НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ В УПРУГО-ВЯЗКОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В. А. ЧЕРНЫХ

(*Москва*)

Исследуется влияние напряженного состояния упруго-вязкой пористой породы на фильтрацию жидкости или газа при разработке нефте-газо-водоносных пластов. Рассмотрены случаи фильтрации жидкости или газа в средах Максвелла, Кельвина, Пойнтинга — Томсона, Бюргерса и Джеффриса. Как известно, для отбора жидкости или газа в стенке скважины простреливается отверстие, вокруг которого в пласте образуется каверна в виде полусферы радиусом r_0. Таким образом задача о притоке пластового флюида к скважине сводится к задаче о центрально-симметрической фильтрации жидкости или газа к полой сфере в бесконечном однородном массиве с реологическими свойствами.

1. Общие уравнения. Для решения задачи о влиянии реологических свойств породы в условиях сложного напряженного состояния пласта на фильтрацию пластовой жидкости необходимо совместно решить следующую систему уравнений:

уравнения равновесия сил

$$\sum_i \frac{\partial \sigma_{ij}{}^f}{\partial x_i} - \frac{\partial P}{\partial x_j} = 0 \tag{1.1}$$

физические уравнения

$$P(D) S_{ij} = Q(D) e_{ij}, \qquad F(D)\sigma = H(D)\varepsilon \tag{1.2}$$

геометрические уравнения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.3}$$

Здесь x_i — прямоугольные координаты, P — давление пластового флюида, $\sigma_{ij}{}^f$ — эффективные напряжения

$$s_{ij} = \sigma_{ij}{}^f - \sigma\delta_{ij}, \qquad \sigma = \frac{1}{3}\sum_i \sigma_{ii}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j \\ 1 & \text{при} \quad i = j \end{cases}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{3}\sum_i \varepsilon_{ii}, \qquad D = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$P(D) = \sum_{n=0}^{p} p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \qquad Q(D) = \sum_{n=0}^{q} q_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}$$

$$F(D) = \sum_{n=0} f_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \qquad H(D) = \sum_{n=0} h_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}$$

t — время, p_n, q_n, f_n, h_n — коэффициенты, p, q, h, f — числа, ε_{ij} — относительные деформации, u_i, u_j — перемещения в направлении координатных осей i и j соответственно $(i, j = x, y, z)$.

Как показали многочисленные эксперименты, объемное изменение пород можно считать линейно упругим, т. е. $H(D) = 1$, $F(D) = {}^1/_3K^{-1}$

$$\varepsilon = {}^1/_3K^{-1} \tag{1.4}$$

K — объемный модуль.

Большинство известных линейных реологических моделей реальных сред можно выразить при помощи соотношений

$$P(D) = p_0 + p_1\frac{\partial}{\partial t} + p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad Q(D) = q_0 + q_1\frac{\partial}{\partial t} + q_2\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

К уравнениям (1.1) — (1.5) применяется преобразование Лапласа и решение строится в пространстве изображений

$$\sum_i \frac{\partial\sigma_{ij}^*}{\partial x_i} - \frac{\partial P^*}{\partial x_j} = 0 \tag{1.6}$$

$$s_{ij}^* = 2G(s)e_{ij}^* \tag{1.7}$$

$$\varepsilon^* = \frac{1}{3}K^{-1}\sigma^*, \qquad \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) \tag{1.8}$$

$$2G(s) = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2}{p_0 + p_1 s + p_2 s^2}$$

Звездочка обозначает преобразование Лапласа по времени

$$f^* = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Уравнения (1.6) — (1.8) верны при нулевых начальных условиях и аналогичны уравнениям линейной теории упругости с учетом объемных сил. Такая же аналогия была обнаружена Алфреем [1] и Ли [2] между уравнениями термоупругости и термовязкоупругости в случае отсутствия объемных сил.

2. Общее решение задачи. После подстановки (1.8) и (1.7) в (1.6) в сферической системе координат в пространстве изображений получаем уравнение равновесия сил в перемещениях

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{du^*}{dr} + 2\frac{u^*}{r}\right) - \frac{3}{3K + 4G(s)}\frac{dP}{dr} = 0 \tag{2.1}$$

Здесь r — радиус, u^* — радиальное перемещение в пространстве изображений

$$3\varepsilon^* = \frac{du^*}{dr} + 2\frac{u^*}{r}, \qquad m_k^* - m^* = 3(\varepsilon_k^* - \varepsilon^*) \tag{2.2}$$

Здесь $3\varepsilon_k^*$ $3\varepsilon^*$ — преобразованное объемное расширение на контуре питания скважины и текущее соответственно; m_k^*, m^* — преобразованная пористость на контуре питания скважины и текущее. Сжимаемость зерен породы считается пренебрежимо малой по сравнению со сжимаемостью породы в целом. Из (2.1) — (2.2) следует:

$$m_k^* - m^* = \frac{p_0 + p_1 s + p_2 s^2}{(s-a)(s-b)}(P_k^* - P) \tag{2.3}$$

где a, b — корни уравнения

$$Kp_0 + {}^2/_3q_0 + (Kp_1 + {}^2/_3q_1)s + (Kp_2 + {}^2/_3q_2)s^2 = 0 \tag{2.4}$$

Обратное преобразование для случая $a \neq b$ дает

$$m_k - m = p_2[P_k(r,t) - P(r,t)] + \frac{1}{a-b}\int_0^t [(p_0 + p_1a + p_2a^2)e^{a\tau} -$$

$$-(p_0 + p_1b + p_2b^2)e^{b\tau}]H(\tau)[P_k(r,t-\tau) - P(r,t-\tau)]d\tau \qquad (2.5)$$

$H(\tau)$ — функция Хевисайда

при $a = b$

$$m_k - m = p_2[P_k(r,t) - P(r,t)] + \int_0^t [p_1 + 2ap_2 + (p_0 + p_1a +$$

$$+ p_2a^2)\tau]e^{a\tau}H(\tau)[P_k(r,t-\tau) - P(r,t-\tau)]d\tau \qquad (2.6)$$

3. Нелинейно-упругий режим фильтрации. Согласно теории нелинейно упругого режима фильтрации между изменениями пористости и проницаемости существует следующая экспериментально установленная связь [3, 4]

$$\frac{k}{k_н} = \left(\frac{m}{m_н}\right)^{\gamma} \qquad (3.1)$$

Здесь k, $k_н$ — текущая и начальная проницаемости, m, $m_н$ — текущая и начальная пористости, γ — коэффициент, зависящий от степени сцементированности породы, $4 \leqslant \gamma \leqslant 12$, причем меньшие значения соответствуют слабосцементированным, а большие — сильносцементированным породам.

При помощи уравнений (2.5), (2.6) и (3.1) можно установить зависимость проницаемости от давления в условиях данного напряженного состояния и в принципе рассчитать весь процесс фильтрации. Однако точные решения (2.5) и (2.6) требуют для своего практического применения существенных упрощений.

Как известно, напряженное состояние пласта влияет на поле давлений в пласте через сжимаемость породы, которая настолько мала, что в обычных условиях изменение давления пластового флюида, вызванное изменением напряженного состояния пласта, не превышает 20—30%, поэтому для определения распределения давлений в реологической пористой среде в качестве первого приближения принимается $P = P(r)$.

Тогда из (2.3) следует:

$$m_k{}^* - m^* = \frac{p_0 + p_1s + p_2s^2}{s(s-a)(s-b)}[P_k(r) - P(r)] \qquad (3.2)$$

при $a \neq b$

$$m_k - m = A(t)[P_k(r) - P(r)] \qquad (3.3)$$

$$A(t) = \frac{p_0}{ab} + \frac{p_0 + p_1a + p_2a^2}{a(a-b)}e^{at} - \frac{p_0 + p_1b + p_2b^2}{b(a-b)}e^{bt}$$

при $a = b$

$$m_k - m = B(t)[P_k(r) - P(r)]$$

$$B(t) = \frac{p_0}{a^2} + \left[p_2 - \frac{p_0}{a^2} + \left(\frac{p_0}{a} + p_1 + p_2a\right)t\right]e^{at} \qquad (3.4)$$

Из (3.1) и (3.3) следует:

$$k = k_k\left[1 - \frac{A(t)}{m_k}(P_k(r) - P(r))\right] \tag{3.5}$$

В дальнейшем все формулы записываются для случая $a \neq b$, при $a = b$ достаточно заменить $A(t)$ на $B(t)$.

4. Фильтрация жидкости. В случае квазистационарного процесса уравнение фильтрации в пласте с проницаемостью, зависящей от давления, имеет вид

$$\frac{k}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dP}{dr}\right) + \frac{dk}{dr}\frac{dP}{dr} = 0 \tag{4.1}$$

Из (4.1) и (3.5) находится давление

$$P(r,t) = P_k - \frac{m_k}{A(t)}\left\{1 - \left[1 - \left\{1 - \left[1 - \frac{A(t)}{m_k}(P_k - P_0)\right]^{\gamma+1}\right\}\frac{r_0}{r}\right]^{\varkappa}\right\} \quad \left(\varkappa = \frac{1}{\gamma+1}\right) \tag{4.2}$$

Здесь P_0 — давление пластового флюида в каверне вокруг перфорационного отверстия.

Выражение для дебита жидкости через одно перфорационное отверстие хорошо известно

$$Q = 2\pi r^2 \frac{k}{\eta}\frac{dP}{dr} \tag{4.3}$$

или с учетом (4.2)

$$Q = \frac{2\pi}{r_0^{-1} - R^{-1}}\frac{k_k m_k}{\eta(\gamma+1)A(t)}\left\{1 - \left[1 - \frac{A(t)}{m_k}(P_k - P_0)\right]^{\gamma+1}\right\} \tag{4.4}$$

Здесь Q — дебит жидкости через одно перфорационное отверстие, R — радиус контура питания скважины, r_0 — радиус каверны вокруг перфорационного отверстия, η — вязкость пластового флюида.

5. Фильтрация газа. Уравнение фильтрации газа в среде с проницаемостью, зависящей от давления, при квазистационарном режиме фильтрации, имеет вид

$$k\nabla^2(P^2) + \frac{dk}{dr}\frac{d(P^2)}{dr} = 0 \tag{5.1}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

При фильтрации идеального газа через поверхность каверны вокруг перфорационного отверстия выполняется равенство

$$Q = \frac{2\pi r^2}{\eta P_{ат}} kP\frac{dP}{dr} \tag{5.2}$$

Из (5.1) и (5.2) нетрудно найти выражение для дебита газа через одно перфорационное отверстие

$$Q = \frac{2\pi}{r_0^{-1} - R^{-1}}\frac{k_k m_k}{\eta(\gamma+1)A(t)}\left\{P_k - \frac{m_k}{A(t)(\gamma+2)} - \left[P_0 - \frac{m_k - A(t)(P_k - P_0)}{(\gamma+2)A(t)}\right]\left[1 - \frac{A(t)}{m_k}(P_k - P_0)\right]^{\gamma+1}\right\} \tag{5.3}$$

6. Применение полученных выше результатов к средам, свойства которых описываются линейными реологическими моделями.

Среда Максвелла. Механические свойства среды описываются уравнениями (1.2), (1.4), (1.5) при $p_0 = \nu^{-1}$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $q_0 = 0$, $q_1 = 2G$, $q_2 = 0$, где ν — время релаксации, G — модуль сдвига.

Повторяя приведенные рассуждения, нетрудно получить

$$A(t) = K^{-1} - \frac{4G}{3K+4G}\exp\left(-\frac{3Kt}{\nu(3K+4G)}\right) \tag{6.1}$$

Свойства среды Максвелла наиболее близки к свойствам глинистых пород и бетона.

Среда Кельвина. Свойства среды описываются выражениями (1.2), (1.4), (1.5) при $p_0 = 1$, $p_1 = p_2 = 0$, $q_0 = 2G$, $q_1 = 2G\nu$, $q_2 = 0$, тогда

$$A(t) = \frac{3}{3K+4G}\left[1 - \exp\left(-\frac{3K+4G}{4G\nu}t\right)\right] \tag{6.2}$$

Среда Пойнтинга — Томсона. В этом случае $p_0 = 1$, $p_1 = \nu_1$, $p_2 = 0$, $q_0 = 2G$, $q_1 = 2G\nu_2$, $q_2 = 0$

$$A(t) = \frac{3}{3K+4G}\left[1 + \left(\frac{3K+4G}{3K\nu_1+4G\nu_2}\nu_1 - 1\right)\exp\left(-\frac{3K+4G}{3K\nu_1+4G\nu_2}t\right)\right] \tag{6.3}$$

Среда Бюргерса. Модель Бюргерса удовлетворительно описывает поведение каменной соли [5] и глин Подмосковного бассейна [6]. Свойства среды Бюргерса описываются уравнениями (1.2), (1.4), (1.5) при $q_0 = 0$.

Среда Джеффриса. Модель Джеффриса [7] предложена для описания реологического поведения земной коры и соответствует случаю $p_2 = 0$, $q_0 = 0$.

Методика получения необходимых результатов совершенно аналогична приведенной в п. 1—5.

Поступило 14 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфрей Т. Механические свойства высокополимеров. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
2. Lee E. H. Stress analysis in visco-elastic bodies. Quart. Appl. Math., 1955, vol. 13, No. 2.
3. Николаевский В. Н. Движение двухфазной жидкости при упругом режиме фильтрации. ПМТФ, 1962, № 1.
4. Добрынин В. М. Физические свойства нефтегазовых коллекторов в глубоких скважинах. М., «Недра», 1965.
5. Schuppe F. Untersuchungen über rheologische Eigenschaften von Salzgesteinen. Polska Akademia nauk. Prace Komis. nauk Techn. Krakowie Gornictwo, 1966, № 1—2, p. 183—190.
6. Руппенейт К. В., Либерман Ю. М. Введение в механику горных пород. М., Госгортехиздат, 1960.
7. Рейнер М. Реология. М., «Наука», 1965.