

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

М. Г. БЕРНАДИНЕР, В. М. ЕНТОВ

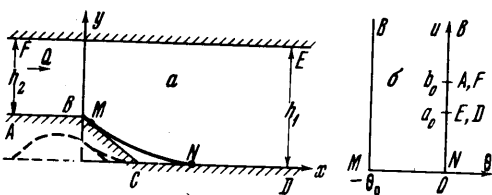
(Москва)

В работах [1, 2] была приведена формулировка плоских задач фильтрации с предельным градиентом, обладающих дополнительной симметрией, в переменных годографа (w, θ , где w — модуль скорости фильтрации, θ — угол, составляемый ею с осью x) и получено точное решение задачи о течении от бесконечной цепочки равнодебитных скважин. Ниже тем же методом рассматриваются некоторые другие задачи, допускающие точное решение.

1. При фильтрации с предельным градиентом, когда имеет место закон фильтрации

$$\text{grad } H = -(w + \lambda)w / w \quad (w > 0), \quad |\text{grad } H| \leq \lambda \quad (w = 0) \quad (1.1)$$

(H — напор, w — скорость фильтрации, $\lambda = \text{const}$), в местах резкого изменения сечения потока могут возникать застойные зоны. Представление



Фиг. 1

о возможных их размерах можно получить, рассматривая фильтрационное течение между двумя непроницаемыми границами с уступом (фиг. 1, а). Нетрудно убедиться, что течению фиг. 1, а отвечает в плоскости годографа скорости фильтрации $w\theta$ полуплоска $-\theta_0 \leq \theta \leq 0, w \geq 0$ (фиг. 1, б), на всей границе которой, за исключением отрезка

$a_0 < u < b_0, \theta = 0$, функция тока ψ равна нулю, а на этом отрезке $\psi = Q$. Здесь

$$u = w / \lambda, \quad a_0 = Q(h_1\lambda)^{-1}, \quad b_0 = Q(h_2\lambda)^{-1} \quad (Q \text{ — расход потока}).$$

Внутри полуплоскости функция ψ удовлетворяет уравнению [1, 2]

$$u(u + 1)\psi_{uu} + (u - 1)\psi_u + \psi_{\theta\theta} = 0 \quad (1.2)$$

Для определения решения $\psi(u, \theta)$ можно воспользоваться [2] интегральным преобразованием по переменной u , после чего получим

$$\begin{aligned} \psi(u, \theta) = & 1/2 Qu^2 \int_0^\infty \frac{s^3(1 + s^2) \text{sh } s(\theta + \theta_0)}{\text{th } \pi s \text{ sh } s\theta_0} \times \\ & \times F(s, -u) \int_{a_0}^{b_0} (1 + v)F(s, v) dv ds \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $F(s, -u)$ — сокращенное обозначение гипергеометрической функции $F(2 + is, 2 - is, 3, -u)$. Вид границы застойной зоны определя-

ется [1] выражением

$$z(\theta) + C = x(\theta) + iy(\theta) + C = \int_0^\theta \chi(\theta) e^{i\theta} d\theta$$

$$\chi(\theta) = \frac{1}{\lambda} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) =$$

$$= \frac{Q}{\lambda} \int_0^\infty \frac{s^3(1+s^2) \operatorname{sh} s(\theta + \theta_0)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} \int_{a_0}^{b_0} (1+v) F(s, v) dv ds$$
(1.4)

Переходя, как и в [2], к интегрированию в плоскости комплексного переменного s и используя интегральные представления Эйлера и формулы аналитического продолжения для гипергеометрических функций [3, 4], получаем

$$\chi(\theta) = \frac{Q}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^\infty s^2(1+is) \frac{\operatorname{sh} s(\theta + \theta_0)}{\operatorname{sh} \theta_0 s} \int_{a_0}^{b_0} (1+v) \int_0^1 \frac{v^{-2-is} t^3 dt}{(v+t)^2} dv ds =$$

$$= \frac{2Q\pi^2}{\lambda\theta_0^3} \int_{a_0}^{b_0} \frac{1+v}{v^2} \int_0^1 \frac{t^3 v^{\xi-2}}{(v+t)^2} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\theta\xi}(1+v^\xi e^{i\theta\xi})}{(1-v^\xi e^{i\theta\xi})^3} - \right.$$

$$\left. - \xi \frac{e^{i\theta\xi}(1+4v^\xi e^{i\theta\xi} + v^{2\xi} e^{i2\theta\xi})}{(1-v^\xi e^{i\theta\xi})^4} \right] dt dv \quad \left(\xi = \frac{\pi}{\theta_0}, v = \frac{t(1-t)}{v+t} \right) \quad (1.5)$$

Граница застойной зоны определяется выражением (1.4) после подстановки в него (1.5). Ограничимся здесь случаем $\theta_0 = 1/2\pi$, что отвечает прямоугольному уступу. При $\theta_0 = 1/2\pi$ задача в плоскости годографа близка к задаче, рассмотренной в [2] (назовем ее задачей 1), и может быть приведена к ней. Положим, прежде всего $\theta = \beta - 1/2\pi$, тогда в плоскости (u, β) задача будет поставлена для полуполосы $u \geq 0, 0 \leq \beta \leq 1/2\pi$. Решение задачи 1 с параметром a обозначим через $\psi_I(u, \beta, a)$. Тогда, очевидно, в силу линейности рассматриваемых задач

$$\psi(u, \theta) = \psi(\beta - 1/2\pi, u) = \psi_I(u, \theta + 1/2\pi, a_0) - \psi_I(u, \theta + 1/2\pi, b_0) \quad (1.6)$$

Аналогичное соотношение вследствие (1.4) имеет место и для координат застойной зоны

$$z(\theta) = x(\theta) + iy(\theta) = z_0 + z_I(\theta + 1/2\pi, a_0) - z_I(\theta + 1/2\pi, b_0) \quad (1.7)$$

Используя выражение (1.7) и формулу (4.7) работы [2], можно определить границу застойной зоны для рассматриваемой задачи. Для определения комплексной постоянной, входящей в (1.7), имеем два условия: $x(-1/2\pi) = 0, y(0) = h = h_1 - h_2$ (фиг. 1). Будем теперь расширять канал ($h_1 \rightarrow \infty$), оставляя неизменной выходную скорость a_0 и высоту уступа h . При этом

$$Q = h_1 \lambda a_0 \rightarrow \infty, \quad b_0 - a_0 = a_0 (h/h_1) (1 + o(1)) \quad (1.8)$$

В пределе получаем задачу об обтекании стенки с уступом высоты h параллельным потоком со скоростью λa_0 на бесконечности.

На плоскости годографа ей отвечает задача для полуполосы $u \geq 0, -1/2\pi \leq \theta \leq 0$, причем $\psi = 0$ на всей границе, за исключением точки $\theta = 0, u = a_0$, где решение имеет особенность.

Легко видеть, что эта особенность соответствует дельта-функции.

Действительно, в пределе при $h_1 \rightarrow \infty$

$$\int_{a_0+\varepsilon}^{b_0+\varepsilon} \psi(\theta, u) du = (b_0 - a_0)Q \rightarrow \lambda a_0^2 h = \text{const}$$

что как раз соответствует условию вида

$$\psi(0, u) = \lambda h a_0^2 \delta(u - a_0) \quad (1.9)$$

Соответствующая форма застойной зоны получается как непосредственно, так и предельным переходом $h_1 \rightarrow \infty$, $a_0 = \text{const}$ в (1.6) и определяется соотношением

$$\begin{aligned} z(\theta) = z_0 - \frac{8h(1+a_0)}{\pi} \int_0^1 \frac{t^3 dt}{(t+a_0)^2} & \left[\frac{1}{8v^3} \ln \frac{1+2v \cos \theta + v^2}{1-2v \cos \theta + v^2} - \right. \\ & - \frac{C(v, \theta) \cos \theta - D(v, \theta) \sin \theta}{2v^2(1-2v^2 \cos 2\theta + v^4)^3} - \frac{i}{4v^3} \text{arc tg} \frac{v \sin \theta}{1+v \cos \theta} - \\ & \left. - \frac{i}{4v^3} \text{arc tg} \frac{v \sin \theta}{1-v \cos \theta} + i \frac{C(v, \theta) \sin \theta + D(v, \theta) \cos \theta}{2v^2(1-2v^2 \cos 2\theta + v^4)^3} \right] \\ v = t(1-t)(a_0+t)^{-1}, \quad C(v, \theta) = 1 - 3v^2 \cos 2\theta + \\ & + 10v^4 \cos 4\theta - 21v^6 \cos 2\theta - v^6 \cos 6\theta + 21v^8 - 7v^{10} \cos 2\theta \\ D(v, \theta) = -v^2 \sin 2\theta + 3v^6 \sin 2\theta + v^6 \sin 6\theta - 4v^8 \sin 4\theta + 3v^{10} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (1.10)$$

Застойные зоны, рассчитанные по формулам (1.10), показаны на фиг. 2, а. На фиг. 2, б приведена зависимость относительной площади $S_0 = S/h^2$ застойной зоны от параметра a_0 .

Пусть на стенке в канале ширины h_1 имеется выступ произвольной формы (пунктир на фиг. 1), полностью перекрываемый уступом ABC . Тогда из утверждений, доказанных в работе [5], следует, что застойная зона, образующаяся вблизи выступа, не выходит за пределы границы $ABMND$. Распиряя канал, получаем аналогичное утверждение для обтекания выступа в стенке однородным потоком на бесконечности. Это позволяет указать верхнюю оценку для размеров застойных зон, образующихся при обтекании однородным потоком симметричных относительно направления потока препятствий. Очевидно, ось препятствия является линией тока, и ее можно заменить непроницаемой стенкой. Построим на этой стенке уступ, полностью закрывающий препятствие. Застойная зона для уступа полностью перекроет застойную зону, образующуюся вблизи препятствия. В частности, отсюда следует, что при обтекании однородным фильтрационным потоком со скоростью U симметричного непроницаемого включения, имеющего длину L и максимальный поперечник B , общая площадь, исключенная из движения (площадь включения и примыкающих к нему застойных зон) не превышает

$$S^* = BL + B^2 S_0(U/\lambda) \quad (1.11)$$

где функция S_0 определяется графиком фиг. 2, б.

2. Рассмотрим бесконечную цепочку равностоящих равнодебитных источников (стоков), параллельную непроницаемой границе. Если при заданном дебите источника $2Q$ и расстоянии между источниками $2L$ расстояние h между границей и осью цепочки достаточно велико (соответствующие условия будут получены впоследствии), то застойные зоны, отвечающие отдельным источникам, смыкаются. В этом случае задача для уравнения (1.2) на плоскости годографа принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq u, \quad \psi(0, u) = \psi(\theta, 0) = 0, \quad \psi(\pi, u) = 0 \quad (u < a_0) \\ \psi(\pi, u) = Q \quad (u > a_0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(u, \theta) = u^2 Q \int_0^\infty \frac{s \operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{sh} s\pi \operatorname{th} s\pi} F(s, -u) [(1+a_0)s^2 F(1+is, 1-is, 2, -a_0) + \\ + F(is, -is, 1, -a_0)] ds \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поступая так же, как в п. 1, найдем

$$\chi(\theta) = \frac{2Q}{\pi\lambda} \int_0^1 \left[\frac{1+a_0}{a_0(1-t)} \operatorname{Im} \frac{ve^{i\theta} - v^2e^{2i\theta}}{(1+ve^{i\theta})^3} + \frac{1}{t} \operatorname{Im} \frac{ve^{i\theta}}{(1+ve^{i\theta})^2} \right] dt$$

$$v = t(1-t)(a_0+t)^{-1} \quad (2.3)$$

Координаты границы застойной зоны определяются выражением (1.4) после подстановки (2.3), и их определение сводится к вычислению одного определенного интеграла.

Постоянная y_0 равна нулю, а для определения x_0 нужно вычислить расстояние от источника до вершины застойной зоны. Имеем [1]

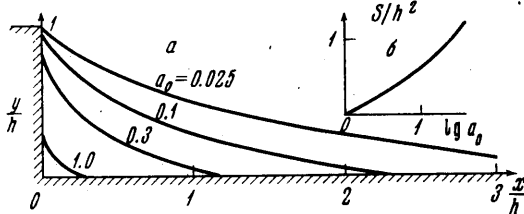
$$x_0 = \int_0^\infty \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} \frac{dw}{w^2} - h =$$

$$= -h + \frac{Q}{2\pi\lambda} \int_0^1 \left\{ \frac{1+a_0}{a_0(1-t)} \left[1 + \frac{2v}{(1+v)^2} + v \ln v - \frac{1+v^2}{v} \ln(1+v) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{t} \left[\frac{v-1}{v+1} + v \ln v + \frac{1-v^2}{v} \ln(1+v) \right] \right\} dt \quad (2.4)$$

Застойные зоны для нескольких значений параметра a_0 представлены на фиг. 3, а; на фиг. 3, б показана зависимость от безразмерного параметра $a_0 = Q/\lambda L$ значения относительной площади застойных зон S/L^2 и относительной глубины проникновения x^*/L .

(При этом расстоянии до непроницаемой границы брались условно равным L .) Из приведенных результатов следует, что уже при малых значениях предельного градиента между цепочкой и непроницаемой границей образуются обширные застойные зоны. Применительно к разработке месторождений, нефти которых обладают не-newтоновскими свойствами, это означает, что во избежание больших потерь нефти расстояние от цепочек скважин до непроницаемых границ должно выбираться по возможности малым (меньшим x^*).



Фиг. 2

3. Рассмотрим течение, создаваемое плоской трещиной, заключенной между двумя непроницаемыми плоскостями (фиг. 4). Трещина приближенно рассматривается как поверхность постоянного давления. В плоскости годографа задача сводится к отысканию решения уравнения (1.2) в полуполосе $0 \leq u$, $0 \leq \theta \leq 1/2\pi$ со следующими граничными условиями:

$$\theta = 0, \quad 0 \leq u \leq a_0, \quad \psi = 0; \quad a_0 < u, \quad \psi = -Q$$

$$\psi(0, \theta) = 0, \quad \partial \psi(u, 1/2\pi) / \partial \theta = 0, \quad a_0 = Q / (2L\lambda) \quad (3.1)$$

Решение уравнения (1.2) с граничными условиями (3.1) совпадает с решением того же уравнения в полуполосе $0 \leq \theta \leq \pi$ с симметричными граничными условиями

$$\psi(u, 0) = \psi(u, \pi) = 0 \quad (u \leq a_0), \quad \psi(u, 0) = \psi(u, \pi) = -Q \quad (a_0 < u)$$

$$\psi(0, \theta) = 0 \quad (3.2)$$

Это решение может быть найдено как суперпозиция решений

$$\psi(u, \theta) = +\psi_1(u, \theta) + \psi_1(u, \pi - \theta) \quad (3.3)$$

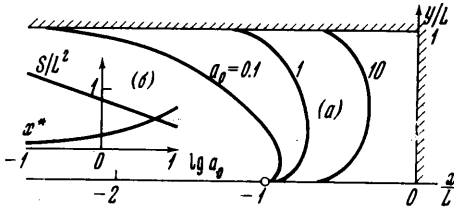
где $\psi_1(u, \theta)$ — решение уравнения (1.2) в полуполосе $0 \leq \theta \leq \pi$, $u \geq 0$ с нулевыми граничными условиями всюду, кроме луча $u > a_0$, $\theta = \pi$, на котором $\psi_1 = -Q$.

Таким образом, $\psi(u, \theta)$ непосредственно вычисляется по решению (2.2) предыдущей задачи.

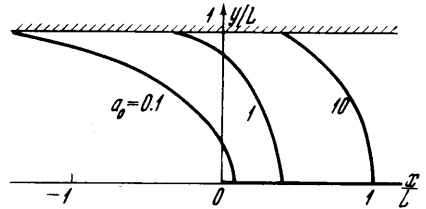
Для координат границы застойной зоны получаем

$$z = z_0 + z_1(\theta) + \overline{z_1(\pi - \theta)} \quad (3.4)$$

где $z_1(\theta)$ соответствует решению ψ_1 , и черта сверху означает переход к комплексно-сопряженному числу.



Фиг. 3



Фиг. 4

Положение застойной зоны будет вполне определено, если вычислить расстояние OA . Имеем, используя формулы возвращения на физическую плоскость [1]

$$\begin{aligned} x_A - x_0 &= - \int_{w_0}^{w_A} \left(\frac{\partial \psi}{\partial w} \right)_{\theta=\pi/2} \frac{dw}{w} = - \frac{1}{\lambda} \int_{u_0}^{u_A} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)_{\theta=\pi/2} \frac{du}{u} = \\ &= \frac{Q}{\pi \lambda} \left[\int_0^1 \frac{1+a_0}{(1-t)a_0} \left[\frac{2v}{1+v^2} + v \ln v - \frac{1+v^2}{2v} \ln(1+v^2) \right] dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \left[v \ln v + \frac{1-v^2}{2v} \ln(1+v^2) \right] \frac{dt}{t} \right], \quad v = \frac{t(1-t)}{a_0+t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Застойные зоны для ряда значений a_0 показаны на фиг. 4.

Как видно из фиг. 4, отбор жидкости происходит лишь через ближайшую к концу часть трещины; остальная часть трещины охвачена застойной зоной. Это обстоятельство позволяет использовать полученное решение для плоской прямолинейной трещины при рассмотрении осесимметричного течения с круглой трещиной, радиус которой много больше мощности пласта.

Институт механики МГУ
Институт геологии и разработки
горючих ископаемых

Поступило 27 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Ентов В. М. Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., «Наука», 1965.
4. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.
5. Ентов В. М. Об аналогии уравнений плоской фильтрации и продольного сдвига нелинейно-упругих и пластических тел. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.