ИОНИЗАЦИЯ ГАЗА МГНОВЕННО ВСПЫХИВАЮЩИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

К. В. КРАСНОБАЕВ

(*Москва*)

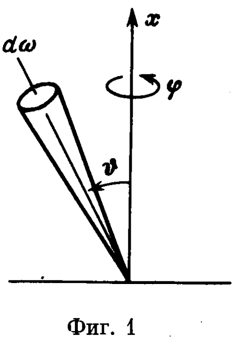
Рассматривается нестационарная задача об ионизации газа, занимающего верхнее полупространство и находящегося в гравитационном равновесии при постоянной температуре T_0, излучением, вспыхивающим в некоторый начальный момент времени в нижнем полупространстве. Считается, что спектр излучения, выходящего из нижнего полупространства, планковский при температуре T_+. Использовалась модель излучения, предложенная в работе [1]. В этой работе авторы показали, что если процесс ионизации происходит в области с характерным размером порядка длины пробега квантов, ионизующих атомы из основного состояния, а температуры газа T и излучения T_+ не превышают одной десятой температуры ионизации (для большинства газов температура ионизации $\sim 1.5 \cdot 10^5$ °K), то реальный атом может быть заменен двухуровневой системой, а скорости ионизации, коэффициенты излучения и поглощения рассчитываются в явном виде.

Ниже рассматривается газ, состоящий из атомов водорода. Пренебрегается гидродинамическим движением, которое может возникнуть вследствие теплового расширения, анализ этого предположения приведен в приложении.

Задача решалась на ЭЦВМ. Получены изменения степени ионизации и температуры газа, а также спектральный состав и угловое распределение излучения. Приводимые графики показывают, что процесс ионизации существенно неравновесный, а время, за которое устанавливается баланс между ионизациями и рекомбинациями, зависит от плотности газа, и меньше для слоев с большей плотностью. При $T_0 < T_+$ интенсивность излучения на частотах, близких к частоте ионизации, может в несколько раз превышать планковскую, соответствующую температуре T_+. Эти результаты могут представить интерес в астрофизике при анализе нестационарных процессов ионизации во внешних оболочках звезд и планет.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Пусть газ, располагающийся выше плоскости $x = 0$, находится в равновесии при температуре T_0 в поле тяжести, характеризующемся ускорением g, которое направлено в отрицательную сторону оси x.

Считаем, что плотность и давление в начальный момент зависят только от координаты x, а T_0 и g от x не зависят. В момент $t = 0$ в плоскости $x = 0$ вспыхивает излучение планковской интенсивности $B(\nu, T_+)$ для всех $0 \leqslant \vartheta \leqslant {}^1/_2\pi$ и всех $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, где полярный угол $\vartheta (0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$ и меридиональный угол $\varphi (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ определяют ориентацию каждого луча относительно нормали к плоскости $x = 0$ (фиг. 1). Искомыми функциями будут: $s(t, x)$ — степень ионизации газа, $T(t, x)$ — температура газа, $I(\nu, \vartheta, t, x)$ — интенсивность излучения частоты ν и направления ϑ.



Фиг. 1

Перечислим основные допущения, принятые авторами модели [1], которая используется в дальнейшем: из всей совокупности радиационных процессов учтен лишь континуум, соответствующий ионизации с основного уровня; реальный атом заменен двухуровневой системой; влияние индуцированного излучения мало; коэффициент поглощения газа обратно пропорционален квадрату частоты. Модель справедлива, если:

а) kT и kT_+ не превышают 0.1 $h\nu_0$ (k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка, ν_0 — частота ионизации газа);

б) процессы ионизации происходят в области, характерный размер которой порядка длины пробега квантов частоты ν_0;

в) температуры тяжелой и легкой компонент равны.

Ниже рассмотрены случаи, когда T и T_+ меньше или порядка $10^4\,°$K, а выполнение условий б) и в) контролировалось расчетами.

Ограничимся случаем газа достаточно малой плотности, когда основную роль играют фотопроцессы. Учитывая также малость электронной энергии в рассматриваемом диапазоне температур и пренебрегая гидродинамическим движением газа (условия, при которых это возможно, выяснены в приложении), приходим к следующей системе уравнений, описывающей процесс

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\nu_0}^{\infty}\int\limits_{4\pi} I\cos\vartheta\, d\omega\, d\nu$$

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t} = -m_a\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\nu_0}^{\infty}\int\limits_{4\pi}\frac{I}{h\nu}\cos\vartheta\, d\omega\, d\nu \tag{1.2}$$

$$\cos\vartheta\frac{\partial I}{\partial x} = \rho(1-s)\varkappa(\nu)\left[\frac{s^2}{1-s}\frac{1-s_0}{s_0{}^2}B(\nu,T) - I\right]$$

$$p = \rho kT\left(\frac{1+s}{m_a}\right) \qquad E = \frac{3}{2}\rho kT\left(\frac{1+s}{m_a}\right) + s\frac{\rho h\nu_0}{m_a} \tag{1.3}$$

Начальные условия

$$s(0,\ x) = 0, \qquad T(0,\ x) = T_0$$

Граничные условия

$$I(\nu,\ \vartheta,\ t,\ 0) = B(\nu,\ T_+), \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant {}^1/_2\pi,$$
$$I(\nu,\ \vartheta,\ t,\ \infty) = 0, \quad {}^1/_2\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$$

Здесь s_0 — равновесная степень ионизации, p — давление, ρ — плотность, E — энергия единицы объема, ω — телесный угол, m_a — масса атома газа, $\varkappa(\nu)$ — коэффициент поглощения, рассчитанный на единицу массы атомов.

Используя уравнения (1.1), а также выражения (1.3) для давления и энергии единицы объема, получаем

$$\frac{3}{2}k\frac{1+s}{m_a}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{h\nu_0}{m_a}\frac{\partial s}{\partial t} = -(1-s)\left[\frac{s^2}{1-s}\frac{1-s_0}{s_0{}^2}\times\right. \tag{1.4}$$
$$\left.\times 4\pi\int\limits_{\nu_0}^{\infty}\varkappa(\nu)B(\nu,T)\,d\nu - 2\pi\int\limits_{\nu_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\varkappa(\nu)I\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\nu\right]$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -(1-s)m_a\left[\frac{s^2}{1-s}\frac{1-s_0}{s_0{}^2}4\pi\int\limits_{\nu_0}^{\infty}\frac{\varkappa(\nu)B(\nu,T)}{h\nu}d\nu - \right. \tag{1.5}$$
$$\left. - 2\pi\int\limits_{\nu_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\varkappa(\nu)I}{h\nu}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\nu\right]$$

$$\cos\vartheta\frac{\partial I}{\partial x}=\rho_0\exp\frac{-m_a gx}{kT_0}(1-s)\varkappa(\nu)\left[\frac{s^2}{1-s}\frac{1-s_0}{s_0^2}B(\nu,T)-I\right] \tag{1.6}$$

В (1.4) опущен член

$$\frac{3}{2}\frac{kT}{m_a}\frac{\partial s}{\partial t} \tag{1.7}$$

так как из (1.2) легко получить

$$\frac{T}{1+s}\frac{\partial s/\partial t}{\partial T/\partial t}<\frac{2}{3}\frac{T}{T_+}$$

В расчетах отношение T/T_+ обычно невелико; вычисления, проведенные в ряде случаев с учетом (1.7), также показали его малость по сравнению с

$$\frac{3}{2}k\frac{1+s}{m_a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Здесь ρ_0 — плотность газа при $x=0$.

2. Приведение уравнений к безразмерному виду. Введем безразмерные величины ξ, η, τ, ψ, μ по формулам

$$\xi=\frac{m_a g}{kT_0}x=\frac{x}{H},\qquad \eta=\frac{T}{T_+}$$

$$\tau=\frac{2m_a\varkappa(\nu_0)\nu_0^2\rho_0^{2/3}h\exp-h\nu_0/3kT_+}{c^2m_e m_a^{2/3}}t$$

$$\psi=\frac{I(\nu,\vartheta,t,x)}{B(\nu_0,T_+)},\qquad \mu=\frac{\nu}{\nu_0}$$

Здесь m_e — масса электрона, c — скорость света. Тогда из (1.4) — (1.6) имеем

$$\frac{3}{2}(1+s)\frac{\partial\eta}{\partial\tau}+C\frac{\partial s}{\partial\tau}=-2s^2CA^{1/2}e^{-\xi}\eta^{-1/2}\left(1+\frac{\eta}{C}\right)+ \tag{2.1}$$

$$+\frac{1-s}{A}C^2\int\limits_1^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\psi}{\mu^2}\sin\vartheta d\vartheta\,d\mu$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=-2s^2\eta^{-1/2}A^{1/2}e^{-\xi}+\frac{1-s}{A}C\int\limits_1^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\psi}{\mu^3}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\mu \tag{2.2}$$

$$\cos\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=De^{-\xi}\left[s^2\mu\eta^{-3/2}\exp\frac{-C(\mu-1)}{\eta}A^{3/2}e^{-\xi}-(1-s)\frac{\psi}{\mu^2}\right] \tag{2.3}$$

Начальные условия

$$s(0,\xi)=0,\qquad \eta(0,\xi)=T_0/T_+=\eta_0$$

Граничные условия

$$\psi(\mu,\vartheta,\tau,0)=\frac{B(\nu,T_+)}{B(\nu_0,T_+)};\qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant{}^1/_2\pi$$

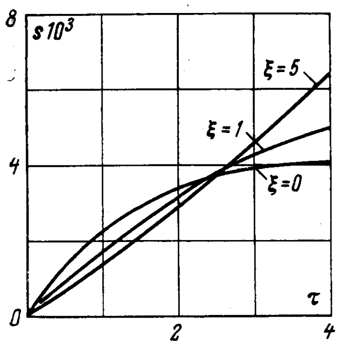
$$\psi(\mu,\vartheta,\tau,\infty)=0,\qquad {}^1/_2\pi\leqslant\vartheta\leqslant\pi$$

Выражения для безразмерых параметров A, C, D имеют вид

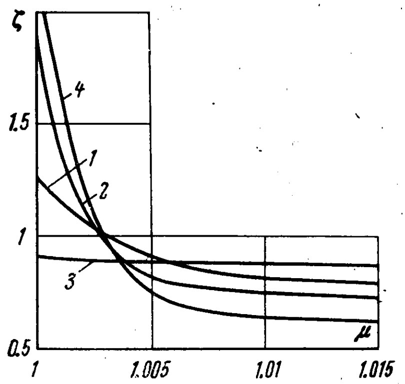
$$A=\left(\frac{\rho_0}{m_a}\right)^{2/3}\left(\frac{h^2}{2\pi m_e k T_+}\right)\exp\frac{2}{3}\frac{h\nu_0}{kT_+}$$

$$C=\frac{h\nu_0}{kT_+},\qquad D=\varkappa(\nu_0)\rho_0 H$$

Система (2.1) — (2.3) решалась на ЭЦВМ разностным методом, интегрирование по частотам в (2.1) и (2.2) велось по формуле Симпсона, по



Фиг. 2



Фиг. 3

углам — по формуле прямоугольников. Заметим, что при $\tau=0$ уравнение (2.3) имеет решение

$$\psi(\mu,\vartheta,0,\xi)=\psi(\mu,\vartheta,0,0)\exp\frac{-D(1-e^{-\xi})}{\mu^2\cos\vartheta}$$

т. е. оптическая толщина газа для квантов данной частоты и направления определяется параметром D (в расчетах $D\lessapprox 1$). Тогда при больших ξ газ не оказывает влияния на распространение излучения, так что граничное условие на бесконечности можно перенести в некоторую точку ξ_0 (в расчетах $\xi_0=8$, увеличение его мало меняло значение функций на рассматриваемом отрезке времени), при этом $\psi(\mu,\vartheta,\tau,8)$ для $0\leqslant\vartheta\leqslant{}^1/_2\pi$ будем называть выходящим излучением, так как его интенсивность почти не меняется при $\xi>8$.

Вычисления проведены для водорода.

3. **Анализ полученных результатов.** Рассмотрим особенности поведения степени ионизации и интенсивности излучения.

Решение системы (2.1) — (2.3) показало зависимость времени приближения к стационарному состоянию для степени ионизации от плотности газа. Для слоев с более высокой плотностью баланс между ионизациями и рекомбинациями устанавливается быстрее, соответствующие значения s для $A=400$, $C=31.56$, $D=0.229$ и $\eta_0=0.05$ даны на фиг. 2.

В процессе ионизации уменьшается поглощаемая в слое $0\leqslant\xi\leqslant 8$ энергия, пропорциональная разности (3.)

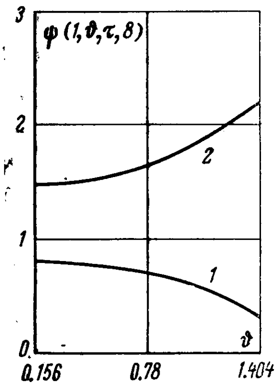
$$\Delta=\int\limits_1^\infty\int\limits_0^\pi\psi(\mu,\vartheta,\tau,0)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\mu-\int\limits_1^\infty\int\limits_0^\pi\psi(\mu,\vartheta,\tau,8)\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\mu$$

Эта разность вычислялась. Влияние излучения газа и уменьшения его оптической толщины на спектр и угловое распределение интенсивности выходящего излучения $\psi(\mu,\vartheta,\tau,8)$ будет существенно в те моменты времени, когда существенны изменения величины (3.1).

Поэтому на фиг. 3 отношение

$$\zeta = \frac{\psi(\mu, 0.156, \tau, 8)}{\psi(\mu, 0.156, 0, 0)}$$

указывающее на отличие интенсивности выходящего излучения от планковского с температурой T_+, представлено в момент, когда поглощаемая газом энергия уменьшается вдвое; при этом для кривых *1*, *2* $A = 400$, $C = 31{,}56$, $D = 0{,}229$, для кривой *3* $A = 0.042$, $C = 31.56$, $D = 0.229$, для кривой *4* $A - 400$, $C = 31.56$, $D = 0.4$. Начальные значения $\eta_0 = 0.05$ для кривых *2—4* и $\eta_0 = 0.1$ для кривой *1*. При больших A ионизации в единице объема уравновешиваются рекомбинациями в условиях, когда $\eta \sim 0.1$, при степенях ионизации, значительно превышающих равновесную, которая соответствует этой температуре. Интенсивность выходящего излучения при этом увеличивается в несколько раз для частот, близких к единице, и почти не меняется для остальных.



Фиг. 4

При увеличении температуры интервал частот, в котором существенно излучение газа, увеличивается, а значение интенсивности излучения частот, близких к единице, уменьшается по сравнению с ее значением, соответствующим более низкой температуре.

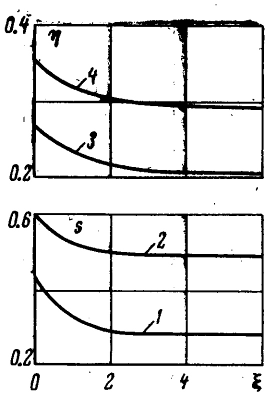
При малых значениях параметра A число ионизаций превышает число рекомбинаций вплоть до значений s, близких к еднице. В этом случае оптическая толща газа резко уменьшается, его излучение мало влияет на спектр выходящего излучения, близкий к спектру вспыхивающего излучения.

При увеличении параметра D, характеризующего оптическую толщину газа при $\tau = 0$, влияние излучения газа на значение $\psi(\mu, \vartheta, \tau, 8)$ возрастает.

Распределение $\psi(1, \vartheta, \tau, 8)$ представлено на фиг. 4 в моменты времени $\tau = 0$ (кривая *1*) и $\tau = 2$ (кривая *2*). Здесь $A = 400$, $C = 3.56$, $D = 0.229$, $\eta_0 = 0.05$. Видно, что излучение газа сильнее сказывается на интенсивности лучей с большими ϑ.

Вариация только параметра C не приводила к качественным изменениям в поведении искомых функций.

Автор признателен В. Б. Баранову за постоянное внимание к работе.



Фиг. 5

4. Приложение. Проведенные расчеты позволили определить те значения параметров, входящих в систему (2.1) — (2.3), при которых гидродинамическое движение мало влияет на процесс ионизации газа. В результате изменения температуры и степени ионизации происходит отклонение давления от значения

$$\frac{\rho_0 \exp(-x/H) kT_0}{m_a}$$

поэтому градиент давления не компенсирует силу тяжести. Величина A может служить оценкой отклонения

$$\frac{\rho_0 \exp(-x/H) kT(1+s)}{\rho_0 \exp(-x/H) kT_0}$$

от единицы. Приводим значения величины

$$\Lambda = \lg [T(1+s) / T_0 - 1]$$

для различных значений A в момент $\tau = 1$ для $\xi = 0$ и $C = 31.56$, $D = 0.229$, $\eta_0 = 0.05$.

$\lg A$	2.60	2.30	1.85	1.30	1.00	0.52
$\lg[T(1+s)/T_0 - 1]$	−1.48	−1.18	−0.73	−0.18	0.12	0.63

Видно, что при больших A это отклонение мало и система (1.1) — (1.3) достаточно хорошо описывает процесс ионизации газа.

На фиг. 5 при $A = 0.042$, $C = 31.56$, $D = 0.229$, $\eta_0 = 0.05$ показано изменение степени ионизации и температуры; $\tau = 0.024$ для кривых *1*, *3* и $\tau = 0.04$ для кривых *2*, *4*. Интересно, что, несмотря на значительные отклонения $T(1+s) / T_0$ от единицы, в случае малых A также можно пренебречь гидродинамическим движением. Пусть t_0 есть время, на котором рассматривается процесс ионизации. Покажем, что в случае малых A даже максимальное значение силы

$$-\partial p / \partial x - \rho g$$

даваемое решением системы (2.1) — (2.3) не сможет сообщить за время t_0 газу скоростей, приводящих к существенному изменению плотности. Используя η и s, приведенные на фиг. 5, оценим скорость V и плотность ρ из уравнений

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0 \tag{4.1}$$

Из первого уравнения имеем

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - g = \frac{1}{\rho}\left[-\frac{\rho}{m_a}\frac{\partial}{\partial x} kT(1+s) + \right.$$

$$\left. + (1+s)\frac{kT}{m_a}\frac{m_a g}{kT_0}\rho\right] - g = \left[-\frac{1}{\eta_0}\frac{\partial}{\partial \xi}\eta(1+s) + \frac{\eta}{\eta_0}(1+s) - 1\right] g$$

Отсюда, учитывая результаты счета

$$V < \eta g t_0 / \eta_0$$

Из второго уравнения (4.1)

$$\left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| < \frac{m_a}{kT_0} g \frac{T}{T_0} g t_0^2$$

Так как величина

$$D = \frac{kT_0 \varkappa(\nu_0) \rho_0}{m_a g}$$

порядка единицы, то

$$g \approx \frac{\varkappa(\nu_0) \rho_0 k T_0}{m_a}$$

В рассматриваемом случае

$$t_0 = 0.04 \frac{c^2 m_e m_a^{2/3} \exp h\nu_0 / 3kT_+}{2 m_a \varkappa(\nu_0) \nu_0^2 \rho_0^{2/3} h}$$

Тогда

$$\left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| < \frac{m_a}{kT_0}\frac{T}{T_0}\left(\frac{kT_0 \varkappa(\nu_0)\rho_0}{m_a}\right)^2 1.6 \cdot 10^{-3}\left(\frac{c^2 m_e m_a^{2/3} \exp h\nu_0/3kT_+}{2 m_a \varkappa(\nu_0) \nu_0^2 \rho_0^{2/3} h}\right)^2 =$$

$$= 1.6 \cdot 10^{-3} \frac{kT}{m_a} \frac{\pi m_e^3 c^4 k T_+}{2 (h\nu_0)^4} A \approx 3 \cdot 10^{-2}$$

Таким образом, величина этого отклонения мала. Скорости ионизации, коэффициенты излучения и поглощения при этом изменятся слабо, и влияние этого изменения на решение будет незначительным.

Поступило 11 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Clarke J. H., Ferrari C. Gas dynamics with nonequilibrium radiative and collisional ionization. Phys. Fluids., 1965, vol. 8, No. 12 (Рус. перев.: «Механика». Период. сб. перев. иностр. ст., 1967, № 1.)