

EINE NEUE KONZEPTION FÜR DIE BERECHNUNG INKOMPRESSIBLER TURBULENTER GRENZSCHICHTEN

W. SZABLEWSKI

(Berlin)

Die derzeit zur Anwendung kommenden Berechnungsverfahren für turbulente Grenzschichten bedienen sich — infolge des Fehlens einer mathematischen Formulierung für die turbulente Schubspannung — der Integralsätze des Impulses und der Energie, wobei in diese eine Reihe empirischer Funktionen eingeht, die naturgemäss mit manchen Unsicherheiten behaftet sind.

Im folgenden soll über eine neue Konzeption berichtet werden, die auf einer formal einfachen Hypothese über die turbulente Schubspannung und auf der Anwendung eines neuartigen Berechnungsverfahrens beruht.

Die Hypothese über die turbulente Schubspannung wird im Rahmen einer dimensionsanalytischen Betrachtung auf phänomenologischer Basis unter Berücksichtigung der Intermittenz formuliert. Unter Einteilung der Grenzschicht in eine «innere», dem Einfluss der Wand unterliegende, Schicht und eine «äussere» Schicht von Charakter freier Turbulenz tritt dabei als empirischer Koeffizient die relative Breite der inneren Schicht auf. Für die turbulente Grenzschicht an der ebenen Platte steht der sich theoretisch ergebende turbulente Austausch in guter Übereinstimmung mit dem aus Messungen ermittelten.

Das dann zur Anwendung kommende Berechnungsverfahren macht entscheidenden Gebrauch von der phänomenologischen Feststellung, dass bereits die Wandgesetze — logarithmisches Gesetz bzw. das Wandgesetz bei Druckanstieg — eine Approximation der Geschwindigkeitsprofile liefern, so dass die Aufgabe sich darauf reduzieren lässt, eine Korrektur zu diesen Wandgesetzen zu berechnen. In mathematischer Hinsicht lässt sich dergestalt das Problem auf die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen reduzieren.

In Anwendung des Verfahrens auf sog. Äquilibrium-Grenzschichten erhält man — soweit bisher Ergebnisse vorliegen — einfache explizite Formeln, die mit Messergebnissen in guter Übereinstimmung stehen.

§ 1. Hypothese über die turbulente Schubspannung. 1°. Verallgemeinerung einer Betrachtung von L. D. Landau.

L. D. Landau [1] betrachtet die vollturbulente Strömung längs einer Wand vom Prototyp

$$u = u(y), \quad v = 0$$

einer turbulenten Grenzschicht (x, y Koordinaten längs und senkrecht zur Wand; u, v die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten). Die vollturbulente Strömung, die nach oben hin unbergrenzt angenommen wird, soll bis zur Wand reichen, und es soll in ihr kein Druckgradient dp/dx (p statischer Druck) wirksam sein. Dieses Landausche Modell stellt das Abbild einer turbulenten Grenzschicht in Wandnähe bei so grosser Reynoldsscher Kennzahl dar, dass die der Wand unmittelbar anliegende Unterschicht von gleicher Grössenordnung der laminaren und turbulenten Reibung relativ dünn ist.

Die Bewegungsgleichung lautet hier

$$\tau = \tau_0 \tag{1.1}$$

(τ — Schubspannung, τ_0 — Wandschubspannung)

Dimensionsanalytisch erhält man eindeutig

$$\frac{du}{dy} \sim \frac{1}{y} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

(ρ — Dichte)

was bei Einführung der sog. Schubspannungsgeschwindigkeit

$$v_* = (\tau_0 / \rho)^{1/2}$$

auf das bekannte logarithmische Wandgesetz

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + C \quad (1.3)$$

das zum gesicherten Bestandteil der Theorie turbulenter Grenzschichten gehört, führt. κ und C stellen dabei dimensionslose Koeffizienten dar.

Es ist naheliegend, diese Landausche Betrachtung auf den Gesamtbereich einer turbulenten Grenzschicht auszudehnen. Als weitere physikalische Einflussgrößen kommen dann hinzu: der Druckgradient dp/dx und die Trägheitswirkungen; ferner ist mit der endlichen Dicke δ der Grenzschicht eine weitere Länge zu berücksichtigen. Der Einfluss des Druckgradienten und der Trägheitsglieder kommt darin zum Ausdruck, dass die Schubspannung τ nun nicht mehr als konstant gleich τ_0 angesehen werden kann, sondern einen Verlauf gemäss der Bewegungsgleichung in integrierter Form nimmt:

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y + \text{Trägheitsglieder}$$

Man erhält dann in verallgemeinerter dimensionsanalytischer Betrachtung die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\kappa y f(y/\delta)} \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

in der also nun τ statt τ_0 steht und in der eine bei der Dimensionsanalyse unbestimmt bleibende Funktion f der Dimensionslosen y/δ auftritt.

Aus (1.4) folgt für die turbulente Schubspannung

$$\frac{\tau}{\rho} = \kappa^2 y^2 f^2 \left(\frac{y}{\delta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (1.5)$$

also der Prandtl'sche Mischungswegansatz.

Führen wir gemäss der Definition

$$\frac{\tau}{\rho} = A \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.6)$$

den sog. turbulenten Austausch A ein, so haben wir für diesen

$$A = \kappa^2 y^2 f^2 \left(\frac{y}{\delta} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.7)$$

2°. Hypothese über die turbulente Schubspannung. Wir bemerken zunächst, dass — wie sich phänomenologisch ergeben hat — in der vollturbulenten Zone einer Grenzschichtströmung zwei Schichten zu unterscheiden sind: eine innere Schicht, die dem Einfluss der begrenzenden Wand unterliegt, und eine äussere Schicht vom Charakter freier Turbulenz.

Für die innere Schicht treffen wir die auf phänomenologischer Basis beruhende Hypothese, dass in $\eta = y/\delta$

$$f(\eta) = e^{-\eta/m}, \quad 0 \leq \eta \leq m < 1 \quad (1.8)$$

wo m die relative Breite der inneren Schicht misst. Die äussere Schicht ist als freie Turbulenz anzusehen. Freie Turbulenz ist charakterisiert durch konstanten Austausch A im Strömungsquerschnitt, der zum äusseren Rand hin jedoch

durch Intermittenz, die vom schwankenden Charakter der äusseren Grenze der turbulenten Strömung herrührt, auf Null abfällt. Phänomenologisch hat sich aus der von I. O. Hinze [3] vorgenommenen Analyse von Messungen der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte folgendes ergeben (Abb. 1): **Eliminiert man aus der experimentell gewonnenen Verteilung des Austauschs den Einfluss der Intermittenz, so zeigt sich, dass die innere Schicht etwa bis $\eta = 0.6$ reicht und wir anschliessend dann freie Turbulenz mit konstantem Austausch haben; demnach wäre also $m \approx 0.6$. Die reale Verteilung des Austauschs mit Einschluss der Intermittenz erhält man dann approximativ (siehe Abb. 1) durch Erweiterung des Geltungsbereiches des Ansatzes (1.8) auf die gesamte Grenzschicht, also:**

$$f(\eta) = e^{-\eta/m}, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (1.9)^1$$

Bei der Grenzschicht an der ebenen Platte ergibt das, wenn wir in (1.7) das sich mit dem Ansatz (1.9) ergebende $\partial u / \partial y$ einsetzen (§ 3), die Formel $A(v_*\delta)^{-1} = \kappa\eta(1-\eta)^{1/2}e^{-\eta/m}$ (1.10) die, wie aus Abb. 1 ersichtlich, den aus dem Experiment ermittelten Austausch gut wiedergibt.

§ 2. Wandgesetze. Bei der Berechnung der turbulenten Grenzschichten werden wir — wie eingangs bemerkt — entscheidenden Gebrauch von den Wandgesetzen machen.

1°. Logarithmisches Gesetz. Dieses lautet, vgl. (1.3)

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + C$$

Die dimensionslosen Konstanten κ, C werden hier — glatte Wand vorausgesetzt — unter Beschränkung auf grosse Reynoldssche Kennzahlen als universelle Konstanten angesehen: $\kappa = 0.41, C = 5.10$.

Ihre Festlegung erfolgte an Hand der von J. Nikuradse aus Messungen ermittelten Rohrwiderstandsformel; vgl. hierzu [2].

Es ist anzumerken, dass die Existenz des logarithmischen Wandgesetzes gebunden ist an die bereits oben genannte Bedingung grosser Reynoldsscher Kennzahl bzw. relativ dünner Unterschicht. Ist bei turbulenter Strömung diese Bedingung nicht erfüllt, so kann nicht mehr von einer Schicht konstanter Schubspannung $\tau \approx \tau_0$ gesprochen werden, noch kann dann die endliche Breite der Grenzschicht ausser acht bleiben. Experimentell hat H. Reichardt [4] am Modell der Couetteströmung nachgewiesen, dass bei relativ dicker Unterschicht ein logarithm. Wandgesetz nicht mehr existiert; vgl. hierzu Abb. 2, die [2] entnommen wurde.

Für Grenzschichten mit Druckabfall oder leichtem Druckanstieg sind bekanntlich — unter der oben genannten Voraussetzung — die Geschwindigkeitsprofile der Grenzschicht durch das logarithmische Gesetz approximierbar.

2°. Wandgesetz bei Druckanstieg. Bei stärkerem Druckanstieg kann die wandnahe vollturbulente Schicht — auch bei relativ dünner Unterschicht —

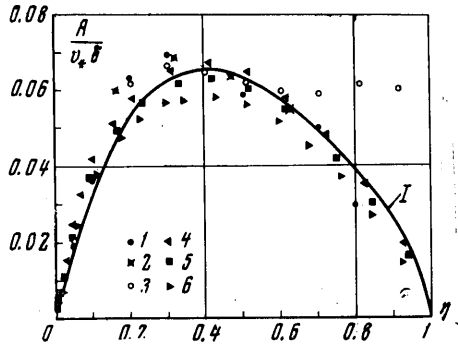


Abb. 1. Turbulenter Austausch in der Grenzschicht an der ebenen Platte (I — P. S. Klebanoff, 2 — A. A. Townsend, 4, 5, 6 — J. Nikuradse, 3 — Intermittenz eliminiert, I — Theorie)

¹ Eine Begründung des Ansatzes (1.9) von Standpunkt der Turbulenzstatistik hat vor kurzem Y. A. Buyevich [18] gegeben.

nicht mehr als Schicht konstanter Schubspannung angesprochen werden. Der Konstituierung eines Wandgesetzes ist hier die umfassendere Bewegungsgleichung

$$\tau \approx \tau_0 + \frac{dp}{dx} y \quad (2.1)$$

zugrunde zu legen, da bei wachsendem Druckanstieg und kleiner werdender Wandschubspannung τ_0 der Druckgradient immer weiter zur Wand hin bestimmend in das Kräftegleichgewicht der Kräfte eingreift.

Dimensionsanalytisch folgt dann (vgl. [5] und [6])

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2}, \quad \tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y$$

$$\frac{u}{v_*} = \frac{2}{\kappa} \left[\left(1 + F \frac{v_* y}{v} \right)^{1/2} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{4}{F} \frac{(1 + F v_* y v^{-1})^{1/2} - 1}{(1 + F v_* y v^{-1})^{1/2} + 1} \right] + C_*$$

mit $F = \frac{v}{v_*} \frac{1}{\rho v_*^2} \frac{dp}{dx}$ (2.2)

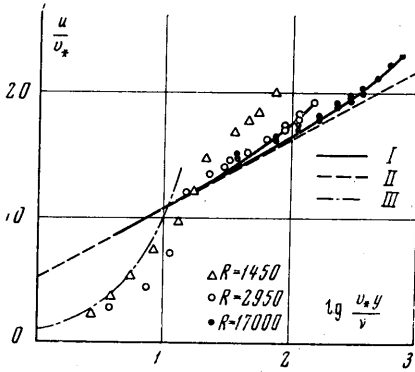


Abb. 2. Geschwindigkeitsverteilung bei der Couetteströmung (I — Theorie, II — log. Gesetz, III — laminar, Messung H. Reichardt für verschiedene Re)

Für kleine v_* empfiehlt es sich — vgl. G. L. Mellor [7] — die dimensionslosen

$$\eta_* = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} v \right)^{+1/3}, \quad \omega_* = u \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} v \right)^{-1/3}$$

einzuführen, in denen (2.2) die Gestalt annimmt

$$\omega_* = \frac{2}{\kappa} \left[(G + \eta_*)^{1/2} - G^{1/2} \right] + \frac{G^{1/2}}{\kappa} \ln \left[\frac{4G^{3/2} (G + \eta_*)^{1/2} - G^{1/2}}{(G + \eta_*)^{1/2} + G^{1/2}} \right] + D$$

$$G = \frac{1}{F^{2/3}} = v_*^2 \left(\frac{v}{\rho} \frac{dp}{dx} \right)^{-2/3} \quad (2.3)$$

Die Transformationsformeln lauten

$$\eta_* = \frac{v_* y}{v} F^{1/3}, \quad \omega_* = \frac{u}{v_*} \frac{1}{F^{1/3}}, \quad D_* = G^{1/3} C_* \quad (2.4)$$

Solange das logarithmische Wandgesetz zumindest noch rudimentär existiert, wird man die hier auftretenden empirischen Koeffizienten κ , C_* denen des logarithm. Wandgesetzes gleich setzen können. Beim Eingreifen des Druckgradienten in das Kräftegleichgewicht der Unterschicht ist jedoch eine Modifikation der Koeffizienten zu erwarten. Nach dem heutigen Stand der Forschung kann man dieser zu erwartenden Änderung der Koeffizienten mit dem Formparameter F nur mittels einer Hypothese über den Verlauf der turbulenten Schubspannung in der Unterschicht Rechnung tragen.

Dimensionsanalytisch ergibt sich zunächst für die Unterschicht im Anschluß die wandnahe vollturbulente Schicht

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{y} \frac{V_*}{f(V_* y v^{-1})}, \quad V_* = \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

mit der bei der Dimensionsanalyse unbestimmt bleibenden Funktion f der Dimensionslosen

$$V_* y v^{-1}$$

In Verallgemeinerung einer von E. R. van Driest [8] aufgestellten Hypothese auf den hier studierten Fall setzen wir in der Unterschicht für die im Ansatz für die turbulente Schubspannung τ_t (vgl. (1.5) —

$$\frac{\tau_t}{\rho} = l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

auftretende Länge hier

$$l = \kappa y \left[1 - \exp \left(- \frac{1}{M} \frac{V_* y}{v} \right) \right] \quad (2.6)$$

$$\text{mit } \tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y$$

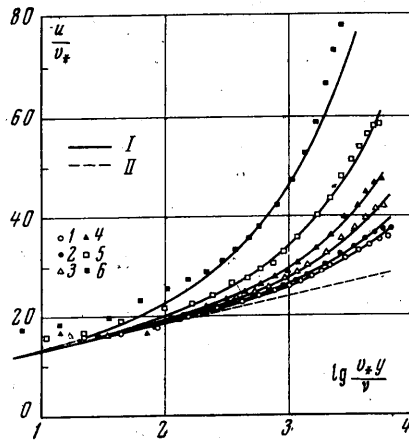


Abb. 3. Wandgesetz bei Druckanstieg (I — Theorie, II — log. Gesetz; Messung Schubauer und Klebanoff)

wobei wir bei hinreichend grosser Reynoldsscher Kennzahl den empirischen Koeffizienten M als universelle Konstante ansehen.

Das führt unter Berücksichtigung der laminaren Schubspannung τ_l

$$\frac{\tau_l}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}$$

in (2.5) auf die Funktion

$$\frac{u}{v_*} = 2 \int_0^{v_* y / \nu} \frac{(1 + F \zeta) d\zeta}{1 + [1 + 4 \kappa^2 \zeta^2 (1 + F \zeta) (l / \kappa y)^2]^{1/2}} \quad (2.7)$$

die für grosses Argument in das Wandgesetz (2.2) übergeht.

Das Ergebnis der Rechnung enthält die Tabelle. Dabei wurde die universelle Konstante $M = 25.13$ gesetzt, die für $\tau = \tau_0$ (log. Wandgesetz) auf $C = 5.10$ führt.

Das Wandgesetz bei Druckanstieg besitzt nun — entsprechend dem logarithm. Gesetz bei Druckabfall — die charakteristische Eigenschaft, dass es eine Approximation der Geschwindigkeitsprofile liefert. Der Nachweis dieser

F	C _*	G	D _*	F	C _*	G	D _*
0	5.10	1.0	8.205	0.1	5.625	0.08	5.635
0.01	5.12	0.8	7.905	0.2	6.105	0.06	5.395
0.02	5.17	0.6	7.56	0.4	6.826	0.04	5.07
0.04	5.285	0.4	7.125	0.6	7.37	0.02	4.56
0.06	5.40	0.2	6.45	0.8	7.82	0.01	4.11
0.08	5.515	0.1	5.83	1.0	8.205	0	2.23

Eigenschaft wurde durch Vergleich mit Messungen in der Arbeit [9] erbracht, aus der wir als Beispiel Abb. 3 bringen (1 — $x = 19$, 2 — $x = 20$, 3 — $x = 21$, 4 — $x = 22$, 5 — $x = 23$, 6 — $x = 24$ ft).

§ 3. Berechnungsverfahren. Wir stellen zunächst das Berechnungsverfahren allgemein für die relativ einfach zu behandelnden Grenzschichtbereiche mit Druckabfall und in Ablösungsnähe dar.

In der konkreten Ausführung werden wir uns dann auf sog. Äquilibrium-Grenzschichten beschränken, für die sich einfache explizite Formeln ergeben¹.

Unter Äquilibrium-Grenzschichten versteht man bekanntlich Grenzschichten, deren Geschwindigkeitsprofile in grosser Näherung ein ähnliches Verhalten aufweisen und durch Konstanz eines charakteristischen Parameters gekennzeichnet sind.

1°. Grenzschichtgleichungen. Die Grenzschichtgleichungen lauten

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Für $\tau = A \partial u / \partial y$ haben wir dabei den hypothetischen Ansatz (1.7) mit (1.9).

Wir transformieren zunächst das Gleichungssystem (3.1) von den unabhängigen Variablen x, y auf die unabhängigen Variablen $x, \eta = y \delta^{-1}(x)$.

Führen wir noch die Dimensionslosen

$$\omega = \frac{u}{u_1(x)}, \quad \frac{v}{u_1(x)}, \quad R_x = \frac{u_0 x}{\nu}, \quad R_\delta = \frac{u_1 \delta}{\nu}, \quad c_1 = \frac{\tau_0}{\rho u_1^2}$$

(u_0 Anströmgeschwindigkeit, $u_1(x)$ äussere Potentialströmung) ein, so erhalten wir bei Elimination von v/u_1 mittels der Kontinuitätsgleichung und nachfolgender Integration über η aus (3.1) die Bewegungsgleichung

$$\frac{\tau}{\rho u_1^2} = c_1 - Z \quad (3.2)$$

$$Z \equiv \frac{1}{(u_1/u_0)^2} \frac{d(u_1/u_0)}{dR_x} R_\delta \left(\eta - \int_0^\eta \omega^2 d\eta \right) + \\ + \frac{1}{u_1/u_0} R_\delta \frac{\partial \omega}{\partial R_x} \int_0^\eta \omega d\eta - \frac{1}{u_1/u_0} \frac{\partial}{\partial R_x} \left[R_\delta \left(\omega \int_0^\eta \omega d\eta - \int_0^\eta \omega^2 d\eta \right) \right] \\ \text{mit } \lambda = -\frac{(dp/dx) \delta}{(\rho/2) u_1^2} = \frac{2}{(u_1/u_0)^2} \frac{d(u_1/u_0)}{dR_x} R_\delta$$

Hierbei ist nach (1.5) und (1.9)

$$\frac{\tau}{\rho u_1^2} = \kappa^2 \eta^2 e^{-2\eta/m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.3)$$

Die Randbedingungen lauten

$$\omega = v/u_1 = 0, \quad \eta = 0 \\ \omega = 1, \quad \eta = 1 \quad (3.4)$$

Für $\eta = 1$ folgt aus (3.2) mit $\omega = 1$ und $\tau = 0$ der Impulsintegralsatz

$$c_1 = \frac{1}{(u_1/u_0)^2} \frac{d(u_1/u_0)}{dR_x} R_\delta \left(1 - \int_0^1 \omega^2 d\eta \right) + \\ + \frac{1}{u_1/u_0} \frac{d}{dR_x} \left[R_\delta \int_0^1 \omega(1-\omega) d\eta \right] \equiv N \quad (3.5)$$

Der Rechengang geht nun so weiter, dass wir die in (3.2) und (3.5) auftretenden Trägheitsglieder approximativ mittels der Wandgesetze berechnen.

¹ Für die nähere Ausführung und weitere Resultate siehe [10] und [11].

2°. Turbulente Grenzschichten bei Druckabfall. Das logarithmische Gesetz (1.3), das hier der Approximation dient, lautet in den obigen Koordinaten, wenn wir noch das Symbol ξ einführen

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{c_1}}, \quad \omega = \frac{1}{\xi} \ln \eta + g, \quad g = \frac{1}{\xi} \left[\kappa C + \ln \left(R_0 \frac{x}{\xi} \right) \right] \quad (3.6)$$

Unterwerfen wir ω (im folgenden mit ω_0 bezeichnet) der Randbedingung $\omega_0 = 1$ für $\eta = 1$, so kommt in erster Näherung

$$R_0 = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{e^{\kappa C}} \xi e^{\xi} \quad (3.7)$$

weiterhin können wir dann auch rechnen mit

$$\omega_0 = 1 + \frac{1}{\xi} \ln \eta \quad (3.8)$$

In den Trägheitsgliedern tritt bei Rechnung mit (3.8) neben der Variablen η die Variable ξ auf. Wir setzen im folgenden

$$\frac{\partial}{\partial R_x} \Big|_{\eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \Big|_{\eta} \frac{d\xi}{dR_x}$$

Aus Gleichung (3.2) und (3.3) folgt zunächst

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi \eta} \left(1 - \frac{Z}{N} \right)^{1/2} e^{\eta/m} \quad (3.9)$$

Für $\eta \approx 0$ ist $\partial \omega / \partial \eta \approx (\xi \eta)^{-1}$, was auf die logarithmische Verteilung ω_0 führt. Spalten wir die Singularität ab, so ergibt Integration — mit vernachlässigbarem kleinen Fehler bei relativ dünner Unterschicht —

$$\omega = \left(\frac{1}{\xi} \ln \eta + g \right) + \frac{1}{\xi} \int_0^{\eta} \frac{(1 - Z/N)^{1/2} e^{\eta/m} - 1}{\eta} d\eta \quad (3.10)$$

wo nunmehr das zweite Glied die Korrektur zum logarithm. Gesetz angibt. Für diese Korrektur werden wir uns in der weiteren Rechnung auf Glieder der Größenordnung ξ^{-1} ($\xi \sim 10$) beschränken.

Setzen wir (3.7) ein und führen die Quadraturen mit (3.8) aus, so kommt bei Vernachlässigung von Gliedern kleinerer Größenordnung

$$\frac{Z}{N} \approx \eta - 2W\eta \ln \eta, \quad W = \frac{1}{\kappa^3} \frac{1}{e^{\kappa C}} \frac{1}{(u_1/u_0)^2} \frac{du_1/u_0}{dR_x} \xi^2 e^{\xi} \quad (3.11)$$

und danach aus (3.10)

$$\omega = \frac{1}{\xi} \ln \eta + g + \frac{1}{\xi} F(\eta) \quad (3.12)$$

$$F(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{(1 - \eta + 2W\eta \ln \eta)^{1/2} e^{\eta/m} - 1}{\eta} d\eta$$

Wir merken an, dass man die so gewonnene Korrektur zum logarithm. Gesetz als ersten Schritt eines Iterationsganges ansehen kann. Die Grösse ω hat der Randbedingung $\omega = 1$ für $\eta = 1$ zu genügen. Das gibt dann in zweiter Näherung

$$R_0 = \frac{1}{\kappa} e^{-(\kappa C + F(1))} \xi e^{\xi} \quad (3.13)$$

$$\omega = 1 + \xi^{-1} (\ln \eta + F(\eta) - F(1)) \quad (3.14)$$

Der in $F(\eta)$ auftretende Parameter W steht in naher Beziehung zum Clauserschen Parameter β für Äquilibriumsgrenzschichten.

Nach Definition ist

$$\beta = \frac{\delta_1}{\tau_0} \frac{dp}{dx} = - \frac{\delta_1}{\delta} \frac{R_\delta}{c_1} \frac{1}{(u_1/u_0)^2} \frac{d}{dR_x} \frac{u_1}{u_0}, \quad \delta_1 = \delta \int_0^1 (1 - \omega) d\eta \quad (3.15)$$

Für δ_1 / δ erhalten wir mit (3.14)

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{\Pi}{\xi}, \quad \Pi \equiv 1 + F(1) - \int_0^1 F d\eta$$

Setzen wir in (3.15) noch R_δ nach (3.13) ein, so haben wir

$$\beta = - \frac{\Pi}{e^{F(1)}} W \quad (3.16)$$

Zur Lösung einer konkreten Aufgabenstellung mit vorgegebener äusserer Potentialströmung $u_1(x)$ benötigen wir noch den Verlauf von W in (3.12)

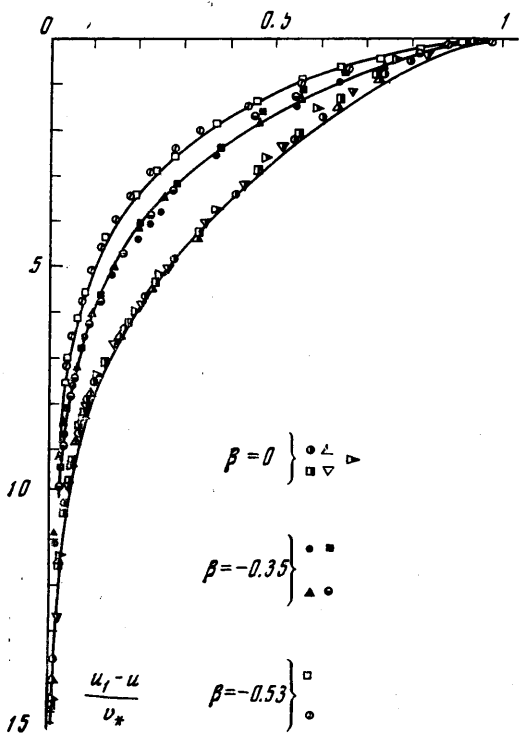


Abb. 4. Geschwindigkeitsverteilungen für Äquilibrium — Grenzschichten mit Druckabfall

bzw. von ξ in Abhängigkeit von R_x . Hierzu dient uns der Impulsintegralsatz (3.5), wobei wir die in (3.5) vorkommenden Quadraturen nunmehr mit (3.14) durchführen und (3.13) einsetzen.

Wir verfolgen den allgemeinen Fall nicht weiter und wenden den erhaltenen Formalismus auf Äquilibrium-Grenzschichten an.

Bei den von F. H. Clauser [12] entdeckten Äquilibrium-Grenzschichten handelt es sich um Grenzschichten, deren Geschwindigkeitsprofile in der Auftragung

$$\frac{u_1 - u}{v_*} = \frac{1 - \omega}{v_* / u_1} \quad \text{über} \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

nahezu zur Deckung kommen. Charakterisiert ist dieser spezielle Typ turbulenter Grenzschichten nach F. Clauser durch Konstanz des Parameters β .

Die eine Äquilibrium-Grenzschicht erzeugende Potentialströmung $u_1(x)$ ist aus dem Impulsintegralsatz (3.5) als Funktion von ξ berechenbar.

Eine zweite Gleichung, aus der R_x als Funktion von ξ gewonnen werden kann, liefert die Bedingung der Konstanz des Parameters β .

Unter Beschränkung auf große ξ erhalten wir folgende einfache Näherungsformeln

$$\frac{u_1(x)}{u_0} \approx \begin{cases} (C_1 R_x + C_2)^{-\beta(1+3\beta)^{-1}} \\ C_1 e^{C_2 R_x}, \quad \beta = -1/3 \end{cases} \quad (3.17)$$

Die Integrationskonstanten dienen der Anpassung an die Anfangsbedingung.

Von Interesse ist noch die Widerstandsformel für Äquilibrium:

$$\frac{(C_1 R_x + C_2)^{(1+2\beta)/(1+3\beta)}}{C_1} \kappa^3 e^{\kappa C + F(1)} \frac{(1+3\beta)}{\Pi} \approx \xi^2 e^\xi \quad (3.18)$$

aus der man bei bekanntem Verlauf der Potentialströmung die lokale Widerstandsziffer ξ bzw. $C_f = 2\kappa^2 \xi^{-2}$ berechnen kann.

Numerische Rechnungen wurden für folgende Modelle durchgeführt, für die Messungen vorliegen:

$\beta = 0$ (Ebene Platte); Messung D. W. Smith, J. H. Walker [13].

$\beta = -0.35, -0.53$; Messung H. J. Herring, J. F. Norburry [14]. Die Ergebnisse zeigen Abb. 4 sowie 5.

3°. Turbulente Grenzschichten in Ablösungsnähe. Die Ablösungsnähe ist dabei hier durch die Forderung definiert, dass in der vollturbulenten Schicht der Grenzschichtströmung

$$\tau_0 \ll \frac{dp}{dx} y \quad \text{bzw.} \quad c_1 \ll -\frac{\lambda}{2} \eta \quad (3.19)$$

Der Berechnung der Trägheitsglieder legen wir hier das «Wandgesetz bei Druckanstieg» (2.2) zugrunde.

Wir geben zunächst der Bewegungsgleichung (3.2) und dem Impulsintegralsatz (3.5) die hier zweckmäßigere Form

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho u_1^2} &= c_1 - \frac{\lambda}{2} \eta - \frac{\partial}{\partial R_x} \times \quad (3.20) \\ &\times \left\{ \frac{\lambda}{2} U \left(\omega \int_0^\eta \omega d\eta - \int_0^\eta \omega^2 d\eta \right) \right\} + \\ &+ \frac{\lambda}{2} U \frac{\partial \omega}{\partial R_x} \int_0^\eta \omega d\eta - \frac{\lambda}{2} \left(\omega \int_0^\eta \omega d\eta - \right. \\ &\left. - 2 \int_0^\eta \omega^2 d\eta \right) \equiv c_1 - \frac{\lambda}{2} \eta - Z \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} U &= \frac{u_1}{u_0} \left(\frac{d}{dR_x} \frac{u_1}{u_0} \right)^{-1} \\ c_1 - \frac{\lambda}{2} &= \frac{d}{dR_x} \left\{ \frac{\lambda}{2} U \int_0^1 \omega (1 - \right. \\ &\left. - \omega) d\eta \right\} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \omega (1 - 2\omega) d\eta \equiv N \end{aligned} \quad (3.21)$$

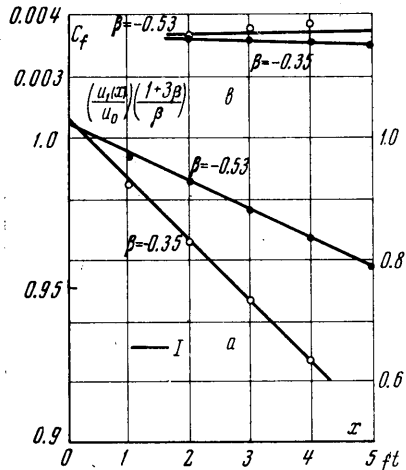


Abb. 5. Potentialströmungen (a) und Widerstandsbeiwerte (b) für Äquilibrium-Grenzschichten

Das Wandgesetz (2.2) nimmt in den hier eingeführten Variablen, mit Beschränkung auf den ablösungsnahen Bereich, wenn wir noch das Symbol

$$\Lambda = -\frac{\lambda}{2} \kappa^{-2}$$

einführen, die einfache Form an

$$\omega \approx 2(\Lambda\eta)^{1/2} + h,$$

$$h = \frac{1}{\xi} \left[-3 \ln \xi + \kappa C_x - 2 + \ln(4\kappa^3) + \ln\left(\frac{-u_1}{u_0} U\right) \right] \quad (3.22)$$

Unterwerfen wir das Wandgesetz (3.22) (im folgenden durch Index 0 gekennzeichnet) der Randbedingung $\omega_0 = 1$ für $\eta = 1$, so können wir die Rechnung auch durchführen mit

$$\omega_0 = 1 + 2\Lambda_0^{1/2}(\eta^{1/2} - 1) \quad (3.23)$$

Die Berechnung der Trägheitsglieder mit (3.23) ergibt dann, wenn wir noch setzen

$$\frac{\partial}{\partial R_x} = \frac{\partial}{\partial \sqrt{\Lambda_0}} \frac{d\sqrt{\Lambda_0}}{dR_x}$$

für (3.20) und (3.21) bei Vernachlässigung von Gliedern kleinerer Grössenordnung

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{\tau}{\rho u_1^2} \approx \Lambda \left\{ \eta - \frac{Z}{N} \right\}, \quad Z = \Lambda_0(a\eta + b\eta^{3/2} + c\eta^2) \quad (3.24)$$

$$a = 1 - 4\sqrt{\Lambda_0}(1 - \sqrt{\Lambda_0}) - 2(1 - 2\sqrt{\Lambda_0})U \frac{d\sqrt{\Lambda_0}}{dR_x},$$

$$b = 2\sqrt{\Lambda_0} \left[(1 - 2\sqrt{\Lambda_0}) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{dU}{dR_x} \right) - \frac{2}{3} U \frac{d\sqrt{\Lambda_0}}{dR_x} \right]$$

$$c = \frac{2}{3} \Lambda_0 \left(2 - \frac{dU}{dR_x} \right)$$

$$N = \Lambda_0 \left\{ 1 - 2\sqrt{\Lambda_0} + \frac{4}{3} \Lambda_0 - \frac{2}{3} \sqrt{\Lambda_0}(1 - \sqrt{\Lambda_0}) \frac{dU}{dR_x} - 2 \left(1 - \frac{4}{3} \sqrt{\Lambda_0} \right) U \frac{d\sqrt{\Lambda_0}}{dR_x} \right\} \quad (3.25)$$

In der weiteren Rechnung wäre bei vorgegebener äusserer Potentialströmung $u_1(x)$ zunächst der Verlauf des Parameters Λ_0 aus (3.25) zu bestimmen.

Wir behandeln im folgenden nur noch Äquilibrium-Grenzschichten. Der dort entwickelte Rechengang wäre sinngemäss auch auf den allgemeinen Fall anzuwenden.

Als im Äquilibrium befindlich erweisen sich hier Grenzschichten mit konstantem Parameter Λ .

Mit konstantem Λ_0 folgt aus (3.25) zunächst

$$\frac{u_1(x)}{u_0} = (C_1 R_x + C_2)^n, \quad n = -\frac{1 - \sqrt{\Lambda_0}}{3 - 2\sqrt{\Lambda_0}}, \quad \sqrt{\Lambda_0} = \frac{1 + 3n}{1 + 2n} \quad (3.26)$$

wo C_1, C_2 Integrationskonstanten sind. Einsetzen von (3.26) in (3.24) ergibt dann, wenn wir die Integrationskonstante gleich der des Wandgesetzes (3.22) setzen

$$\omega = \sqrt{\Lambda} \Phi(\eta) + h$$

$$\Phi(\eta) = \sqrt{2} \Lambda_0^{1/4} \int_c^\eta \left(\frac{A - B\sqrt{\eta} - C\eta}{\eta} \right)^{1/2} e^{\eta/m} d\eta \quad (3.27)$$

$$A = 2(1 - \sqrt{\Lambda_0}), \quad B = (1 - 2\sqrt{\Lambda_0}) \left(1 + \frac{1 - 2/3\sqrt{\Lambda_0}}{1 - \sqrt{\Lambda_0}} \right)$$

$$C = \frac{2}{3}\sqrt{\Lambda_0} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1 - 2/3\sqrt{\Lambda_0}}{1 - \sqrt{\Lambda_0}} \right)$$

Dieser Rechengang entspricht dem 1. Schritt einer Iteration. Wir begnügen uns hier mit diesem 1. Schritt.

Unterwerfen wir ω der Randbedingung $\omega = 1$ für $\eta = 1$, so kommt

$$1 = \sqrt{\Lambda}\Phi(1) + h \tag{3.28}$$

Weiter können wir dann für ω auch setzen

$$\omega = 1 + \sqrt{\Lambda}(\Phi(\eta) - \Phi(1)) \tag{3.29}$$

Die Grösse $\sqrt{\Lambda}$ wird nun wiederum mittels des Impulsintegralsatzes (3.21) — unter Vernachlässigung von Gliedern kleinerer Grössenordnung — bestimmt, wobei die Trägheitsglieder jedoch nunmehr mit ω berechnet werden. Das gibt hier bei konstantem Λ und mit (3.27)

$$\sqrt{\Lambda} = \frac{1 + 3n}{1 + 2n} \frac{\Phi(1) - \Psi(1)}{\Phi^2(1) - 2\Phi(1)\Psi(1) - X(1)}$$

$$\Psi(1) = \int_0^1 \Phi d\eta, \quad X(1) = \int_0^1 \Phi^2 d\eta \tag{3.30}$$

Es verbleibt die Ermittlung der lokalen Widerstandsziffer ξ bzw. $C_f = 2\kappa^2\xi^{-2}$, zu der uns Gleichung (3.28) dient. Ist die äussere Potentialströmung in der Form

$$\frac{u_1(x)}{u_0} = \left(D_1 \frac{x}{x_0} + D_2 \right)^n \tag{3.31}$$

gegeben, so ist mit $R_0 = u_0 x_0 v^{-1}$

$$3 \ln \xi + (1 - \sqrt{\Lambda}\Phi(1))\xi =$$

$$= \kappa C_* - 2 + \ln(4\kappa^3) + \ln\left(\frac{R_0}{-nD_1}\right) +$$

$$+ (1 + n) \ln\left(D_1 \frac{x}{x_0} + D_2\right) \tag{3.32}$$

Der hier auftretende Koeffizient C_* ist dabei, vgl. Tabelle, als abhängig vom Formparameter F anzusehen.

§ 4. Beispiele. 1. Den entwickelten Formalismus haben wir auf die Messreihe 2 der Clauserschen Messungen [12] angewendet, die als nahe der Ablösung anzusehen ist. Das Ergebnis zeigt Abb. 6. Dabei ergab sich

nach (3.30) $\sqrt{\Lambda} = 0.31$; berechnet man jedoch $\sqrt{\Lambda}$ nach der aus (3.31) fliessenden Formel

$$\lambda = 2nD_1 \frac{\delta}{x_0} \left(D_1 \frac{x}{x_0} + D_2 \right)^{-1}$$

mittels des aus der Messung abzulesenden Verlaufs von u_1/u_0 sowie der von F. Clauser angegebenen Grenzsichtdicken δ , so erhält man einen schwachen linearen Anstieg von $\sqrt{\Lambda}$, beginnend mit $\sqrt{\Lambda} \approx 0.27$ bei $x = 90$ in bis $\sqrt{\Lambda} \approx 0.32$ bei $x = 287$ in. Wir haben es also bei der Clauserschen Messreihe 2 nur mit einem dem Äquilibrium $\Lambda = \text{const.}$ nahen Verhalten zu tun. Was nun den bekannten Parameter β (Formel (3.15)) betrifft,

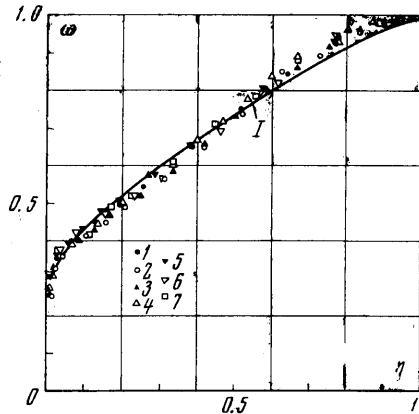
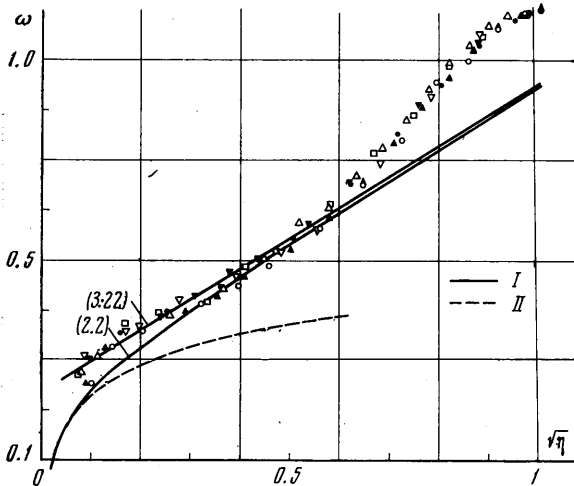


Abb. 6. Äquilibrium-Profil in Ablösungsnähe, Modell 2 F. Clauser (I-Theorie)

mit dem die Clauserschen Messreihen in Verbindung gebracht werden, so ergibt sich für diesen hier



$$\beta = \Lambda^{3/2} \left(\Phi(1) - \int_0^1 \Phi d\eta \right) \xi^2$$

der nach dem experimentellen Befund beim Fortschreiten der Grenzschichtströmung mit wachsendem Λ und wachsendem ξ (bzw. fallendem C_f) ein relativ stärkeres Anwachsen zeigt als Λ . Es ist demnach zu konstatieren, dass die Clausersche Messreihe 2 dem Äquilibrium $\Lambda = \text{const}$ näher steht als dem Äquilibrium $\beta = \text{const}$.

Für die lokale Widerstandsziffer ergab die Rechnung fallende C_f -Werte von $0.75 \cdot 10^{-3}$ zu $0.60 \cdot 10^{-3}$, die nicht unerheblich niedriger liegen als die in [12] angegebenen Werte $C_f \cdot 10^3 \approx 1$, die mit Hilfe des logarithm. Wandgesetzes aus den experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen ermittelt wurden.

Abb. 7. Äquilibrium-Profil in Ablösungsnähe und Wandgesetz (Messung F. Clauser; I — Wandgesetz bei Druckanstieg, II — log. Gesetz, $x/x_0 = 1.5$)

Dass diese Prozedur im ablösungsnahen Bereich jedoch nicht anwendbar ist, kann man Abb. 7 entnehmen. Es ist zunächst einmal ersichtlich, dass die gemessene Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe dem gemäss (3.19) vereinfachten Wandgesetz (3.22) folgt, also in der Auftragung über $\sqrt{\eta}$ auf einer Geraden gelegen ist. Eingetragen ist weiter in Abb. 8 das vollständige Wandgesetz (2.2) das in seiner Abweichung von der Geraden den Einfluss der in (3.22) vernachlässigten Reibung zeigt. (2.2) geht mathematisch für $\eta \rightarrow 0$ in das logarithm. Wandgesetz über, das im Bild gestrichelt erscheint. Es ist deutlich erkennbar, dass hier für die in Ablösungsnähe gelegene Clausersche Messreihe 2 von einem logarithm. Wandgesetz keine Rede mehr sein kann. Infolgedessen ist hier auch eine Ermittlung der lokalen Reibungswerte C_f an Hand des logarithm. Wandgesetzes nicht mehr durchführbar. Messpunkte an Ort und Stelle auf einer Kurve dieses Gesetzes anzusiedeln, führt für den ablösungsnahen Bereich mit Sicherheit auf unrichtige, hier zu grosse C_f -Werte.

2. B. S. Stratford [15] hat in einer grundlegenden experimentellen Untersuchung den Nachweis der Existenz einer turbulenten Grenzschicht mit der Wandschubspannung $\tau_0 \approx 0$ erbracht. Die Etablierung dieser Grenzschicht gelang durch passende Steuerung der äusseren Potentialströmung.

Mit $C_f = 0$ bzw. $\xi = \infty$ folgt für das Wandgesetz (3.22) zunächst

$$\omega_0 \approx 2 (\Lambda_0 \eta)^{1/2} + \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\xi} \left[x C_* + \ln \left(-\frac{u_1}{u_0} U \right) \right] \right\}$$

Wir nehmen für die äussere Potentialströmung ein Potenzgesetz

$$\frac{u_1(x)}{u_0} = \left(D_1 \frac{x}{x_0} + D_2 \right)^n$$

Damit kommt

$$\omega_0 \approx 2 (\Lambda_0 \eta)^{1/2} + D_* \left(\frac{-n D_1}{R_0} \right)^{1/3} \left(D_1 \frac{x}{x_0} + D_2 \right)^{-1/3(1+n)} \tag{4.1}$$

dabei ist nach Tabelle 1 $D_* = 2.23$.

Die Randbedingung $\omega_0 = 1$ für $\eta = 1$ würde erfordern, dass

$$1 = 2 \sqrt{\Lambda_0} + D_* \left(\frac{-n D_1}{R_0} \right)^{1/3} \left(D_1 \frac{x}{x_0} + D_2 \right)^{-1/3(1+n)} \tag{4.2}$$

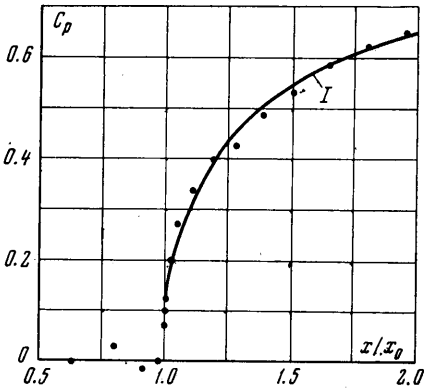


Abb. 8. Druckverlauf für Äquilibrium mit Wandreibung Null (Messung B. S. Stratford, I — Theorie)

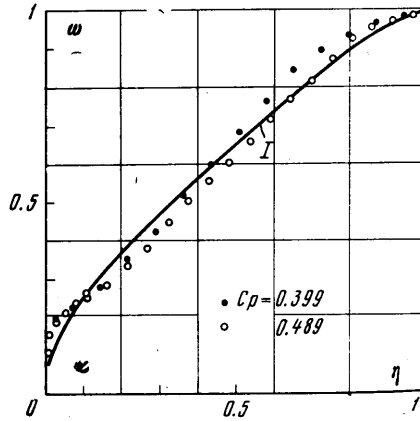


Abb 9. Äquilibrium-Profil für Wandreibung Null. (Messung. B. S. Stratford, I — Theorie)

woraus der Schluss zu ziehen ist, dass das Äquilibrium, charakterisiert durch konstantes Λ_0 bzw. Λ , nur in der Grenze für $R_0 \rightarrow \infty$ erreichbar ist.

Im weiteren beschränken wir uns auf diesen Grenzfall. Aus (4.2) folgt dann $\sqrt{\Lambda_0} = 1/2$.

Damit erhält man aus (3.27) die einfache Formel

$$\omega = \sqrt{\Lambda} \Phi(\eta), \quad \Phi(\eta) = \int_0^\eta \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^{1/2} e^{\eta/m} d\eta \quad (4.3)$$

Die Erfüllung der Randbedingung $\omega = 1$ für $\eta = 1$ verlangt $\sqrt{\Lambda} = \Phi^{-1}(1)$, was mit $\Phi(1) = 2.629 \sqrt{\Lambda} = 0.38$ ergibt.

Den zur Erzeugung der Grenzschicht mit der Wandreibung Null erforderlichen Verlauf der Potentialströmung $u_1(x)$ entnehmen wir dem Impulsintegralsatz (3.21)

$$-1 = \frac{dU}{dR_x} \int_0^1 \omega(1-\omega) d\eta + \int_0^1 \omega(1-2\omega) d\eta$$

Integration liefert mit

$$\int_0^1 \Phi d\eta = 1.645, \quad \int_0^1 \Phi^2 d\eta = 3.174, \quad \frac{u_1(x)}{u_0} = (C_1 R_x + C_2)^{-0.235}$$

Es bezeichne x_0 die Stelle des Übergangs in die Grenzschicht der Wandreibung Null; wir schreiben dann im folgenden

$$\frac{u_1(x)}{u_0} = D_1 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{-0.235}$$

Die Integrationskonstanten D_1, D_2 sind durch das jeweilige Modell festgelegt. Für das Stratfordsche Modell ist etwa $x_0 \approx 35.2$ in.; den Messungen kann man weiter entnehmen

$$D_1 \approx \sqrt{0.37}, \quad D_2 \approx 0.84$$

Bild 8 zeigt den gerechneten und den gemessenen Verlauf des Drucks

$$C_p = \frac{p - p_0}{(\rho/2) u_0^2} = 1 - D_1^2 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)$$

Für den Vergleich der Geschwindigkeitsverteilungen benötigen wir noch die Grenzschichtdicke δ . Ablesen bei $\omega = 0.995$ ergab aus den experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen

$$\begin{array}{ll} \delta \approx 1.38 \text{ in.} & \text{für } C_p = 0.399 \\ \delta \approx 1.86 \text{ in.} & \text{für } 0.489 \end{array}$$

Bild 9 enthält die theoretische Geschwindigkeitsverteilung (4.3) und die von Stratford bei den obigen C_p gemessenen Verteilungen, die von Stratford als sicher bezeichnet werden.

Anmerkung. D. Coles [16] hat eine Approximation der Geschwindigkeitsprofile angegeben, die viel Anwendung findet. Vom Gesichtspunkt einer Unterteilung der Grenzschicht in eine innere Schicht, charakterisiert durch logarithmische Geschwindigkeitsverteilung, und eine äußere Schicht vom Charakter freier Turbulenz überlagert Coles dem logarithmischen Wandgesetz eine aus Messungen zu ermittelnde universelle «wake» — Funktion

$$\sim (1 - \cos \pi \eta)$$

die nach bisher vorliegenden Ergebnissen bis in die Nähe der Ablösung eine gute Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile liefert.

Im ablosungsnahen Bereich jedoch durfte die Coles'sche Konstruktion keine gute Approximation mehr ergeben, da sowohl nach Theorie wie Experiment (vgl. § 3,3 und § 4) in diesem Bereich an die Stelle des logarithmischen Wandgesetzes ein Wandgesetz tritt, das mit $\eta^{1/2}$ variiert. Ein Vergleich des Ablösungsprofils nach Coles mit der Messung von Stratford zeigt denn auch einen erheblichen Unterschied; vgl. M. P. Escudier, W. B. Nicoll [17].

Поступило 26 XI 1968

LITERATUR

1. Landau L. D., Lifschitz E. M. Fluid Mechanics. Pergamon Press, 1963.
2. Szablewski W. Turbulente Parallelströmungen. ZAMM, 1968, Bd. 48, S. 35.
3. Hinze I. O. Turbulence, N. Y. McGraw-Hill, 1959.
4. Reichardt H. Gesetzmässigkeiten der geradlinigen turbulenten Couetteströmung. Mitt. Max Planck Inst. f. Strömungsforschung, 1959, Nr 22.
5. Szablewski W. Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen. Ingr. Arch., 1954, Bd 22, H. 4, S. 268.
6. Townsend A. A. Equilibrium layers and wall turbulence. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, pt. 1, p. 97.
7. Mellor G. L. The effect of pressure gradients on turbulent flow near a smooth wall. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, pt. 2, p. 255.
8. Van Driest E. R. On turbulent flow near a wall. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 11, p. 1007.
9. Szablewski W. Analyse von Messungen turbulenter Grenzschichten mittels der Wandgesetze. Ingr. Arch. 1960, Bd. 29, H. 4, S. 291.
10. Szablewski W. Turbulente Grenzschichten mit Druckabfall, Ingr. Arch., 1968, Bd. 37, H. 4, S. 267.
11. Szablewski W. Turbulente Grenzschichten in Ablösungsnähe, ZAMM, 1969, Bd. 49, H. 4, S. 215.
12. Clauser F. H. Turbulent boundary layers in adverse pressure gradient. J. Aeronaut. Sci., 1954, vol. 21, No. 2, p. 91.
13. Smith D. W., Walker J. H. Skin — friction measurements in incompressible flow. NASA TR NR — 26, 1959.
14. Herring H. J., Norburry J. F. Some experiments on equilibrium turbulent boundary layers in favourable pressure gradient. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt. 3, p. 541.
15. Stratford B. S. An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No. 1. p. 17.
16. Coles D. The law of the wake in the turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, pt. 2, p. 191.
17. Escudier M. P., Nicoll W. B. The entrainment function in turbulent boundary — layer and wall — jet calculations. J. Fluid Mech., 1966, vol. 25, pt. 2, p. 337.
18. Buyevich Y. A. Bemerkung über die Konstruktion von Modellen für wandnahe Turbulenz. ZAMM, 1969, Bd. 49, S. 372.

РЕЗЮМЕ

НОВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕСЖИМАЕМЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

В. ШАБЛЕВСКИЙ

(Берлин)

В § 1 записано выражение (1.3) для скорости в логарифмическом слое, полученное Л. Д. Ландау из (1.1), (1.2) и приведены выражения (1.4) и (1.5), связывающие градиент средней скорости и касательное напряжение в пристенном слое при наличии продольного перепада давления. Напряжение определяется далее через коэффициент турбулентной вязкости A согласно (1.6) и (1.7). Эти определения применяются для всех точек поперечного сечения пограничного слоя, причем основная модельная гипотеза формулируется именно для величины A , а именно предполагается, что в пределах турбулентного пограничного слоя можно различить два подслоя: внутренний, в котором существенно влияние взаимодействия со стенкой и величина A может быть выражена в форме (1.7), (1.8), и внешний, структура которого приближается к структуре свободной турбулентности и в котором A постоянна. Если речь идет о задаче внешнего обтекания, то для учета перемежаемости турбулентности во внешней части пограничного слоя предложено использовать соотношение (1.10) в пределах всего слоя. Адекватность модели иллюстрируется на фиг. 1; светлые кружки соответствуют внешнему подслою со свободной турбулентностью (т. е. гипотезе (1.9)).

В § 2 рассмотрены выражения для скорости во внутренней части пристенного слоя в предположении о постоянстве продольного градиента давления (выражения (2.2) и, в безразмерном виде, (2.3)). Применение предложенной модели позволяет перейти от этих выражений к уравнению для скорости в форме (2.5), решение которого выражается в виде интеграла (2.7). Использование модели (1.9) соответствует гипотезе (2.6) о зависимости прандтлевской длины смещения от расстояния до стенки y , представляющей некоторое обобщение гипотезы Ван Дриста. Сравнение различных зависимостей $u(y)$ с экспериментом приведено на фиг. 2, 3.

Основная расчетная часть работы заключена в § 3, где проведено подробное рассмотрение структуры пограничного слоя в рамках предложенной модели. Уравнения погранслоя (3.1) с граничными условиями (3.4) после введения безразмерных величин и ряда преобразований приводятся к задаче (3.2), (3.3), (3.5). Сначала рассмотрен случай относительно малого продольного градиента давления, когда в качестве первого приближения можно использовать логарифмический закон в форме (3.7). Для безразмерной скорости ω получены уравнения (3.10) и (3.11), определяющие ω с точностью до членов первого порядка по величине ξ^{-1} , где ξ определена в (3.6). Входящие в (3.10) параметры N и Z с требуемой точностью представляются в виде (3.1). Простое преобразование сводит (3.12) к выражению (3.14), из которого после использования граничного условия для ω следуют соотношения (3.16) и (3.17). Параметр W , входящий в определение F из (3.15), аналогичен по смыслу параметру β из (3.15), введенному ранее Клаузером. Связь между этими параметрами описывается формулой (3.16); зависимость величины ξ от числа Рейнольдса R_x получается из уравнения (3.18), следующего из выражения (3.6) для напряжения на внешней границе погранслоя.

Полученные результаты применяются далее к расчету автомодельного слоя, для которого из (3.19) и (3.20) следуют уравнения (3.21) и (3.22). При больших ξ отсюда выводятся соотношения (3.24), (3.25), описывающие связь между числом R_x , скоростью на внешней границе u_1 и «коэффициентом сопротивления» ξ . Сравнение расчетных зависимостей с опытными данными при разных β проиллюстрировано на фиг. 4, 5.

Далее в § 3 рассмотрена структура пограничного слоя вблизи точки отрыва, когда справедливо основное неравенство (3.19) и в качестве первого приближения может быть использована зависимость для скорости в форме (2.2), которая в новых обозначениях имеет вид (3.29), или после использования основного неравенства форму (3.22). Вычисления приводят к соотношениям (3.32), (3.33), из которых в предположении о постоянстве параметра Λ из (3.30) следуют представления (3.26) и (3.22). Учет граничного условия $\omega = 1$ при $\eta = 1$ позволяет получить соотношение (3.29) для ω , причем параметр Λ может быть вычислен из (3.30). Для величины ξ имеет место уравнение (3.32), которое в частном случае (3.40) сводится к (3.41).

Наконец, в § 4 рассмотрены некоторые примеры расчета пограничного слоя при исчезающе малом трении на стенке. Результаты вычислений хорошо согласуются с экспериментальными данными Клаузера и Стратфорда (см. фиг. 6—9).