty$ стенка поглощает лишь поток от быстрых частиц, возрастает роль фактора, приводящего к возникновению суммарного потока.) Приведенный пример показывает, что значение скорости теплового скольжения при $q = 0$ нельзя, по-видимому, трактовать как скорость в неограниченном пространстве в отсутствие стенки, хотя формально при $q = 0$ стенка не оказывает никакого влияния на распределение частиц по скоростям.

В заключение запишем формулы (3.1) и (3.3) (граничные условия на $u_0(x)$ при $q = 1$ и $q \to 0$) через обычные коэффициенты переноса — вязкость ν и теплопроводность $\varkappa$, выражение которых через время релаксации хорошо известно в модели БГК [2]

$$u_0(0) = 2.032\nu\left(\frac{m}{2T}\right)^{1/2}\frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg|_{x=0} - 0.613\frac{\varkappa}{nk}\left(\ln\frac{P}{\sqrt{T}}\right)'_y \qquad (q=1) \quad (3.7)$$

$$u_0(0) \simeq \frac{2\sqrt{\pi}}{q}\nu\left(\frac{m}{2T}\right)^{1/2}\frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg|_{x=0} - 0.4\frac{\varkappa}{nk}\left(\ln\frac{P}{\sqrt{T}}\right)'_y \qquad (q\to 0) \quad (3.8)$$

где k — постоянная Больцмана.

Поступило 26 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен, Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
3. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems Phys. Rev., 1954, vol. 94, p. 511.
4. Loyalka S. K. Momentum and temperature slip coefficient with arbitrary accommodation at the surface. J. Chem. Phys., 1968, vol. 48, p. 5432.
5. Joel H., Loyalka S. K. Ferziger model dependens of the temperature slip coefficient. Phys. Fluids, 1968. vol. 11, p. 1668.
6. Willis O. P. Comparison of kinetic theory analysis of linearized Couette flow. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1963, № 2.)
7. Welander P. On the temperature jump in rarefied gas. Arkiv Fysik, 1954, Bd. 7. S. 507.
8. Дерягин Б. В., Яламов Ю. И., Ивченко И. Н. Применение метода Батнагара, Гросса и Крука для определения скорости теплового скольжения газа вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 6.
9. Морс, Фешбах. Методы теоретической физики. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
10. Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.