УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ИЗОТРОПНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

В. И. СМИРНОВ

(*Москва*)

Выведены уравнения для двухточечных пространственно-временных корреляционных функций поля скоростей однородной изотропной турбулентности, вызванной случайными внешними силами. Установлена связь этих уравнений с известным уравнением Кармана — Хоуарта. Получены новые уравнения для стационарного случая, некоторые их решения и следствия. Показано, что уравнение Чандрасекара применимо только к невязкой жидкости. Выведено уравнение для пространственно-временных корреляционных функций поля температуры.

Известно, что в системе уравнений статистической теории турбулентности, получаемой из уравнений гидродинамики, число неизвестных функций больше числа уравнений.

Карман и Хоуарт [1] получили уравнение, содержащее двойные и тройные корреляции поля скоростей в изотропной турбулентности в один и тот же момент времени. Лин [2] рассматривал двухточечные пространственно-временные корреляции. Панчев [3] преобразовал уравнение Кармана — Хоуарта с помощью гипотезы о квазинормальности распределения скоростей (гипотезы М. Д. Миллионщикова [4]). В этих работах уравнения содержали больше одной неизвестной функции.

Чандрасекар, используя гипотезу квазинормальности, вывел уравнение для одной неизвестной скалярной функции — определяющего скаляра корреляционного тензора второго ранга поля скоростей [5], являющееся приближением более точных уравнений (Уайлд [6], А. С. Монин и А. М. Яглом [7]).

Предпринимались попытки решить уравнение Чандрасекара [8–12]. В. И. Смирнов и Б. Ш. Шапиро [12] нашли решение в виде ряда по четным степеням аргументов. В этой работе имеются некоторые ошибочные утверждения, на что указал А. М. Яглом [1].

А. С. Монин и А. М. Яглом [7] подчеркнули необходимость включения в уравнение Чандрасекара членов, описывающих случайные силы — источники турбулентности. Первая попытка записи такого рода уравнения предпринята ранее Уайлдом [6].

Ниже выводятся уравнения для корреляционных функций с учетом внешних сил, установлена их связь с уравнением Кармана — Хоуарта и рассмотрены особенности корреляции полей скоростей и температуры в стационарной турбулентности.

1. Уравнения для корреляционных функций поля скоростей. Среда считается несжимаемой, турбулентность — однородной и изотропной при нулевой средней скорости. Введем корреляционные тензоры

$$
\begin{aligned}
&Q_{ij} = \langle u_i(\mathbf{r}', t') u_j(\mathbf{r}'', t'') \rangle = \langle u_i' u_j'' \rangle, \qquad T_{ij,k} = \langle u_i' u_j' u_k'' \rangle \\
&P_{ij} = \langle u_i' u_j'' \omega'' \rangle \qquad (\omega = p / \rho), \qquad Q_{ij,k} = \langle u_i' u_j' u_k'' u_l'' \rangle \\
&G_{ij} = \langle a_i' u_j'' \rangle \qquad (a_i = F_i / \rho), \qquad H_{ij,k} = \langle u_i' u_j' a_k'' \rangle
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Здесь $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ — радиус-векторы двух точек в пространстве, t' и t'' — два момента времени, u_i — компоненты вектора скорости ($\langle u_i \rangle = 0$), p — давление, ρ — плотность ($\rho = \mathrm{const}$), F_i — компоненты вектора случайных внешних сил ($\langle F_i \rangle = 0$). Усреднение производится по ансамблю.

Однородные и изотропные тензоры второго и третьего рангов поля скоростей, соленоидальные по обоим и третьему индексу соответственно в силу несжимаемости среды, имеют следующий вид [13, 5]:

[1] Реферат статьи В. И. Смирнова, Б. Ш. Шапиро. К теории пространственно-временной корреляции скоростей в изотропном турбулентном потоке. РЖ Механика, 1968, № 12, 12Б1054.

$$R_{ij}=\frac{R'}{r}\xi_i\xi_j-(rR'+2R)\delta_{ij}, \quad \xi_i=r_i''-r_i', \quad r=|\xi| \tag{1.2}$$

$$S_{ij,\,k}=\frac{2}{r}S'\xi_i\xi_j\xi_k-(rS'+3S)(\xi_i\delta_{jk}+\xi_j\delta_{ik})+2S\xi_k\delta_{ij}$$

Здесь R и S — определяющие скаляры тензоров R_{ij} и $S_{ij,\,k}$, зависящие от r, t' и t'', штрих означает дифференцирование по r. Тензор $S_{ij,\,k}$ симметричен по i и j (тензоры $T_{ij,\,k}$ и $H_{ij,\,k}$ этим свойством обладают).

Предполагается соленоидальность вектора $\mathbf{a}$, поэтому G_{ij} и $H_{ij,\,k}$ также имеют вид (1.2).

Запишем уравнение Навье — Стокса для точки $(\mathbf{r}', t)$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t'}+\frac{\partial u_i'u_k'}{\partial x_k'}=-\frac{\partial \omega'}{\partial x_i'}+\nu\,\Delta u_i'+a_i' \tag{1.3}$$

После умножения на u_j'' и усреднения

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial t'}-\frac{\partial}{\partial \xi_k}T_{ik,\,j}=\nu\Delta_\xi Q_{ij}+G_{ij} \tag{1.4}$$

Перейдем к скалярам, как в работе [5] [1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\nu D_5\right)Q=\left(r\frac{\partial}{\partial r}+5\right)T+G, \qquad D_n=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.5}$$

Здесь D_n — симметричный лапласиан в n-мерном пространстве.

Рассмотрим тензоры Q_{ij}^*, $T_{ij,\,k}^*$ и т. д. и их скаляры, отличающиеся от (1.1) взаимной заменой моментов времени. Находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\nu D_5\right)Q^*=\left(r\frac{\partial}{\partial r}+5\right)T^*+G^* \tag{1.6}$$

Так как $Q^*=Q$, то сразу получается

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}+5\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\nu D_5\right)T-\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\nu D_5\right)T^*\right]= \tag{1.7}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\nu D_5\right)G^*-\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\nu D_5\right)G$$

Для случая вырождающейся турбулентности $(G=G^*=0)$ это уравнение выведено М. Н. Репниковым [14].

Запишем гипотезу квазинормальности в обычном виде

$$Q_{ij,\,kl}=Q_{ik}Q_{jl}+Q_{il}Q_{jk}+Q_{ij}(0,\,t',\,t')Q_{kl}(0,\,t'',\,t'') \tag{1.8}$$

Уравнение Навье — Стокса для точки $(\mathbf{r}'', t'')$ после умножения на $u_i'u_j''$ и усреднения дает

$$\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\nu D_7\right)T=-X+H \tag{1.9}$$

где X — скаляр тензора

$$X_{ij,\,k}=\frac{\partial Q_{ij,\,kl}}{\partial \xi_l}+\frac{\partial P_{ij}}{\partial \xi_k}$$

---

[1] А. С. Монин и А. М. Яглом [7] используют другие определяющие скаляры, связанные с Q и T соотношениями

$$Q=-{}^1\!/_2B_{LL}, \qquad T=-{}^1\!/_2r^{-1}B_{LL,\,L}$$

Как показал Чандрасекар [5], из гипотезы квазинормальности следует:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(5+r\frac{\partial}{\partial r}\right)X=-2Q\frac{\partial}{\partial r}D_5Q \tag{1.10}$$

(нестационарность и наличие внешних сил не мешают выводу (1.10)).

После простых преобразований, учитывая тождество

$$\left(5+r\frac{\partial}{\partial r}\right)D_7\equiv D_5\left(5+r\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{1.11}$$

окончательно находим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\nu D_5\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\nu D_5\right)Q=2Q\frac{\partial}{\partial r}D_5Q+ \tag{1.12}$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\nu D_5\right)G+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+5\right)H$$

Для скаляров с переставленными моментами времени находим заменами $t'\to t''$, Q, G, $H\to Q^*$, G^*, H^* уравнение — «двойник», образующее вместе с (1.5), (1.6), (1.12) и уравнением $Q=Q^*$ систему для определения пяти из функций Q, Q^*, T, T^*, G, G^*, H, H^*. Остальные должны быть заданы. Из (1.12) и его двойника, используя $Q=Q^*$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\nu D_5\right)G^*-\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\nu D_5\right)G=\left(r\frac{\partial}{\partial r}+5\right)(H-H^*) \tag{1.13}$$

если корреляции исчезают при $r\to\infty$.

Из уравнения (1.10) и его двойника следует

$$X_{ij,k}=\overset{*}{X}_{ij,k}$$

Отсюда снова в силу $Q=Q^*$

$$P_{ij}=P_{ij}^*$$

2. Динамика вырождения изотропной турбулентности. Рассмотрим случай, когда внешних сил нет ($G=H=0$). Из уравнений (1.5) и (1.6) находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial t''}\right)Q-2\nu D_5Q=\left(r\frac{\partial}{\partial r}+5\right)(T+T^*) \tag{2.1}$$

аналог уравнения Кармана — Хоуарта [1] для разновременных корреляций.

Принимая гипотезу квазинормальности, из (1.12) имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\nu D_5\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\nu D_5\right)Q=2Q\frac{\partial}{\partial r}D_5Q \tag{2.2}$$

уравнение, полученное в работе В. И. Смирнова и Б. Ш. Шапиро [12]. Заметим, что, несмотря на симметрию относительно t' и t'', нельзя искать решение в виде $Q(r, t'+t'')$, так как тогда из (1.5) и (1.6) немедленно вытекает неверное следствие $T=T^*$.

Уравнение (2.2) при отбрасывании нелинейных членов, малых в последней стадии вырождения турбулентности, дает

$$\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\nu D_5\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\nu D_5\right)Q=0 \tag{2.3}$$

Комбинируя это уравнение с (2.1), где $T = T^* = 0$, получаем более компактное уравнение

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t' \, \partial t''} = \nu^2 D_5{}^2 Q \qquad (2.4)$$

которое в работе [12] ошибочно считалось существенно отличным от (2.3).

Легко проверяется, что его решением, удовлетворяющим начальному условию

$$Q(r, 0, 0) = c \exp(-r^2 / r_0{}^2) \qquad (2.5)$$

где c и r_0 — постоянные, будет

$$Q(r, t', t'') = c \left[1 + \frac{4\nu(t' + t'')}{r_0^2} \right]^{-5/2} \exp\left[-\frac{r^2}{r_0{}^2 + 4\nu(t' + t'')} \right] \qquad (2.6)$$

При $t' = t'' = t$ получаем результат, ранее найденный Бэтчелором и Таунсендом [15].

3. Корреляция скоростей в стационарном турбулентном потоке. Если поле случайных сил однородно, стационарно и изотропно, турбулентность будет обладать теми же свойствами. Корреляционные функции будут зависеть от r и $\tau = t'' - t'$. Однако стационарность не означает симметрии по отношению ко времени. Всегда четны по τ тензоры, составленные из двух компонентов одного вектора (например, Q_{ij}), и некоторые другие тензоры четного ранга (например, $Q_{ij,\,kl}$, но не $\langle u_i' u_j'' u_k'' u_l'' \rangle$). Остальные не являются, вообще говоря, ни четными, ни нечетными. Перепишем (1.5) в виде

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \tau} - \nu D_5 \right) Q = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 5 \right) (T_1 + T_2) + G_1 + G_2,$$
$$T_1 + T_2 = T, \quad G_1 + G_2 = G \qquad (3.1)$$

Здесь T_1 и G_1 нечетны по τ, а T_2 и G_2 четны. Такое представление всегда возможно и единственно. Группируя члены, нечетные и четные по τ, имеем

$$-\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 5 \right) T_1 + G_1, \qquad -\nu D_5 Q = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 5 \right) T_2 + G_2 \qquad (3.2)$$

Перепишем (1.9) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \nu D_7 \right) (T_1 + T_2) = -X_1 - X_2 + H_1 + H_2 \qquad (3.3)$$

где X_1 и H_1 нечетны по τ, а X_2 и H_2 четны. Тогда

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \nu D_7 T_2 = -X_2 + H_2, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - \nu D_7 T_1 = -X_1 + H_1 \qquad (3.4)$$

Аналогичные уравнения имеют место и для скаляров Q^*, T^* и т. д. при замене τ на $-\tau$.

Перепишем соотношение Чандрасекара (1.10), следующее из гипотезы квазинормальности

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(5 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) (X_1 + X_2) = -2Q \frac{\partial}{\partial r} D_5 Q \qquad (3.5)$$

Поскольку выражение справа четно по τ, то $X_1 = 0$.

После подстановок и простых преобразований получим уравнение для Q

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2}-\nu^2 D_5{}^2 Q\right)=$$

$$=2Q\frac{\partial}{\partial r}D_5 Q+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial G_1}{\partial \tau}-\nu\frac{\partial}{\partial r}D_5 G_2+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+5\right)H_2 \qquad (3.6)$$

что является частным случаем (1.12). Отбрасывая члены, описывающие случайные силы, приходим к уравнению Чандрасекара [5].

При малых числах Рейнольдса можно пренебречь нелинейными членами и отбросить тройную корреляцию H_2. После интегрирования по r получается линейное уравнение

$$\partial^2 Q / \partial\tau^2-\nu^2 D_5{}^2 Q=-\partial G_1/\partial\tau+\nu D_5 G_2 \qquad (3.7)$$

Функция Грина оператора левой части определена в работе [12], поэтому, имея G_1 и G_2, можно выразить решение в квадратурах.

Однако наибольший интерес представляет собой турбулентность при больших числах Рейнольдса, когда следует рассматривать неупрощенное уравнение (3.6). Найдем его решение в общем виде.

Удобно перейти от Q к продольной корреляционной функции $f(r, \tau)$. По определению [5]

$$f=-2Q/\langle u^2\rangle \qquad (3.8)$$

где $\langle u^2\rangle$ — средний квадрат одной проекции (любой) вектора скорости.

Подставим (3.8) в (3.6) и проинтегрируем последнее по r, считая, что все корреляции стремятся к нулю в бесконечности

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}-\nu^2 D_5{}^2 f=-\langle u^2\rangle\int\limits_r^\infty f\frac{\partial}{\partial r'}D_5 f\,dr'+\frac{2}{\langle u^2\rangle}S \qquad (3.9)$$

$$S=\frac{\partial G_1}{\partial\tau}-\nu D_5 G_2+\left(r\frac{\partial}{\partial r}+5\right)H_2$$

Функции f и S четны по r и τ. Поэтому можно представить их в виде следующих степенных рядов:

$$f=\sum_{i=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty a_{ik}r^{2i}\tau^{2k}\,(a_{00}=1),\quad S=\sum_{i=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty s_{ik}r^{2i}\tau^{2k} \qquad (3.10)$$

Подставим эти ряды в (3.9). Предполагается их равномерная сходимость, что позволяет их почленно дифференцировать и интегрировать. Приравнивая коэффициенты членов с одинаковыми степенями r и τ, найдем

$$a_{0,k+1}=\frac{280\nu^2 a_{2k}-\langle u^2\rangle c_k+2s_{0k}/\langle u^2\rangle}{2(k+1)(2k+1)} \qquad (3.11)$$

где коэффициенты c_k определяются из

$$\sum_{k=0}^\infty c_k\tau^{2k}=\int\limits_0^\infty f(r,\tau)\frac{\partial}{\partial r}D_5 f(r,\tau)\,dr \qquad (3.12)$$

Нетрудно получить для c_k $(k\geqslant 1)$ формулу

$$c_k=4\sum_{p=0}^k\int\limits_0^\infty\sum_{i=0}^\infty\sum_{l=0}^\infty(i+1)(i+2)(2i+7)a_{i+2,p}a_{l,k-p}r^{2i+2l+1}\,dr \qquad (3.13)$$

Кроме того, найдем

$$a_{i+1,k+1}=\frac{1}{(i+1)(k+1)(2k+1)}\Big[2\nu^2(i+3)(i+2)(i+1)\times$$

$$\times(4i^2+32i+63)a_{i+3,k})+ \tag{3.14}$$

$$+\langle u^2\rangle\sum_{p=0}\sum_{q=0}^{k}(p+2)(p+1)(2p+7)a_{p+2,q}a_{i-p,k-q}+\frac{1}{\langle u^2\rangle}(i+1)s_{i+1,k}\Big]$$

Соотношения (3.11) и (3.14) показывают, что относительная роль инерционных взаимодействий и внешних сил, описываемых членами, пропорциональными $\langle u^2\rangle$ и $\langle u^2\rangle^{-1}$ соответственно, в формировании корреляционной функции поля скоростей зависит от $\langle u^2\rangle$, т. е. от числа Рейнольдса. Найденные формулы являются обобщением формул, полученных в [12].

Из (3.11) и (3.14) видно, что каждый столбец матрицы коэффициентов $\|a_{ik}\|$ (i — номер строки, k — столбца) определяется элементами столбцов, находящихся левее рассматриваемого и элементов матрицы $\|s_{ik}\|$, которые считаются известными. Иными словами, продольная пространственно-временная корреляционная функция однозначно определяется корреляционной функцией и корреляциями поля случайных сил и скоростей.

Отметим соотношения, следующие из (3.11). При $k=0$ имеем

$$a_{01}=140\nu^2a_{20}-\frac{\langle u^2\rangle}{2}c_0+\frac{1}{\langle u^2\rangle}s_{00} \tag{3.15}$$

Величина a_{01} связана с эйлеровым временным микромасштабом корреляции τ_0 формулой $a_{01}=-1/\tau_0{}^2$, следовательно, $a_{01}\leqslant 0$, откуда

$$c_0=\int_0^\infty f(r,0)\frac{\partial}{\partial r}D_5f(r,0)\,dr\geqslant\frac{2}{\langle u^2\rangle}\left(140\nu^2a_{20}+\frac{1}{\langle u^2\rangle}s_{00}\right) \tag{3.16}$$

Можно представить c_0 в виде

$$c_0=-f(r,0)D_5f(r,0)\,|_{r=0}-4\int_0^\infty\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f(r,0)}{\partial r}\right)^2dr \tag{3.17}$$

Второй член справа связан со средним квадратом пульсаций градиента давления формулой Бэтчелора [16]

$$\langle(\nabla p)^2\rangle=12\rho^2\langle u^2\rangle^2\int_0^\infty\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f(r,0)}{\partial r}\right)^2dr \tag{3.18}$$

выведенной с помощью гипотезы квазинормальности. Поскольку

$$f(r,0)D_5f(r,0)\,|_{r=0}=10a_{10}$$

находим

$$140\nu^2a_{20}+\frac{\langle u^2\rangle}{2}\left(10a_{10}+\frac{\langle(\nabla p)^2\rangle}{3\rho^2\langle u^2\rangle}\right)+\frac{1}{\langle u^2\rangle}s_{00}\leqslant 0 \tag{3.19}$$

В частном случае невязкой жидкости, например сверхтекучей части гелия II [17], стационарная турбулентность возможна и в отсутствие сил ($s_{00}=0$), и тогда выполняется неравенство

$$\langle(\nabla p)^2\rangle\leqslant-30\rho^2\langle u^2\rangle a_{10} \tag{3.20}$$

Чандрасекар [5] вывел для стационарной турбулентности уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\nu^2 D_5{}^2\right)Q = 2Q\frac{\partial}{\partial r}D_5 Q \tag{3.21}$$

Это уравнение содержит противоречие: внешних сил нет, однако среда считается вязкой. Как показано выше, в вязкой жидкости уравнение непременно включает в себя члены, описывающие силы, причем при числах Рейнольдса $R \ll 1$ случайные силы доминируют над силами инерции. Уравнение Чандрасекара, таким образом, имеет смысл только при нулевой вязкости.

В этой связи заметим, что средний квадрат локального ускорения

$$\left\langle\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)^2\right\rangle = \frac{6\langle u^2\rangle}{\tau_0{}^2} \tag{3.22}$$

где τ_0 — эйлеров микромасштаб корреляции, найденный в [12] из уравнения (3.21), согласуется с формулой, полученной Лином [2], только при $\nu = 0$.

Решения (3.21), найденные в работе В. И. Смирнова и Б. Ш. Шапиро [12], также имеют смысл лишь при $\nu = 0$. Использованный авторами метод решения (представление решения нелинейного уравнения в виде ряда) оказался применимым и к уравнению (3.9), содержащему члены, описывающие случайные силы.

А. М. Яглом [1] указал на ошибку в работе [12] (утверждение о четности T по времени), которая допущена и Чандрасекаром [5]. Однако утверждение А. М. Яглома, что уравнение Чандрасекара выведено последним правильно, неточно. В действительности Чандрасекар принял, что T четно, а кроме того, допустил в выкладках ошибку в знаке и пришел к (3.21). Если исправить вторую ошибку, то в выводе Чандрасекара придется для получения уравнения (3.21) в прежнем виде принять нечетность T по τ ($T^* = -T$), что ведет согласно (3.4) при X, $H = 0$ к $T_1 = 0$ и далее согласно (3.2) при $G = 0$ к $Q = 0$. Правильный вывод нестационарного уравнения в отсутствие внешних сил дан в работе [12], но переход к стационарному случаю при ненулевой вязкости, хотя и дает формально уравнение Чандрасекара, является незаконным.

Уайлд, применив диаграммную технику, нашел обобщение уравнения Чандрасекара на случай действия стационарных случайных сил в виде [6]

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\nu^2 D_5{}^2\right)f = -\frac{\partial g}{\partial r}+f\frac{\partial}{\partial r}D_5 f \tag{3.23}$$

где g — продольная корреляционная функция поля случайных сил (видимо, здесь скорость принята за единицу (см. 3.9)). После интегрирования по r получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}-\nu^2 D_5^2 f = -g-\int\limits_r^\infty f\frac{\partial}{\partial r'}D_5 f\,dr' \tag{3.24}$$

что формально напоминает (3.9). Однако изложенный выше вывод уравнения (3.9) показывает, что основную роль играют корреляции полей сил и скоростей, а не автокорреляция поля сил.

4. О корреляционных функциях поля температуры в турбулентном потоке. А. С. Монин и А. М. Яглом [7] получили следующее стационарное уравнение для пространственно-временных корреляционных функций пульсаций температуры:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\chi^2 D_3{}^2\right)B_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_{LL}\frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial r}\right) \tag{4.1}$$

где χ — коэффициент температуропроводности, $B_{\theta\theta}$ — определяющий скаляр корреляционного тензора второго порядка поля температуры, $B_{LL} = -2Q$. При выводе (4.1) используется гипотеза квазинормальности, как и при выводе уравнения Чандрасекара.

[1] См. примечание к стр. 2 статьи.

Уравнение (4.1) так же связано с уравнением Корсина [18] для динамики корреляций поля температуры, как уравнение Чандрасекара (3.21) с уравнением Кармана — Хоуарта [7]. Запишем уравнение Корсина

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-2\chi D_3\right)B_{\theta\theta}=2D_3B_{L\theta\theta}\qquad\left(D_3=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\tag{4.2}$$

Проводя аналогию с изложенным в п. 2 и 3, приходим к выводу, что уравнение для двухточечных разновременных корреляционных функций поля температуры имеет вид

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\chi D_3\right)\left(\frac{\partial}{\partial t''}-\chi D_3\right)B_{\theta\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2B_{LL}\frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial r}\right)\tag{4.3}$$

Из аналогии следует также, что в стационарном уравнении обязательно должны присутствовать члены, аналогичные случайным силам, и описывающие случайные источники температурной неоднородности. Если же их нет, то стационарное уравнение имеет смысл только при нулевой температуропроводности, и тогда

$$\frac{\partial^2B_{\theta\theta}}{\partial\tau^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2B_{LL}\frac{\partial B_{\theta\theta}}{\partial r}\right)\tag{4.4}$$

Отсюда нетрудно получить выражение временного микромасштаба корреляции температуры и другие формулы связи коэффициентов разложения $B_{\theta\theta}$ в степенной ряд по четным степеням r и τ.

Автор выражает благодарность А. М. Яглому, прочитавшему статью в рукописи, за интерес к работе и замечания.

Поступило 26 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman Th., von, Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc., London, 1938, A 164, No. 917.
2. Lin C. C. On Taylor's hypothesis and the acceleration terms in the Navier — Stokes equations. Quart. Appl. Math., 1953, vol. 10, No. 4.
3. Pantchev St. Nouveau système d'èquations dynamiques de la turbulence isotrope. Compt. rend., 1960, vol. 251, No. 18.
4. Миллионщиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. Докл. АН СССР, 1941, т. 32, № 9.
5. Chandrasekhar S. A theory of turbulence. Proc. Roy. Soc., 1955, A 229, No. 1176.
6. Wyld H. W. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid. Ann. Phys., 1961, vol. 14, No. 2.
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.
8. Chamberlain J. W., Roberts P. H. Turbulence spectrum in Chandrasekhar's theory. Phys. Rev., 1955, vol. 99, No. 6.
9. Chandrasekhar S. Theory of turbulence. Phys. Rev., 1956, vol. 102, No. 4.
10. Backus G. The existence and uniqueness of the velocity correlation derivative in Chandrasekhar's theory of turbulence. J. Math. Mech., 1957, vol. 6, No. 2.
11. Wentzel D. G. On the spectrum of turbulence. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 3.
12. Смирнов В. И., Шапиро Б. Ш. К теории пространственно-временной корреляции скоростей в изотропном турбулентном потоке. Тр. ЦАО, 1967, вып. 78.
13. Robertson H. P. The invariant theory of isotropic turbulence. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1940, vol. 36, No. 2.
14. Репников М. Н. К уравнению Кармана — Хоуарта. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
15. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of turbulence in the final period. Proc. Roy. Soc., 1948, A 194, No. 1039.
16. Batchelor G. K. Pressure fluctuations in isotropic turbulence. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, vol. 47, No. 2.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
18. Corrsin S. The decay of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. J. Aeronaut. Sci., 1951, vol. 18, No. 6.