

**РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ
ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ С ИЗЛОМАМИ ОБРАЗУЮЩЕЙ С УЧЕТОМ
РАВНОВЕСНОГО И ЗАМОРОЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ГАЗА
В УДАРНОМ СЛОЕ**

А. В. АНТОНЕЦ

(Москва)

Разработан алгоритм для расчета методом конечных разностей сверхзвуковой области течения в случае пространственного, установившегося обтекания затупленного тела с многими изломами образующей потоком невязкого газа, состояние которого при больших гиперзвуковых скоростях полета можно характеризовать равновесными или замороженными физико-химическими процессами.

Допускается, вообще говоря, произвольное число и чередование изломов как на сжатие, так и на расширение. Принятая схема вычислений обеспечивает выделение характерных областей течения: вихревых слоев, областей с различными уравнениями состояния и т. п.

Влияние неравновесных физико-химических реакций изучается на модели течения, замороженного или во всем ударном слое, или лишь в его части, примыкающей к поверхности тела. Устанавливается, что давление в некоторых точках на поверхности затупленных по сфере конусов с углами полураствора $\theta \leq 10^\circ$ для равновесного и замороженного течений может отличаться в два и более раз.

Приводятся примеры расчетов и анализ результатов.

Обозначения

Пусть R — радиус сферического затупления; xR , φ , rR — координаты точки пространства в связанной с телом цилиндрической системе координат (x отсчитывается вдоль оси тела от плоскости сопряжения с затуплением, φ — против часовой стрелки от наветренной стороны плоскости угла атаки α); обозначим через uU_∞ , vU_∞ , wU_∞ — проекции вектора скорости V соответственно на оси x , φ , r ; a через n — единичный вектор внутренней нормали к поверхности $r(x, \varphi)$, $p\rho_\infty U_\infty^2$ — давление; cU_∞ — местная скорость звука; iU_∞^2 — энтальпия; s — энтропия (или функция энтропии); $\rho\rho_\infty$ — плотность; γ — показатель адиабаты для совершенного газа.

Индексы ∞ означают величины, относящиеся к однородному набегающему потоку; b — на поверхности тела; s — на поверхности ударной волны; f — на промежуточной поверхности между телом и ударной волной.

1. Метод расчета основывается на принципе выделения за каждым из изломов области гладкости решения между поверхностью тела и присоединенной ударной волной (характеристической поверхностью) при положительном (отрицательном) изломе. Для отрицательного излома, кроме того, производится скругление излома по параболе на малом интервале $\Delta x \sim 0.01-0.1$. Если по каким-либо причинам (ограниченность оперативной памяти ЭВМ, ускорение времени счета и т. п.) число выделяемых областей фиксировано и меньше числа изломов образующей тела, вводится естественным способом сквозной счет «лишних» разрывов. Сквозным счетом проходятся также вторичные скачки, возникающие при пересечении поверхностей разрывов. Такой подход оправдан, конечно, лишь при не очень большой интенсивности неучитываемых разрывов.

В областях гладкости решения дифференциальные уравнения относительно искомым функций u , v , w , p , i от независимых переменных

$$\xi = x, \quad \eta = \varphi, \quad \zeta = \frac{r - r_b(x, \varphi)}{r_s(x, \varphi) - r_b(x, \varphi)}$$

заменяются конечно-разностными в точках $\{(n + \alpha)h_1, lh_2, (m + \delta)h_3\}$ равномерной сетки с шагами h_1 , h_2 , h_3 и нумерацией узлов n , l , m соответственно по осям ξ , η , ζ . Для вектора $X = \{u, v, w, p\}$ имеем

$$\begin{aligned} X|_{l, m+\delta}^{n+\alpha} &\approx \alpha(\gamma X_{lm}^{n+1} + \delta X_{l, m+1}^{n+1}) + \beta(\gamma X_{lm}^n + \delta X_{l, m+1}^n), \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} \Big|_{l, m+\delta}^{n, \alpha} &\approx \frac{1}{h_1} [\gamma(X_{lm}^{n+1} - X_{lm}^n) + \delta(X_{l, m+1}^{n+1} - X_{l, m+1}^n)] \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} \Big|_{l, m+\delta}^{n+\alpha} &\approx \frac{1}{2h_2} (X_{l+1, m+\delta}^{n+\alpha} - X_{l-1, m+\delta}^{n+\alpha}) \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} \Big|_{l, m+\delta}^{n+\alpha} &\approx \frac{1}{h_3} [\alpha(X_{l, m+1}^{n+1} - X_{l, m}^{n+1}) + \beta(X_{l, m+1}^n - X_{l, m}^n)] \\ 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \gamma + \delta = 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Варьируя весовые коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ можно изменять оптимизацию алгоритма в нужном направлении.

Выделение областей гладкости решения или уменьшение шагов конечно-разностной сетки в окрестностях резкого изменения искомых функций могут быть достаточно эффективными мерами против неустойчивости численного счета.

Так, при расчете замороженных течений, а также вихревых слоев на поверхности затупленных тел полезно построить промежуточную поверхность тока r_f , проходящую через заданный контур на начальной плоскости (т. е. вместо уменьшения шага сетки h_3 использовать соответствующее перераспределение узловых точек).

Решение системы конечно-разностных уравнений для стандартной области типа поверхность тела — ударная волна осуществляется с некоторой модификацией по схеме метода [1]. Прямая прогонка выполняется по конечным формулам без использования подпрограмм умножения и обращения матриц не только общего, но и специального вида. Искомые величины u, v, w, p в узловых точках конечно-разностной сетки определяются при обратной прогонке из системы трех уравнений движения и прогоночного соотношения, энтальпии — из уравнения Бернулли или с помощью интегрирования уравнения адиабаты вдоль линий тока. Естественно, что надежность численного алгоритма повышается, если в процессе счета выполняются проверка и коррекция результатов. Например, сглаживание пилообразных возмущений решения достигается пересчетом величин во внутренних точках поля течения после обратной прогонки

$$f(\xi) \approx 1/4[(\xi - h_3) + 2f(\xi) + f(\xi + h_3)] \quad (1.2)$$

Как показал опыт расчетов, в схемах, предусматривающих вычисление энтальпии через построение линий тока, уменьшить вычислительные погрешности в компонентах скорости u, v, w , а значит, и улучшить устойчивость счета можно пересчетом

$$u = \left(\frac{1 + 2(i - i_{\infty})}{1 + \sigma^2 + \phi^2} \right)^{1/2}, \quad v = \sigma u, \quad w = \phi u \quad \left(\sigma = \frac{v}{u}, \quad \phi = \frac{w}{u} \right) \quad (1.3)$$

Здесь σ, ϕ определяются по значениям u, v, w после обратной прогонки.

Начальные данные для расчетов сверхзвуковой области течения при пространственном обтекании затупленных тел известны, например, из работ [2-5].

Уравнение состояния газа при равновесных физико-химических процессах представляется в виде

$$\rho = z \frac{p}{i}, \quad \frac{1}{c^2} = \frac{z-1}{i} \left[1 + \frac{1}{z-1} \frac{\partial z}{\partial \ln p} + \frac{1}{z(z-1)} \frac{\partial z}{\partial \ln i} \right] \quad (1.4)$$

Для воздуха функции $z(\ln p, \ln i)$ вычисляется из аппроксимации [6], для совершенного газа $z = \gamma / (\gamma - 1)$. Для течений газа с параметрами, замороженными вдоль линий тока, уравнение состояния задается соотношениями

$$\rho = \left(\frac{p}{s} \right)^{1/\kappa}, \quad c^2 = \kappa \frac{p}{\rho}, \quad i = h + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \quad (1.5)$$

где κ, h, s остаются постоянными вдоль линий тока. Начальные значения замороженных параметров на каждой линии тока рассчитываются по формулам

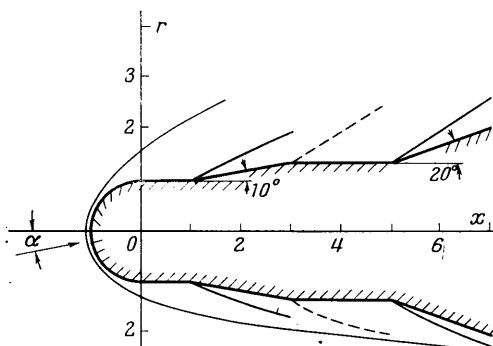
$$\kappa = \frac{7 - 2x_a}{5 - 2x_a}, \quad h = i - \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}, \quad s = \frac{p}{\rho^\kappa} \quad (1.6)$$

где сумма концентраций атомов кислорода, азота и аргона x_a для воздуха берется из таблиц [7] при заданных равновесных значениях давления и энтальпии.

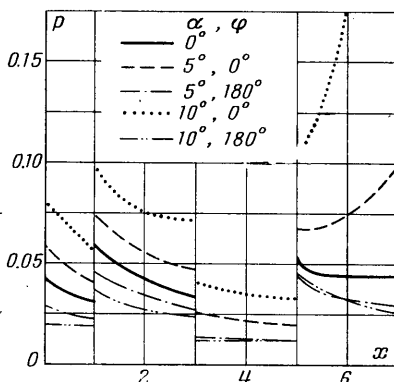
Алгоритм расчета течений газа с уравнением состояния (1.5) учитывает две схемы течения: с контактным разрывом и без него. В первой схеме на начальной плоскости в сверхзвуковой области течения выбирается некоторый контур между поверхностью тела и ударной волной, при последующем счете вниз по потоку выстраивается поверхность тока r_f , проходящая через этот контур. В области (r_b, r_f) рассчитывается течение газа с параметрами, замороженными вдоль линий тока, в области (r_f, r_s) — течение совершенного газа или равновесно-диссоциирующего воздуха. Поверхность тока r_f будет в этом случае поверхностью контактного разрыва, разделяющей две области течения с различными уравнениями состояния. Во второй схеме замораживание производится на линиях тока во всем ударном слое (переход через ударную волну считается равновесным). Таким образом, оценивается влияние неравновесных физико-химических реакций, когда зона неравновесности занимает весь ударный слой или лишь его часть.

2. В качестве примера на фиг. 1 изображены форма тела и ударные волны в плоскости угла атаки, на фиг. 2 — распределение давления по поверхности тела при обтекании равновесно-диссоциирующим воздухом ($\rho_\infty = 0,00183 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4, p_\infty =$

$= 120.69 \text{ кг/м}^2$, $c_\infty = 304.25 \text{ м/сек}$, $U_\infty = 5000 \text{ м/сек}$): сплошная линия — $\alpha = 0$, штриховая — $\alpha = 5^\circ$, $\varphi = 0$, штриховая с точкой — $\alpha = 5^\circ$, $\varphi = 180^\circ$; точечная линия — $\alpha = 10^\circ$, $\varphi = 0$; штриховая с двумя точками — $\alpha = 10^\circ$, $\varphi = 180^\circ$. То обстоя-



Фиг. 1



Фиг. 2

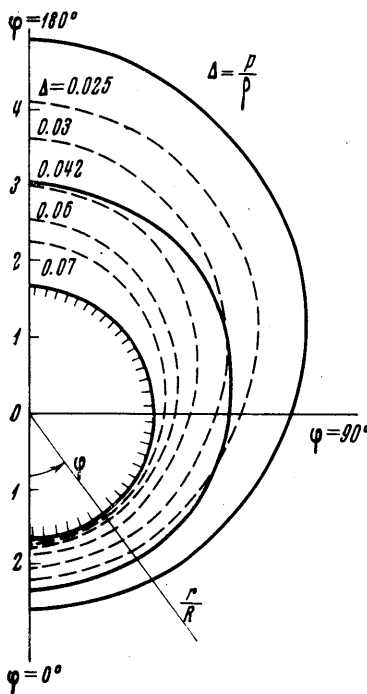
тельство, что на фиг. 1 ударные волны (сплошные линии) и характеристические поверхности (пунктир), выделяющие области влияния изломов поверхности тела, показаны заканчивающимися внутри ударного слоя, означает, что вниз по течению от соответствующей координаты x используется сквозной срез упомянутых разрывов.

Для сравнения отметим, что обтекание частного случая тел с изломом образующей рассматривается в работе [8]. На фиг. 3 показана типичная картина изэнтроп $s = p/\rho^\gamma$ в поперечной плоскости при $x = 5.0$ (затупленный по сфере цилиндр с «юбкой»: $x = 1.0$, $\theta = 10^\circ$, $M_\infty = 6$, $\gamma = 1.4$, $\alpha = 10^\circ$). Сплошные линии соответствуют поверхностям тела и ударных волн, штриховые — изэнтропам. Возрастание энтропии во внутреннем скачке здесь не более 3–4%.

На фиг. 4 демонстрируется влияние уравнения состояния газа в ударном слое, около затупленного по сфере конуса с углом полураствора $\theta = 10^\circ$ при $\alpha = 0$ на распределение давления по поверхности тела: сплошная линия — равновесно-диссоциирующий воздух ($\rho_\infty = 0.338 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4$; $p_\infty = 2.4597 \text{ кг/м}^2$, $c_\infty = 319.11 \text{ м/сек}$, $U_\infty = 7400 \text{ м/сек}$); штриховая — замороженное течение на всех линиях тока; штриховая с точкой — совершенный газ с $\gamma = 7/5$, $M_\infty = 6$; штриховая с двумя точками — совершенный газ с $\gamma = 7/5$; $M_\infty = \infty$; треугольники и крестики — счет с контактным разрывом, так что в области (r_b , r_f) течение заморожено, а в области (r_f , r_s), соответственно, равновесно-диссоциирующий воздух или совершенный газ с $\gamma = 7/5$; $M_\infty = 23.2$. Граничная поверхность тока r_f проходит через контур на ударной волне на расстоянии $x = 0.45$ от критической точки.

Качественно отличие замороженного течения от равновесного на примере распределения давления по поверхности затупленных по сфере конусов проявляется в том, что в первом случае

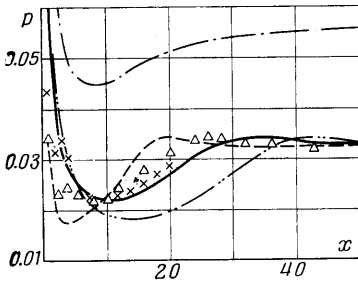
кривые давления имеют более резко выраженные «ложки»: минимумы уменьшаются, максимумы увеличиваются и сдвигаются ближе к носку тела. При отсутствии ложек (конуса малого угла полураствора $\theta \sim 0-5^\circ$) давление для замороженного течения остается ниже равновесного и выравнивание давлений происходит на больших расстояниях от носка $x \geq 20$.



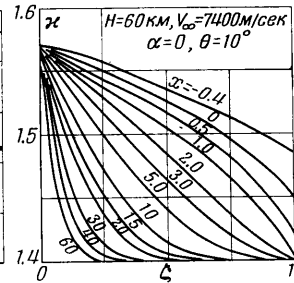
Фиг. 3

На фиг. 5 представлено распределение параметра κ поперек ударного слоя для различных значений x . В частности, видно, что для линий тока, прошедших через ударную волну при $x \geq 2$ параметр $\kappa = \gamma = 7/5$. При $x = 60$ область переменного κ занимает уже только $1/4$ часть толщины ударного слоя. На фиг. 6 показано изменение плотности (сплошные линии) и энтальпии (пунктир) газа поперек ударного слоя при счете с контактным разрывом (замороженное течение — равновесно-диссоцирующий воздух).

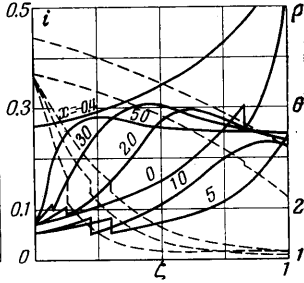
Изложенная в работе схема учета влияния неравновесности физико-химических реакций может, по-видимому, оказаться полезной для оценок практически наблюдаемых эффектов при полетах в диапазоне высот $H \geq 60$ км и скоростей $U_\infty \geq 6500$ м/сек



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

(см., например, работу [9]). Полученные оценки значительности этого влияния на столь важную величину, как давление, и, следовательно, аэродинамические характеристики тел обосновывают необходимость дальнейших более точных исследований обтекания тел с учетом неравновесных физико-химических процессов.

В заключение автор благодарит В. В. Лунева за постановку задачи и научное руководство, а также И. Н. Мурзинова, К. М. Магомедова, В. Г. Павлова, В. Г. Воронкина, С. Г. Синченко и других за оказанную в работе помощь.

Поступило 16 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
2. Белоцерковский О. М. Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной. Расчетные формулы и таблицы полей течений. М., 1961.
3. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
4. Бабенко К. И., Русанов В. В. Разностные методы решения пространственных задач газовой динамики. Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. механ., 1964; Обз. докл., вып. 2, М., «Наука», 1965.
5. Лунев В. В., Магомедов К. М., Павлов В. Г. Гиперзвуковое обтекание при тупленных конусах с учетом равновесных физико-химических превращений (таблица). М., 1968.
6. Синченко С. Г. Аппроксимация термодинамических функций воздуха. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 4.
7. Предводителев А. С., Ступоченко Е. В., Плешанов А. С. Таблицы термодинамических функций воздуха. (Для температур от 200 до 6000° К и давлений от 0.00001 до 100 атм.) М., ВЦ АН СССР, 1962, 1963.
8. Дьяконов Ю. Н., Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Сверхзвуковое пространственное обтекание затупленных тел. В сб.: «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды», 1968.
9. Вальо-Лаурин Р., Блюм М. Химические эффекты во внешних гиперзвуковых течениях. В кн.: «Исследование гиперзвуковых течений», 1964.