

14. Kavanau L. L. Heat transfer from spheres to a rarefield gas in subsonic flow. Trans. ASME, 1955, vol. 77, No. 5. (Рус. перев.: «Механика», Сб. перев. и обз. иностр. период. лит-ры, 1956, № 6.)
15. Костерин С. И., Кошмаров Ю. А., Горская Н. М. Экспериментальное исследование теплообмена плоской пластины в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 2.
16. Кошмаров Ю. А., Горская Н. М. Теплообмен пластины в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 2.

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДУЛИРОВАННОМ ПОЛЕ ВНЕШНИХ СИЛ

Г. И. БУРДЭ (*Пермь*)

Проведено численное исследование конвективного движения, возникающего в полости квадратного сечения при подогреве снизу в условиях модуляции массовой силы. Нелинейные уравнения нестационарной конвекции решаются численно методом конечных разностей. Определены границы конвективной неустойчивости и нелинейные характеристики колебательных движений, возникающих в результате неустойчивости равновесия.

Неизотермическая жидкость может сохранять состояние равновесия лишь при выполнении определенных условий, нарушение которых приводит к возникновению конвективного движения. Обычно при исследовании возникновения конвекции предполагается постоянство внешней силы и условий подогрева. При таких условиях равновесие подогреваемой снизу жидкости устойчиво, если постоянный градиент температуры не превышает некоторого критического значения. При градиентах больших критического устанавливаются стационарные движения, амплитуда и форма которых зависят от величины градиента температуры [1].

Если внешняя сила или режим подогрева меняются со временем, то условия возникновения конвекции должны быть иными. Наиболее интересен случай, когда параметры, характеризующие внешние условия, периодически модулируются со временем. Модуляция параметра не только изменяет границы конвективной неустойчивости, но и существенным образом влияет на характер возникающих движений.

Конвективная устойчивость равновесия при наличии периодического изменения внешних условий исследовалась в работах [2-6].

В [2] решается задача об устойчивости плоского горизонтального слоя жидкости со свободными границами, подогреваемого таким образом, что вертикальный градиент температуры периодически модулируется, оставаясь однородным по слою (это соответствует в известном смысле низким частотам модуляции). Для случая «прямоугольной» модуляции определены положения областей неустойчивости, причем следует отметить, что полученные результаты непосредственно приложимы и к случаю модуляции массовой силы при стационарных условиях подогрева.

В [3] задача о возникновении конвекции в горизонтальном слое с периодически меняющейся температурой поверхности решается в предположении малости глубины проникновения тепловой волны по сравнению с толщиной слоя, что, очевидно, будет выполняться при достаточно быстром изменении температуры. В работе определена нижняя граница основной области неустойчивости.

В работах [4, 5] исследуется конвективная устойчивость равновесия подогреваемого снизу слоя жидкости, на которую кроме сил тяжести действуют вибрационные силы высокой частоты, возникающие вследствие колебаний слоя. На основании осредненных и линеаризованных уравнений конвекции авторы приходят к выводу о стабилизирующем влиянии вибрации высокой частоты и определяют зависимость критического числа Рэлея от вибрационного параметра.

В [6] исследуется, как влияет на устойчивость равновесия модуляция температуры на свободных границах подогреваемого снизу горизонтального слоя жидкости. Амплитуда модуляции предполагается малой, и задача решается при помощи разложения возмущений в ряды по степеням амплитуды. Из результатов следует, что в зависимости от способа изменения температуры на верхней и нижней границах модуляция может приводить либо к повышению, либо к понижению устойчивости.

Во всех перечисленных работах задача о возникновении конвекции решается в линейной постановке, что позволяет определить лишь границы устойчивости. Для того чтобы проследить за развитием возникающего конвективного движения, необходимо решение полных нелинейных уравнений нестационарной конвекции. Это может быть сделано с помощью численных методов.

В данной работе численно исследуется плоское конвективное движение жидкости в бесконечном горизонтальном цилиндре квадратного сечения. Цилиндр совершает колебания по вертикали, что приводит к периодической модуляции массовой силы. Задача решается методом конечных разностей. Расчеты, проведенные на ЭВЦМ, позволяют найти границы устойчивости, а также определить структуру и нелинейные характеристики конвективных движений, возникающих в результате неустойчивости равновесия.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Рассмотрим плоское конвективное движение вязкой несжимаемой жидкости в области, являющейся квадратом со стороной  $a$ . Расположение координатных осей показано на фиг. 1. Температура на нижней горизонтальной границе принята за начало отсчета, а на верхней равна  $-\Theta$ ; боковые границы теплоизолированы; все стенки предполагаются твердыми.

Пусть внешняя сила, действующая на единицу массы жидкости, вертикальна и изменяется со временем по закону

$$f = g(1 + \vartheta \sin \omega t) \quad (1.1)$$

Такой закон будет, например, иметь место, если полость с жидкостью совершает гармонические колебания вдоль вертикальной оси, так что смещение  $y = -A \sin \omega t$ . Тогда в системе координат, связанной со стенками полости, на жидкость, кроме силы тяжести  $g$ , действует переменная сила инерции, пропорциональная ускорению  $y''$ , и результирующая массовая сила равна

$$g + y'' = g(1 + A\omega^2 \sin \omega t) = g(1 + \vartheta \sin \omega t)$$

Полные уравнения конвекции в этом случае имеют вид (приняты обычные обозначения)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta T(1 + \vartheta \sin \omega t) \mathbf{g} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Введем функцию тока  $\psi$  и функцию  $\zeta$ , связанную с  $z$ -составляющей вихря

$$\zeta = -\text{rot}_z \mathbf{v} = \Delta \psi \quad (v_x = \partial \psi / \partial y, \quad v_y = -\partial \psi / \partial x) \quad (1.3)$$

Тогда, исключив давление и переходя в системе (1.2) к безразмерным переменным, получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \Delta \zeta = -G(1 + \vartheta \sin \omega t) \frac{\partial T}{\partial x} \quad \left( G = \frac{g\beta\Theta a^3}{\nu^2} \right)$$

$$\zeta = \Delta \psi$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{1}{P} \Delta T = 0 \quad \left( P = \frac{\nu}{\chi} \right) \quad (1.4)$$

Здесь  $G$  — число Грасгофа,  $P$  — число Прандтля. В качестве единиц измерения длины, времени, функции тока и температуры выбраны соответственно  $a$ ,  $a^2/\nu$ ,  $\nu$  и  $\Theta$ . Уравнения (1.4) решаются при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \psi = \partial \psi / \partial y = 0, \quad T = 0 & \quad \text{при } y = 0 \\ \psi = \partial \psi / \partial y = 0, \quad T = -1 & \quad \text{при } y = 1 \\ \psi = \partial \psi / \partial x = 0, \quad \partial T / \partial x = 0 & \quad \text{при } x = 0, x = 1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Краевую задачу (1.4), (1.5) будем решать методом конечных разностей. Введем следующие обозначения:

$$x_i = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, I); \quad y_k = kh \quad (k = 0, 1, 2, \dots, I)$$

$$t_n = \Delta t_0 + \Delta t_1 + \dots + \Delta t_n, \quad f^{n_i, k} = f(x_i, y_k, t_n)$$

Для решения уравнения (1.4) использовалась явная разностная схема, в которой все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями. Такая схема, имеющая второй порядок аппроксимации  $O(h^2)$ , ранее применялась в [7] для изотермического случая и в [8] для решения уравнений конвекции. Отличие от конечно-разностной аппроксимации, использованной в [8], состоит лишь

в том, что в рассматриваемом случае член с подъемной силой в (1.4) содержит переменный коэффициент  $1 + \phi \sin \omega t$ . Аппроксимация граничных условий для скорости на всей границе и для температуры на горизонтальных границах также совпадает с [8]. Условие теплоизолированности на боковых границах аппроксимируется двухточечной формулой второго порядка, для чего вводятся два дополнительных ряда узлов. Например, на правой границе

$$\frac{T_{I+1,k} - T_{I-1,k}}{2h} = 0 \quad (1.6)$$

Температура на вертикальных границах вычисляется по формулам

$$T_{0,k}^{n+1} = T_{0,k}^n + \Delta t_n \left[ \frac{1}{Ph^2} (T_{0,k+1}^n + T_{0,k-1}^n + 2T_{1,k}^n - 4T_{0,k}^n) \right] \quad (1.7)$$

$$T_{I,k}^{n+1} = T_{I,k}^n + \Delta t_n \left[ \frac{1}{Ph^2} (T_{I,k+1}^n + T_{I,k-1}^n + 2T_{I-1,k}^n - 4T_{I,k}^n) \right]$$

Эти формулы получены из уравнения теплопроводности, записанного для узлов, принадлежащих боковым границам. При этом использовано равенство нулю компонент скорости и граничное условие (1.6).

Уравнения (1.4) решались при фиксированном значении числа Прандтля:  $P = 1$ . Число Грасгофа  $G$  и безразмерные параметры модуляции — амплитуда  $\phi$  и частота  $\omega$  — при этом менялись в пределах  $2 \cdot 10^3 \leq G \leq 6 \cdot 10^3$ ;  $0 \leq \phi \leq 10$ ;  $6 \leq \omega \leq 200$ . Основные вычисления производились с квадратной сеткой ( $10 \times 10$ ); часть вычислений с целью проверки повторялась с сеткой ( $15 \times 15$ ). Результаты, полученные на сетках ( $10 \times 10$ ) и ( $15 \times 15$ ), мало отличаются друг от друга; погрешность в определении границ областей неустойчивости и характеристик стационарных колебаний составляет 2–3%. Расчеты проведены на ЭВЦМ «Арагац».

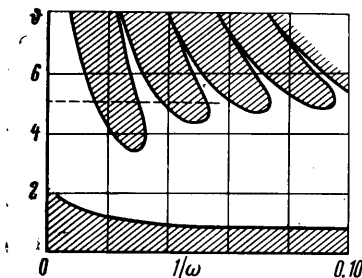
**2. Устойчивость равновесия.** Рассмотрим сначала численные результаты, касающиеся устойчивости равновесия при наличии вибрации. Судить об устойчивости можно, наблюдая за поведением внесенных в жидкость возмущений. В начальный момент на жидкость, которая до этого была покоящейся и изотермической, одновременно с включением подогрева и вибрации накладывается возмущение. Чаще всего задавалось возмущение, соответствующее вихрю в центре полости, так что начальные условия имели вид:  $\psi_{i,k}^0 = 0$ ;  $T_{i,k}^0 = -1$  (остальные  $T_{i,k}^0 = 0$ );  $\zeta_{i,k}^0 = \pm (10^2 \div 10^3)$  (остальные  $\zeta_{i,k}^0 = 0$ ). Удобно следить за развитием возмущений по интегральным характеристикам интенсивности движения. В качестве такой характеристики выбиралось среднее значение функции тока в полости  $\psi_a = \Sigma \psi_{i,k} / I^2$ .

Если массовая сила постоянна (вибрация отсутствует), то после начального переходного периода  $\psi_a$  монотонно нарастает или убывает в зависимости от значения числа Грасгофа. Находя два достаточно близких значения  $G$ , одно из которых соответствует нарастанию, а другое затуханию возмущений, можно с известной точностью определить критическое число Грасгофа. В стационарном случае оно оказалось равным  $G_* = 2700 \pm 5$ .

При наличии вибрации величина  $\psi_a$  осциллирует, причем после переходного периода монотонно изменяются со временем среднее значение и амплитуда колебаний. В этом случае можно определить нейтральные значения параметров, разделяющие области устойчивости и неустойчивости, изменяя эти параметры с достаточно мелким шагом и следя за увеличением (уменьшением) среднего значения или амплитуды  $\psi_a$ . Таким образом удается определить границы областей устойчивости и неустойчивости.

На фиг. 2 изображена карта устойчивости на

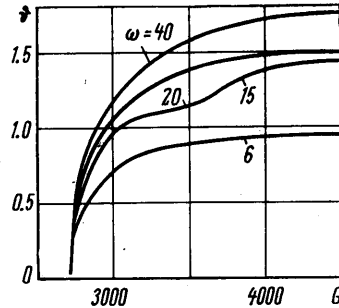
плоскости  $(\phi, \frac{1}{\omega})$  для числа Грасгофа  $G = 3000 \approx 1.11 G_*$ . (Области неустойчивости заштрихованы.) Линия  $\phi = 0$  соответствует неустойчивости, имеющей место в отсутствие вибрации при  $G > G_*$ . К этой линии примыкает нижняя область неустойчивости, соответствующая колебаниям с частотой, равной частоте модуляции. Над этой областью лежит полоса устойчивости, определяющая интервал значений  $\phi$ , в котором наличие модуляции делает равновесие устойчивым и при  $G > G_*$ . При достаточно больших  $\phi$  модуляция снова приводит к появлению нарастающих колебаний, которым на фиг. 2 соответствуют верхние резонансные области неустойчивости. Здесь чередуются области, в которых период колебаний либо в два раза больше периода модуляции, либо равен ему («полудельные» и «целые» решения).



Фиг. 2

устойчивости. Здесь чередуются области, в которых период колебаний либо в два раза больше периода модуляции, либо равен ему («полудельные» и «целые» решения).

При  $G < G_*$  нижняя полоса неустойчивости отсутствует. Эта полоса возникает начиная с  $G = G_*$ , причем ее ширина монотонно растет с увеличением  $G$ . На фиг. 3 представлена зависимость граничного значения  $\Phi$  для нижней области от числа Грасгофа при различных частотах. Видно, что чем больше  $\Phi$ , тем больше значение  $G$ , начиная с которого модуляция с данной амплитудой приводит к неустойчивости. Таким образом, кривые на фиг. 3 выражают зависимость критического числа Грасгофа от амплитуды модуляции. Они показывают, что модуляция массовой силы стабилизирует состояние равновесия, причем стабилизация возрастает при уменьшении частоты.



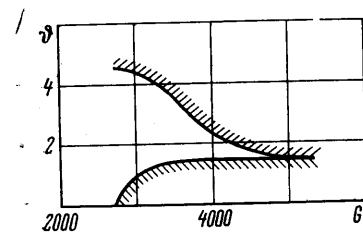
Фиг. 3

Следует заметить, что критическое число Грасгофа не может стать сколь угодно большим из-за наличия верхних областей неустойчивости, расположенных при данном  $G$  выше некоторого порогового значения  $\Phi$ . При увеличении числа Грасгофа одновременно с уширением нижней полосы неустойчивости происходит понижение нижней границы резонансных областей. Полоса устойчивости, разделяющая нижнюю и верхние области неустойчивости, практически исчезает. Этот эффект иллюстрирует фиг. 4, на которой показана зависимость пороговых значений  $\Phi$  для верхних и нижней областей неустойчивости от числа Грасгофа.

Как уже упоминалось во введении, в работе [2] дано решение линейной задачи об устойчивости горизонтального слоя жидкости при медленной модуляции градиента температуры. Приведенные выше численные результаты, полученные для полости квадратного сечения, качественно согласуются с результатами работы [2].

**3. Стационарные колебания в областях неустойчивости.** При отсутствии вибрации развитие возмущений в области неустойчивости приводит к установлению стационарных движений. Если же массовая сила модулируется, то в результате неустойчивости возникают колебания, которые после переходного процесса становятся стационарными. Характеристики стационарных колебаний — форма колебаний, средняя интенсивность движения, амплитуда и пр. — определяются из нелинейных уравнений и могут быть найдены численно.

На фиг. 5 показана форма колебаний для основной полосы неустойчивости, а также для верхних резонансных областей (см. фиг. 2). Во всех случаях, изображенных на фиг. 5, начальное возмущение задавалось в виде локального вихря. В основной полосе неустойчивости стационарные колебания близки к синусоидальным и имеют период, равный периоду модуляции (фиг. 5, а). Колебания в резонансных областях имеют более сложный спектральный состав (фиг. 5, б, в). В первой резонансной области (как и в других «получелых» областях) период колебаний вдвое больше периода модуляции  $T_0$  (фиг. 5, б). Колебания в этой области симметричны; среднее по периоду значение  $\psi_a$  равно нулю. Во второй (целой) области (фиг. 5, в) период колебаний, как и в основной полосе неустойчивости, совпадает с периодом модуляции. Колебания в этой области несимметричны, и среднее значение  $\psi_a$  отлично от нуля. Как видно из фиг. 5, б, в, колебания в резонансных областях связаны с изменением направления вихря. Изменение знака  $\psi_a$  в определенные моменты времени сопровождается разрушением вихря одного знака и формированием вихря противоположного направления. На фиг. 6 схематически изображена соответствующая перестройка поля функции тока.

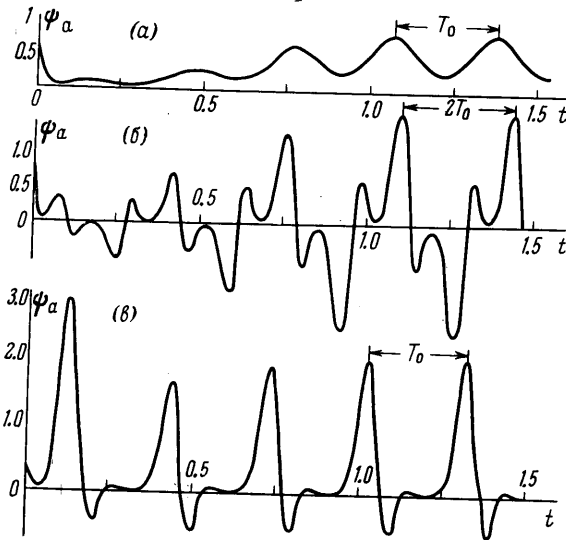


Фиг. 4

При изменении параметров внутри области неустойчивости остаются неизменными частота и форма колебаний, но меняются среднее значение интенсивности движения и амплитуда колебаний. Далее в качестве характеристики средней интенсивности движения выберем величину  $\psi_0$ , определяемую как среднее по времени от  $\psi_a(t)$  за период. Амплитуду колебаний  $A$  определим как полуразность между максимальным и минимальным значениями функции  $\psi_a(t)$ . Обе величины  $\psi_0$  и  $A$  характеризуют установившиеся колебания внутри областей неустойчивости. В области устойчивости равновесия обе величины равны нулю.

Представляет интерес проследить за изменением характеристик стационарных колебаний внутри каждой области неустойчивости. При этом наиболее интересна нижняя полоса (фиг. 2), поскольку эта полоса характеризует влияние вибрации на стационарную неустойчивость.

Для нижней полосы была исследована зависимость среднего значения и амплитуды установившихся колебаний от параметров  $\Phi$  и  $G$  при заданной частоте модуляции.



Фиг. 5

сти от  $G$  на нуль, можно определить с хорошей точностью критические числа  $G_*$  для соответствующих  $\Phi$ . Эти критические числа согласуются с найденными выше (п. 2) путем непосредственного наблюдения за нарастанием или затуханием возмущений.

Зависимость характеристик стационарных колебаний от амплитуды модуляции при фиксированном числе Грасгофа представлена на фиг. 9. Эта зависимость соответствует вертикальным сечениям фиг. 7. При  $\Phi \rightarrow 0$  колебания непрерывно переходят в конвективные движения постоянной интенсивности; амплитуда обращается в нуль (фиг. 9, б), а среднее значение интенсивности стремится к стационарному значению, получаемому при постоянной внешней силе (фиг. 9, а). На границе с областью устойчивости обе характеристики обращаются в нуль.

При других частотах модуляции имеют место зависимости, аналогичные изображенным на фиг. 8 и 9, причем средняя интенсивность почти не зависит от частоты, а амплитуда колебаний уменьшается с увеличением  $\omega$ .

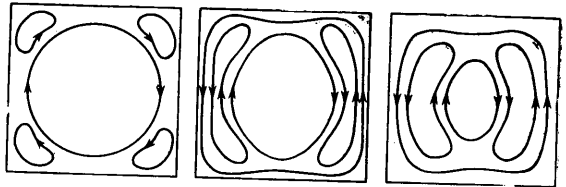
Аналогичным образом могут быть исследованы нелинейные характеристики стационарных параметрических колебаний в верхних резонансных областях неустойчивости. Для примера на фиг. 10 представлены результаты расчетов характеристик колебаний для двух первых резонансных областей. При фиксированных значениях  $G = 3000$  и  $\Phi = 5$  (пунктирная горизонтальная прямая на фиг. 2) исследовалась

зависимость средней интенсивности  $\psi_0$  и амплитуды  $A$  от частоты вибрации. Обе эти характеристики отличны от нуля лишь внутри областей неустойчивости. В первой (полудельной) области  $\psi_0 = 0$  (симметричные колебания). Качественно близкая картина получается и для других разрезов. Следует заметить лишь, что ситуация осложняется в случае

более высоких значений амплитуды модуляции  $\Phi$ , когда резонансные области неустойчивости разделены узкой полосой устойчивости. Вблизи этой полосы стационарные колебания либо вовсе не удается получить, либо они возникают, но лишь при определенной величине и форме начального возмущения. Этот вопрос заслуживает дальнейшего исследования.

В процессе всех вычислений параллельно с характеристиками интенсивности конвективных колебаний определялся и безразмерный тепловой поток через полость.

На фиг. 7 представлена граница устойчивости на плоскости  $(\Phi, G)$ , соответствующая  $\omega = 20$ , и пунктиром показаны те сечения, вдоль которых определялись характеристики стационарных колебаний. Изменение  $A$  и  $\psi_0$  с числом Грасгофа при различных значениях амплитуды модуляции (горизонтальные разрезы) показано на фиг. 8. При фиксированном  $\Phi$  в области  $G < G_*$ , где  $G_*$  зависит от  $\Phi$ , стационарных колебаний нет (область устойчивости). В области неустойчивости ( $G > G_*$ ) среднее значение  $\psi_0$  и амплитуда  $A$  растут с увеличением  $G$ . Вблизи границы устойчивости для среднего значения  $\psi_0$  имеет место (как и при отсутствии модуляции) корневой закон:  $\psi_0 \sim (G - G_*)^{1/2}$ , причем интервал чисел Грасгофа, в котором справедлив корневой закон, сужается по мере увеличения амплитуды. Экстраполируя значения  $\psi_0^2$  в зависимо-

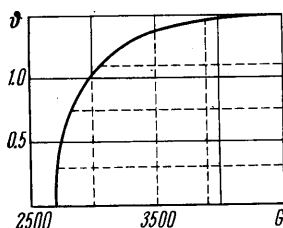


Фиг. 6

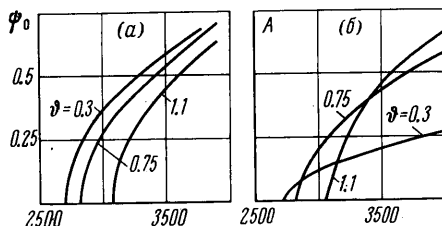
Этот поток (число Нуссельта) выражается через безразмерный градиент температуры на горизонтальной границе

$$N = - \int \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx$$

Интегрирование здесь проводится по нижней ( $N_+$ ) или по верхней ( $N_-$ ) границе. Соответствующие значения  $N_+$  и  $N_-$  отличаются друг от друга во время переходного процесса и совпадают в любой момент в режиме установившихся колебаний. В отличие от среднего значения функции тока  $\psi_0$ , колебания числа Нуссельта как в ос-



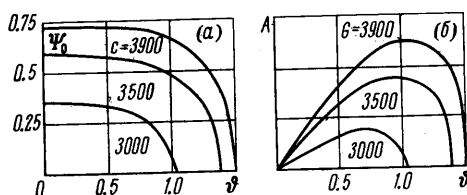
Фиг. 7



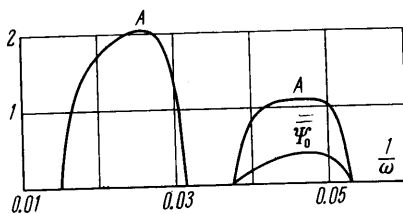
Фиг. 8

новой полосе, так и в резонансных областях происходят с частотой, равной частоте возбуждения.

В заключение следует отметить, что представляет интерес также такая ситуация, когда параметрическая конвекция возникает в условиях модуляции температуры на горизонтальных границах области. При этом в жидкости распространяется тепловая волна, и модуляция подъемной силы неоднородна по амплитуде и по фазе. Соот-



Фиг. 9



Фиг. 10

ветствующие расчеты в настоящее время производятся. Их результаты предполагается опубликовать отдельно.

Автор благодарен Г. З. Гершуни за постановку задачи и руководство и Е. Л. Тарунину за полезные советы.

Поступило 26 V 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин В. С. О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости теплового скин-слоя. ПМТФ, 1965, № 6.
4. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
5. Зеньковская С. М. Исследование конвекции в слое жидкости при наличии вибрационных сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
6. Venezian G. Effect of modulation on the onset of thermal convection. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, pt. 2, p. 243.
7. Симуни Л. М. Численное решение некоторых задач движения вязкой жидкости. Инж. ж., 1964, т. 4, № 3.
8. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.