ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА ДЛЯ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

В. М. ВОЛОЩУК

(*Обнинск*)

Одним из характерных примеров, когда возможно существенное влияние инерции частиц на их броуновское движение, является случай конвективной диффузии аэрозольных частиц из газообразной среды на тела-препятствия. Такого типа движение достаточно полно описывается, по-видимому, уравнением Фоккера — Планка [1]. Здесь приведены результаты приближенного решения этого уравнения, исследование является дальнейшим развитием [2–4].

1. Уравнение Фоккера — Планка для функции распределения аэрозольных частиц имеет вид [1]

$$k\frac{\partial f}{\partial t}+(k\nabla-\nabla_0\cdot\mathbf{v}')f+(\mathbf{u}+\mathbf{F}\cdot\nabla_0)f=\frac{1}{k\lambda}\nabla_0^2 f \tag{1.1}$$

Принятые здесь обозначения совпадают с использованными в [4], векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{F}$ предполагаются соленоидальными.

Естественно принять, что $f\to 0$ при $v'\to\infty$.

Поэтому к уравнению (1.1) можно применить по переменным v_j' преобразование Фурье. В итоге это уравнение значительно упростится. Имеем

$$ik\frac{\partial F_*}{\partial t}+(k\nabla+i\mathbf{s}\cdot\nabla^*)F_*+(\mathbf{u}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{s})F_*=\frac{-i\mathbf{s}^2}{k\lambda}F_*$$
$$(F_*=\langle f\exp[i(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v}')]\rangle) \tag{1.2}$$

Здесь и ниже скобки $\langle\ \rangle$ обозначают интегрирование по всем компонентам вектора $\mathbf{v}'$, ∇^* — оператор Гамильтона в пространстве переменных s_j. Сделаем в (1.2) замену функции

$$F_*\to\mu=\ln F_*$$

После несложных преобразований из (1.2) получим для μ уравнение

$$ik\partial\mu/\partial t+k(\nabla\cdot\nabla^*)\mu+k(\nabla\mu\nabla^*\mu)+ik(\mathbf{s}\cdot\nabla^*)\mu=-(\mathbf{s}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{F})-i\mathbf{s}^2/k\lambda \tag{1.3}$$

Ищем решение этого уравнения в виде ряда по целым положительным степеням s_j

$$\mu=a^{(0)}+\frac{i}{1!}a_j^{(1)}s_j+\frac{i_2}{2!}a_{mj}^{(2)}s_ms_j+\frac{i^3}{3!}a_{mrj}^{(3)}s_ms_rs_j+\ldots \tag{1.4}$$

Легко показать, что

$$\exp a^{(0)}=n,\qquad \mathbf{a}^{(1)}=\mathbf{v},\qquad \mathbf{a}^{(2)}=\boldsymbol{\sigma}$$
$$(n=\langle f\rangle,\ n\mathbf{v}=\langle\mathbf{v}'f\rangle,\ n\sigma_{mj}=\langle(v_m-v_m')(v_j-v_j')f\rangle)$$

Здесь n и $\mathbf{v}$ — концентрация и средняя скорость аэрозольных частиц, $\boldsymbol{\sigma}$ — дисперсия распределения по скоростям.

Подставляя (1.4) в (1.3), для n, $\mathbf{v}$ и σ получим уравнения

$$\partial n / \partial t + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0$$

$$k\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\right]\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{F} - \frac{k}{n}\operatorname{div} n\sigma$$

$$k\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\right]\sigma + 2kP(\sigma\cdot\nabla)\mathbf{v} + 2\sigma = \frac{2}{k\lambda}\mathbf{E} - \frac{k}{n}\operatorname{div} n\mathbf{a}^{(3)} \qquad (1.5)$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица, P — оператор симметризации. Можно показать, что

$$P(\sigma\cdot\nabla)\mathbf{v} = (\sigma\cdot\mathbf{D}) \qquad \left(2D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (1.6)$$

Рекуррентное уравнение для $\mathbf{a}^{(m)}$ при $m \geqslant 3$ имеет вид

$$k\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\right]\mathbf{a}^{(m)} + mkP(\mathbf{a}^{(m)}\cdot\nabla)\mathbf{v} +$$
$$+ kP\sum_{j=2}^{m-1}\frac{m!}{j!(m-j)!}(\mathbf{a}^{(m-j+1)}\cdot\nabla)\mathbf{a}^{(j)} + m\mathbf{a}^{(m)} = -\frac{k}{n}\operatorname{div} n\mathbf{a}^{(m+1)} \qquad (1.7)$$

Нетрудно показать [4], что влияние инерции частиц на их броуновское движение в нормальных физических условиях есть смысл рассматривать только при

$$k \leqslant 1, \qquad \lambda \geqslant 1 \qquad (1.8)$$

Действительно, параметры k и λ так связаны между собой, что при нормальных температурах системы k настолько мало при небольших λ, что влиянием инерции на движение частиц можно заведомо пренебречь.

Поэтому решение уравнений (1.5) и (1.7) можно попытаться найти в виде рядов по целым положительным степеням k и отрицательным степеням λ. В этом случае после несложных вычислений из уравнений (1.5) и (1.7) получим

$$\mathbf{a}^{(m)}|_{m\geqslant 3} = O(k/\lambda^{m-1}), \qquad \sigma = \frac{1}{k\lambda}\mathbf{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{D} + O(k/\lambda) \qquad (1.9)$$

$$\partial n / \partial t + \operatorname{div} n\mathbf{v} = 0$$

$$k\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\right]\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{F} - \frac{1}{\lambda}\nabla\ln n + \frac{k}{n\lambda}\operatorname{div} n\mathbf{D} + O(k^2/\lambda) \qquad (1.10)$$

Уравнения (1.10) являются асимптотическими, заведомо они тем эффективнее, чем меньше k^2/λ. При нормальных физических условиях k^2/λ очень мало, поэтому приближение (1.9), (1.10) можно считать вполне приемлемым для этих условий при практических расчетах.

2. Условие $k^2/\lambda \ll 1$ для некоторых задач не является необходимым условием применимости решений (1.9), (1.10). Нетрудно заметить, что к решениям (1.9), (1.10) можно также прийти, если изменение средней скорости аэрозольных частиц в пространстве и во времени мало. Так, например, предполагая, что градиенты $\mathbf{v}$ пренебрежимо малы, вместо уравнений (1.10) получим известное уравнение Смолуховского

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{F}\cdot\nabla)n = \frac{1}{\lambda}\nabla^2 n \qquad (2.1)$$

К этому же уравнению приходим, положив в (1.10) k равным нулю. В следующем приближении имеем

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div} n\mathbf{v}=0, \qquad k\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\right]\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{F}-\frac{1}{\lambda}\nabla\ln n \tag{2.2}$$

Эти уравнения были получены в [2] и решены для $\lambda \gg 1$ в [3, 4]. Если при определении σ можно пренебречь величинами: а) пропорциональными вторым и следующим производным от $\mathbf{v}$ и б) зависящим от произведений различных производных $\mathbf{v}$, то для σ также получим решение (1.9). Кстати, эти условия полностью совпадают с предположениями, которые применяются в механике сплошных сред при макроскопическом выводе уравнений движения вязкой жидкости [5].

Второе уравнение системы (1.10) можно записать в виде

$$\begin{gathered} k\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\right]\mathbf{v}+\mathbf{v}= \\ =\mathbf{u}+\mathbf{F}-\frac{1}{\lambda}\nabla\ln n+\frac{2}{n}\operatorname{div}\left[\eta\left(2\mathbf{D}-\frac{1}{3}\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\right]+\frac{1}{n}\nabla(\zeta\operatorname{div}\mathbf{v}) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь η и ζ — соответственно первая и вторая безразмерные вязкости аэрозольной жидкости. Они равны

$$\eta = kn/2\lambda, \qquad \zeta = {}^2/_3\eta \tag{2.4}$$

Параметр k представляет собой отношение характерной кинетической энергии частицы ε_0 к характерной энергии сопротивления среды ее движению ε_1; λ равно отношению ε_1 к «кванту» тепловой энергии среды ε_2. Следовательно

$$\eta=\frac{n}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2} \tag{2.5}$$

Заметим, что η и ζ — безразмерные величины, по сути дела они являются некоторыми аналогами обратных чисел Рейнольдса для случая обыкновенной жидкости. Записав уравнение (2.3) в размерном виде и сопоставив его с уравнением движения обыкновенной жидкости, находим, что размерная динамическая вязкость аэрозольной жидкости η^* должна быть равна

$$\eta^* = {}^1/_2 nD \tag{2.6}$$

Здесь D — коэффициент диффузии аэрозольных частиц. Как и следовало ожидать, имеет место полная аналогия с кинетической теорией газов.

3. Постановка граничных условий для полученных уравнений броуновского движения аэрозольных частиц в общем случае нетривиальна. Рассмотрим один интересный с физической точки зрения класс задач.

Пусть некоторое тело с поверхностью Г обтекает установившийся равномерный поступательный поток

$$\mathbf{u}+\mathbf{F}\to\mathbf{e} \quad \text{при } r\to\infty \qquad (|\mathbf{e}|=1) \tag{3.1}$$

Тогда в стационарном случае решение уравнения (1.1) будет единственно при условиях

$$\begin{gathered} f=f_0 \ \text{ на } \Gamma, \qquad f\to 0 \ \text{ при } v'\to\infty \\ f\to (k\lambda/2\pi)^{3/2}\exp\left(-{}^1/_2 k\lambda|\mathbf{v}'-\mathbf{e}|^2\right) \ \text{ при } r\to\infty \end{gathered} \tag{3.2}$$

Два последних условия системы (3.2) вполне естественны. Конкретный вид f_0 можно задать, исходя из тех или иных физических соображений.

Предположим, что наличие в потоке поверхности раздела Г оказывает минимально возможное влияние на движение аэрозольных частиц, а именно: условия движения везде, за исключением Г, одинаковы; f непрерывна на Г по отношению ко всем своим переменным и только при $v_\xi' = 0$ терпит разрыв, становясь для $v_\xi' > 0$ равной нулю. Здесь v_ξ' — компонента вектора $\mathbf{v}'$, нормальная к Г ($v_\xi' > 0$, когда частицы движутся во внешнюю область от Г). Таким образом

$$f_0 = f\theta(-v_\xi')$$

Здесь $\theta(x)$ — функция единичного скачка, равная нулю при $x < 0$ и 1 при $x > 0$. Условие (3.3) означает, что поверхность Г не пропускает во внешнюю область течения частицы, движущиеся во внутренней области к ней, при этом никак не влияя на частицы, движущиеся иным образом. При исследовании диффузионного осаждения аэрозольных частиц на тела такое условие, по-видимому, достаточно близко соответствует реальному положению вещей. Взаимодействие аэрозольных частиц с телом входит явным образом в уравнение (1.1).

Нетрудно видеть, что

$$f(v_\xi', \ldots) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} F_*(s_\xi, \ldots) \exp[-i(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v}')]\, d\mathbf{s}$$

$$\langle f\theta(-v_\xi') \exp[i(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v}')]\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_*(s', \ldots)}{s_\xi - s'}\, ds' + \frac{1}{2} F_*(s_\xi, \ldots)$$

При получении второго соотношения использовано известное равенство

$$\int_0^{\infty} \exp(isx)\, dx = \frac{i}{s} + \pi\delta(s)$$

Таким образом, при (3.3) условие для F_* на Г запишется в виде

$$F_* = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_*(s', \ldots)}{s_\xi - s'}\, ds' \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.2) и (3.4) вытекает, что

$$n \to 1, \quad \mathbf{v} \to \mathbf{e}, \quad \sigma \to \frac{1}{k\lambda}\mathbf{E}, \quad \mathbf{a}^{(m)}|_{m\geqslant 3} \longrightarrow 0 \quad \text{при } r \to \infty, \; n = 0 \text{ на Г} \tag{3.5}$$

Остальные условия на Г, необходимые для того, чтобы решение уравнений (1.5) и (1.7) было единственно, являются просто условиями неразрывности. Так, например, для единственности решения уравнений (1.10) необходимо потребовать дополнительно к (3.5) непрерывность тангенциальных компонент вектора $\mathbf{v}$ на Г.

Нетрудно установить, что решения (1.9) автоматически удовлетворяют приведенным условиям на Г и при $r \to \infty$.

4. Выпишем решения уравнений (1.10) при полученных граничных условиях. Записать замкнутые аналитические решения удается, однако, для более узкого класса задач, чем рассмотренный в п. 3. Сужение производится за счет дополнительных условий, налагаемых на форму поверхности Г и асимптотическое поведение $\mathbf{u} + \mathbf{F}$ в окрестности Г.

Предположим, что поверхность Г односвязная, на Г существует только одна передняя критическая точка течения N и можно построить криволинейную ортогональную систему координат $O\xi\eta\eta^{(1)}$ с началом в точке N, которая в достаточной толщины внешнем слое, примыкающем к Г, будет невырождена. Систему $O\xi\eta\eta^{(1)}$ выбираем таким образом, чтобы координата ξ представляла собой расстояние переменной точки внешней области от поверхности Г, а η — расстояние на Г от точки N. Потребуем следующего асимптотического поведения коэффициентов Ламе и вектора $\mathbf{u}+\mathbf{F}$ при $\xi\to 0$:

$$\mathbf{u}+\mathbf{F}=\mathbf{u}_\perp+\mathbf{u}_\eta$$
$$\mathbf{u}_\perp=u_1\xi^2\mathbf{e}_\xi[1+O(\xi)],\qquad \mathbf{u}_\eta=u_2\xi\mathbf{e}_\eta[1+O(\xi)] \tag{4.1}$$
$$L_j=L_j^{(0)}+O(\xi)$$

Здесь $\mathbf{u}_\perp$ и $\mathbf{u}_\eta$ — соответственно нормальная к Г и тангенциальная составляющая вектора $\mathbf{u}+\mathbf{F}$, $\mathbf{e}_\xi$ и $\mathbf{e}_\eta$ — орты системы $O\xi\eta\eta^{(1)}$. Заметим, что последнее соотношение (4.1), не уменьшая общности, можно всегда представить в виде

$$L_\xi=1,\qquad L_\eta=1+O(\xi),\qquad L_{\eta^{(1)}}=L+O(\xi)$$
$$\left(L=\exp\left[\int_0^\eta \operatorname{div}\mathbf{e}_\eta d_\eta\right]\right)$$

В соответствии с (1.8) будем рассматривать уравнения (1.10) при больших λ. Остановимся только на стационарном случае, используя при решении этих уравнений метод внутренних и внешних разложений [4].

Главный член внешнего решения удовлетворяет уравнениям, в которые превращаются уравнения (1.10), если полностью пренебречь броуновским движением

$$\operatorname{div} n\mathbf{v}=0,\qquad k(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{F} \tag{4.2}$$
$$n\to 1,\quad \mathbf{v}\to\mathbf{e}\quad \text{при } r\to\infty$$

Чтобы определить главный член внутреннего решения, необходимо установить асимптотическое поведение решений (4.2) при $\xi\to 0$. Пусть R — радиус кривизны Г в направлении $\mathbf{e}_\eta$, n_N — значение n в точке N, k^* — критическое число Стокса, ξ_0 — расстояние от Г, на котором приближенные формулы (4.1) для $\mathbf{u}_\perp$, $\mathbf{u}_\eta$ и L еще остаются эффективными. Тогда после несложных преобразований из (4.2) находим

$$\mathbf{v}=\{(u_1+ku_2^2/R)\xi^2\mathbf{e}_\xi+u_2\xi\mathbf{e}_\eta\}[1+O(\xi)] \tag{4.3}$$
$$n=n_N\exp\left(-2k\int_0^\eta u_2\frac{d\eta}{R}\right)[1+O(\xi)]\qquad (\xi\to 0)$$
$$(k\leqslant(1-\xi/\xi_0)k^*)$$

Граничные условия на Г, полученные в п. 3, предполагают для построения внутреннего решения проведение такого же преобразования, как и в [4]

$$\xi\to\zeta=\lambda^{1/3}\xi \tag{4.4}$$

Из (4.3) вытекает, что при этом в переходной зоне будут иметь место оценки

$$\mathbf{v}=O(\lambda^{-2/3})\mathbf{e}_\xi+O(\lambda^{-1/3})\mathbf{e}_\eta,\qquad n=O(1),\qquad \zeta\to\infty \tag{4.5}$$

Соотношения (4.4), (4.5) позволяют существенно упростить уравнения (1.10) для переходной зоны. Рассмотрим сначала выражение

$$Z = \mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}\cdot\nabla)\mathbf{v} = s_m s_j D_{mj}$$

После несложных вычислений находим, что

$$Z = s_\xi^2 \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + s_\xi s_\eta \left(\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \frac{R^*}{R^*+\xi}\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta^*} - \frac{v_\eta}{R^*+\xi}\right) +$$
$$+ s_\eta^2 \frac{R^*}{R^*+\xi}\left(\frac{v_\xi}{R^*} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}\right) \tag{4.6}$$
$$(\mathbf{v} = v_\xi \mathbf{e}_\xi + \mathbf{v}_\tau, \quad \mathbf{v}_\tau = v_\eta \mathbf{e}_\tau, \quad (\mathbf{s}\cdot\mathbf{e}_\tau) = s_\eta)$$

Здесь $\mathbf{v}_\tau$ — тангенциальная составляющая вектора $\mathbf{v}$, η^* — длина дуги на Г отсчитываемая от точки N в направлении вектора $\mathbf{e}_\tau$, R^* — радиус кривизны этой дуги, $\mathbf{e}_\tau$ — единичный вектор.

Используя (4.4) и (4.5), находим из (4.6) для компонент тензора D

$$D_{\xi\xi} = O(\lambda^{-1/3}), \quad D_{\xi\eta} - \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} = O(\lambda^{-1/3}), \quad D_{\eta\eta} = O(\lambda^{-1/3}) \tag{4.7}$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\operatorname{div} n\mathbf{D} = O(1)\mathbf{e}_\xi + O(\lambda^{1/3})\mathbf{e}_\tau \tag{4.8}$$

Подставляя (4.4), (4.5) и (4.8) в уравнения (1.10), получаем в стационарном случае для главных членов решения в переходной зоне следующие уравнения:

$$v_\xi \frac{\partial n}{\partial \zeta}\lambda^{1/3} + v_\eta \frac{\partial n}{\partial \eta^*} + n \operatorname{div}\mathbf{v} = O(\lambda^{-2/3})$$
$$\mathbf{v} - \frac{k}{R^*}\zeta^2 v_\eta^2 \mathbf{e}_\xi \lambda^{-2/3} - \left(u_1\zeta^2 - \frac{\partial \ln n}{\partial \zeta}\right)\lambda^{-2/3}\mathbf{e}_\xi - \tag{4.9}$$
$$- u_2\zeta\lambda^{-1/3}\mathbf{e}_\eta = O(\lambda^{-1})\mathbf{e}_\xi + O(\lambda^{-2/3})\mathbf{e}_\tau + O(\lambda^{-2/3})\mathbf{e}_\eta$$

Со второго уравнения системы (4.9) имеем для компонент средней скорости

$$v_\xi = \left[\left(u_1 + \frac{k}{R}u_2^2\right)\zeta^2 - \frac{\partial \ln n}{\partial \zeta}\right]\lambda^{-2/3} + O(\lambda^{-1})$$
$$v_\eta = u_2\zeta\lambda^{-1/3} + O(\lambda^{-2/3}) \tag{4.10}$$

Поэтому уравнение для концентрации принимает вид

$$\left(u_1 + \frac{k}{R}u_2^2\right)\zeta^2 \frac{\partial n}{\partial \zeta} + u_2\zeta\frac{\partial n}{\partial \eta} + 2k\frac{u_2^2}{R}n = \frac{\partial^2 n}{\partial \zeta^2} + O(\lambda^{-1/3}) \tag{4.11}$$

Из условий асимптотического сращивания с внешним решением вытекает, что решения уравнений (4.10) и (4.11) должны удовлетворять граничным условиям

$$\mathbf{v} \to \left(u_1 + \frac{k}{R}u_2^2\right)\zeta^2\lambda^{-2/3}\mathbf{e}_\xi + u_2\zeta\lambda^{-1/3}\mathbf{e}_\eta \tag{4.12}$$
$$n \to n_N\left(\exp\left[-2k\int_0^\eta u_2\frac{d_\eta}{R}\right]\right) \qquad (\zeta \to \infty)$$

Условие соленоидальности вектора $\mathbf{u}+\mathbf{F}$ приводит к следующей связи между функциями u_1 и u_2:

$$\frac{du_2}{d\eta}+u_2 \operatorname{div} \mathbf{e}_\eta+2u_1=0 \tag{4.13}$$

Следовательно, вместо двух функций можно ввести в рассмотрение одну, связанную с u_1 и u_2, например, соотношениями

$$u_1=-\frac{1}{L}\frac{d\Phi}{d\eta}, \qquad u_2=\frac{2}{L}\Phi \tag{4.14}$$

Решение (4.11) при граничных условиях (4.12) записывается в виде некоторого функционала от u_1 и u_2 [3]. При введении функции Φ этот функционал упрощается к виду

$$n=\frac{n_N}{\Gamma(^1/_3)}\exp\left(-4k\int\limits_0 \Phi\frac{d\eta}{LR}\right)\gamma(^1/_3, \zeta^3/\mu)+O(\lambda^{-1/3}) \tag{4.15}$$

$$\left(\mu=\frac{9}{2}\Phi^{-3/2}\int\limits_0^\eta L\Phi^{1/2}\exp\left[6k\int\limits_{\eta'}^{\eta}\Phi\frac{d\eta}{LR}\right]d\eta'\right)$$

Для плоской и осесимметричной задач соответственно

$$\operatorname{div}\mathbf{e}_\eta=0, \qquad L=1$$

$$\operatorname{div}\mathbf{e}_\eta=\frac{1}{RR_1}\sqrt{R^2-R_1^2}, \qquad L=R_1/R \tag{4.16}$$

Здесь R_1 — расстояние от оси симметрии точки на Г, которая является проекций на Г переменной точки области течения с координатами $\{\xi, \eta^\cdot\}$. Подставляя (4.16) в формулу (4.15), приходим к формулам, полученным в [4]. Соотношение (4.15) удовлетворяет также условию на Г для концентрации, поэтому (4.10) и (4.15) будут искомыми главными членами внутреннего решения уравнений (1.10). Введение в эти уравнения по сравнению с уравнениями, рассмотренными в [4], дополнительного члена

$$\frac{k}{n\lambda}\operatorname{div} n\mathbf{D}$$

не влияет на значение главных членов внутреннего решения; влияние этого члена сказывается на значении следующих членов ряда по степеням $\lambda^{-1/3}$ (например, для n — на значении члена порядка $\lambda^{-1/3}$).

Таким образом, главные члены внешнего и внутреннего решений уравнения (1.1) будут иметь вид

$$F_* = n\exp\left[i(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})\right]+O(\lambda^{-1}) \tag{4.17}$$

$$F_* \approx \frac{n_N}{\Gamma(^1/_3)}\exp\left(-4k\int\limits_0 \Phi\frac{d\eta}{LR}\right)\gamma(^1/_3, \zeta^3/\mu)\times$$

$$\times\exp\left\{is_\xi\left(u_1+\frac{k}{R}u_2^2\right)\zeta^2\lambda^{-2/3}+\right.$$

$$\left.+is_\eta u_2\zeta\lambda^{-1/3}-\frac{1}{2k\lambda}s^2+\frac{1}{2\lambda}u_1 s_\xi s_\eta\right\}+O(\lambda^{-1/3})$$

Поток аэрозольных частиц на поверхность Г равен

$$I = \frac{n_N}{\Gamma(1 + {}^1/_3)} \lambda^{-{}^2/_3} \int \exp\left[-4k \int_0^\eta \Phi \frac{d\eta}{LR} \right] \frac{d\Gamma}{\mu^{{}^1/_3}} + O(\lambda^{-1}) \tag{4.18}$$

Выражение (4.18) легко преобразуется к виду

$$I = \frac{3^{{}^1/_3}}{2^{{}^2/_3}\Gamma(1 + {}^1/_3)} \lambda^{-{}^2/_3} n_N \int \left[\int L\Phi^{{}^1/_2} \exp\left(-6k \int_0^\eta \Phi \frac{d\eta}{RL} \right) d\eta \right]^{{}^2/_3} d\eta^{(1)} + O(\lambda^{-1}) \tag{4.19}$$

Здесь интегрирование проводится по всему интервалу значений, принимаемых переменными η и $\eta^{(1)}$.

Поступило 24 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., Изд-во иностр., лит., 1947.
2. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Уравнения броуновского движения аэрозольных частиц. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 4.
3. Волощук В. М. Об асимптотическом способе решения уравнений броуновского движения аэрозольных частиц. Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 3.
4. Волощук В. М. Метод внешних и внутренних асимптотических разложений в теории броуновского движения аэрозольных частиц. ПМТФ, 1969, № 4.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.