ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. ИЕВЛЕВ

(*Москва*)

Статья посвящена проблеме построения замкнутой приближенной системы уравнений турбулентного движения несжимаемой жидкости.

Описание статистических характеристик турбулентного потока несжимаемой жидкости с постоянными свойствами в принципе может быть достигнуто путем определения характеристического функционала поля скорости, уравнение для которого было получено Хопфом [1]. Однако эффективных путей подхода к решению этого уравнения пока не предложено, поэтому необходимо построение приближенных теорий, использующих более простые, чем характеристический функционал, но менее полные характеристики турбулентности.

Как известно, для определения статистических свойств распределения скоростей в любом конечном числе точек турбулентного потока принципиально нельзя строго построить замкнутую систему уравнений, так как пульсации скорости во всех точках потока взаимосвязаны. В связи с этим основной, принципиальной, проблемой приближенных теорий турбулентности является проблема «замыкания» системы уравнений.

Строгие, но незамкнутые, уравнения для распределений вероятностей скоростей в конечных группах точек потока были получены А. С. Мониным [2]; аналогичные уравнения для распределения вероятностей различных значений вихря скорости получил Е. А. Новиков [3]. Эти уравнения пока мало использовались в теории турбулентности; методы приближенного «замыкания» системы уравнений для распределений вероятностей, насколько нам известно, не были предложены. Между тем уравнения для распределений вероятностей дают более полную и компактную статистическую характеристику турбулентности, чем обычно используемые уравнения для моментов (уравнения Фридмана — Келлера), и позволяют, по-видимому, легче сформулировать приближенные условия, замыкающие систему уравнений.

В данной статье предлагается возможный вариант построения замкнутой системы приближенных уравнений, не содержащих эмпирических констант, для распределений вероятностей различных значений скоростей в конечных группах точек в турбулентном потоке.

1. Выберем произвольные n точек в потоке жидкости. Пусть f_n обозначает $3n$-мерную плотность вероятности различных значений скоростей в выбранных точках в один и тот же момент времени t. Величина f_n зависит от скоростей во всех точках $\mathbf{u}_q$ (где $q=1,\ldots,n$ — номер точки), от координат точек $\mathbf{x}_q$ и в случае нестационарных в среднем потоков от времени t. В дальнейшем будем обозначать совокупность всех этих аргументов символом $A(n)$.

Используем полученные в работе [2] уравнения для f_n. Эти уравнения после некоторых простых преобразований можно записать в таком виде

$$\int\limits_{\mathbf{u}_q} u_{qk}\frac{\partial f_n}{\partial x_{qk}}d\mathbf{u}_q=0 \qquad q=1,\ldots,n \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial t}=-\sum_{q=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{qk}}(f_n u_{qk})+\frac{\partial}{\partial u_{qk}}(f_n B_{qk})\right\} \tag{1.2}$$

Здесь x_{qk} — декартовы координаты q-й точки $(k=1, 2, 3)$, u_{qk} — компоненты скорости $\mathbf{u}_q$, $d\mathbf{u}_q = du_{q1}du_{q2}du_{q3}$; по повторяющимся индексам, обозначающим номера осей координат, предполагается суммирование, а по повторяющимся индексам, обозначающим номера точек, знак суммы записывается в явном виде; символ $\mathbf{u}_q$ под знаком интеграла в уравнении (1.1) (и везде далее) обозначает интегрирование по всем компонентам скорости $\mathbf{u}_q$ от $-\infty$ до ∞.

Обозначение B_{qk} в уравнении (1.2) применено для некоторой величины, зависящей не только от распределения вероятностей скоростей f_n в выбранных n точках, но и от значений некоторых случайных величин в дополнительной ($n+1$-й) точке. Величина B_{qk} определяется следующим образом:

$$B_{qk} = \lim_{\mathbf{x}_{n+1}\to\mathbf{x}_q} \left\{ \nu \frac{\partial^2 \langle u_{(n+1)k}\rangle_{A(n)}}{\partial x_{(n+1)m}\,\partial x_{(n+1)m}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle p_{n+1}\rangle_{A(n)}}{\partial x_{(n+1)k}} \right\} \tag{1.3}$$

Здесь $\langle u_{(n+1)k}\rangle_{A(n)}$ и $\langle p_{n+1}\rangle_{A(n)}$ — средние значения k-й компоненты скорости $u_{(n+1)k}$ и давления p_{n+1} в $n+1$-й точке при заданных значениях скоростей в выбранной совокупности n точек (т. е. при заданных аргументах $A(n)$).

Соотношения (1.1) следуют из уравнения неразрывности, (1.2) — из уравнения Навье — Стокса. Как видно, уравнение (1.2) имеет вид уравнения сохранения массы «жидкости» с плотностью f_n в $6n$-мерном фазовом пространстве с координатами x_{qk} и u_{qk}, причем роль скоростей вдоль осей u_{qk} играют величины B_{qk}.

Величину $\langle p_{n+1}\rangle_{A(n)}$ в формуле (1.3) можно выразить через параметры, зависящие только от распределения скоростей. Воспользуемся для этого известным уравнением для давления, которое можно получить, применяя операцию вычисления дивергенции к уравнению Навье — Стокса и используя уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_k\,\partial x_k} = -\frac{\partial^2 u_m u_k}{\partial x_m\,\partial x_k} \tag{1.4}$$

Если область течения жидкости ограничена стенками, на которых $\mathbf{u}=0$, то из уравнения Навье — Стокса получается следующее граничное условие, необходимое для определения p по уравнению (1.4)

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial l}\right)_w = \nu\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial l^2}\right)_w \tag{1.5}$$

Здесь l — координата по нормали к стенке, u_l — составляющая скорости жидкости по нормали к стенке, индекс w отмечает величины производных на стенках.

Если уравнение (1.4) и граничные условия (1.5) осреднить при заданных значениях аргументов $A(n)$ (т. е. найти условное математическое ожидание входящих в соотношения (1.4) и (1.5) величин при заданных $A(n)$), то получится

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \langle p\rangle_{A(n)}}{\partial x_k\,\partial x_k} = -\frac{\partial^2 \langle u_m u_k\rangle_{A(n)}}{\partial x_m\,\partial x_k} \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \langle p\rangle_{A(n)}}{\partial l}\right)_w = \nu\left(\frac{\partial^2 \langle u_l\rangle_{A(n)}}{\partial l^2}\right)_w \tag{1.7}$$

По уравнению (1.6) можно найти $\langle p\rangle_{A(n)}$ в произвольной точке потока, в том числе и величину $\langle p_{n+1}\rangle_{A(n)}$, входящую в соотношение (1.3).

Как известно, решение уравнения (1.6) можно записать в виде суммы некоторых интегралов по заполненному жидкостью объему системы и по поверхности стенок. В частном случае неограниченного в пространстве потока решение упрощается. После подстановки его в формулу (1.3) получается следующее выражение для B_{qk}:

$$B_{qk} = \nu \lim_{\mathbf{x}_{n+1}\to\mathbf{x}_q} \frac{\partial^2 \langle u_{(n+1)k}\rangle_{A(n)}}{\partial x_{(n+1)m}\,\partial x_{(n+1)m}} - \\ - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_{qk}} \int_{\mathbf{x}_{n+1}} \frac{1}{r_{q,\,n+1}} \frac{\partial^2 \langle u_{(n+1)m}\,u_{(n+1)l}\rangle_{A(n)}}{\partial x_{(n+1)m}\,\partial x_{(n+1)l}}\, d\mathbf{x}_{n+1} \tag{1.8}$$

Здесь $r_{q,\,n+1}$ — расстояние между точкой q и точкой $n+1$, по координатам которой производится интегрирование

$$d\mathbf{x}_{n+1} = dx_{(n+1)1}\,dx_{(n+1)2}\,dx_{(n+1)3};$$

символ $\mathbf{x}_{n+1}$ под знаком интеграл обозначает интегрирование по всем координатам $n+1$-й точки от $-\infty$ до ∞.

2. Таким образом, для определения n-точечной плотности вероятности f_n с помощью уравнений (1.1) и (1.2) необходимо как-либо найти приближенные выражения для величин B_{qk}, зависящих от $n+1$-точечного распределения скоростей. При этом важно учитывать, что ряд свойств величин B_{qk} может быть строго установлен при знании только n-точечного распределения вероятностей скоростей f_n. Укажем эти свойства.

1. При удалении одной или нескольких точек (из выбранной совокупности n точек) от $n+1$-й точки на бесконечно большое расстояние (или на стенку, если поток ограничен) величины скорости и давления в $n+1$-й точке и в ее окрестности должны становиться статистически независимыми от скоростей в этих удаленных точках. В частности, при удалении только одной какой-либо точки α выражение (1.3) для B_{qk} приобретает вид

$$\lim_{|\mathbf{x}_\alpha|\to\infty} B_{qk} = \lim_{\mathbf{x}_{n+1}\to\mathbf{x}_q} \left\{ \nu \frac{\partial^2 \langle u_{(n+1)k}\rangle_{A^\alpha(n-1)}}{\partial x_{(n+1)m}\,\partial x_{(n+1)m}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle p_{n+1}\rangle_{A^\alpha(n-1)}}{\partial x_{(n+1)k}} \right\} \tag{2.1}$$

Здесь символ $|\mathbf{x}_\alpha| \to \infty$ в левой части означает, что точка α удаляется на бесконечность или на стенку; символ $A^\alpha(n-1)$ обозначает совокупность времени t и скоростей и координат во всех точках (из числа выбранных n точек) кроме точки α; угловые скобки — средние значения $u_{(n+1)k}$ и p_{n+1} при заданных аргументах $A^\alpha(n-1)$.

Правая часть соотношения (2.1) полностью определяется при знании только n-точечного распределения вероятностей скоростей (для всех точек, включая $n+1$-ю точку, но без точки α).

2. Если какие-либо две из выбранных точек сливаются (например, $\mathbf{x}_\alpha \to \mathbf{x}_\gamma$, где $\alpha, \gamma = 1, \ldots, n$), то выражение (1.3) для B_{qk} приобретает такой же вид, как и при удалении точки α на бесконечность или на стенку. Следовательно, и в этом случае B_{qk} полностью определяется при знании только n-точечного распределения вероятностей скоростей.

3. Если помножить B_{qk} на f_n и затем проинтегрировать по всем компонентам скорости $\mathbf{u}_\alpha$ (для любого $\alpha = 1, \ldots, n$), то из соотношения (1.3) получится

$$\int_{\mathbf{u}_\alpha} f_n B_{qk}\, d\mathbf{u}_\alpha = \\ = f_{n-1}(A^\alpha(n-1)) \lim_{\mathbf{x}_{n+1}\to\mathbf{x}_q} \left\{ \nu \frac{\partial^2 \langle u_{(n+1)k}\rangle_{A^\alpha(n-1)}}{\partial x_{(n+1)m}\,\partial x_{(n+1)m}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle p_{n+1}\rangle_{A^\alpha(n-1)}}{\partial x_{(n+1)k}} \right\} \tag{2.2}$$

Здесь функция $f_{n-1}(A^\alpha(n-1))$ представляет собой $(n-1)$-точечную плотность вероятности распределения скоростей, зависящую от аргументов $A^\alpha(n-1)$. (При получении соотношения (2.2) нужно учесть следующее: а) функцию f_n можно вносить под знак предела и под знаки дифференцирования в соотношении (1.3), так как $f_n(A(n))$ не зависит от $\mathbf{x}_{n+1}$;

б) можно изменять последовательность проведения интегрирования по $\mathbf{u}_\alpha$ и выполнения указанных в выражении (1.3) операций дифференцирования и затем вычисления предела, так как функция f_n очень быстро убывает с ростом $|\mathbf{u}_\alpha|$, и соответствующий несобственный интеграл по $\mathbf{u}_\alpha$ является правильно сходящимся;

в) из элементарных соотношений теории вероятностей следует, что

$$\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} \langle u_{(n+1)k}\rangle_{A(n)} f_n \, d\mathbf{u}_\alpha = f_{n-1}(A^\alpha(n-1)) \langle u_{(n+1)k}\rangle_{A^\alpha(n-1)}$$

Аналогичное выражение справедливо и для $\langle p_{n+1}\rangle_{A(n)}$.)

Правая часть в уравнении (2.2) определяется только n-точечным распределением вероятностей скоростей.

4. Для установления следующего свойства величины B_{qk} вычислим интеграл

$$\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} u_{\alpha l} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha l}} (f_n B_{qk}) \, d\mathbf{u}_\alpha \qquad (\alpha \neq q)$$

Подставим в этот интеграл B_{qk} из формулы (1.3) и учтем, что можно изменять последовательность выполнения дифференцирования по $x_{\alpha m}$ (при $\alpha \neq q,\ n+1$), интегрирования по $\mathbf{u}_\alpha$ и проведения указанных в правой части соотношения (1.3) операций. Получится

$$\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} u_{\alpha l} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha l}} (f_n B_{qk}) \, d\mathbf{u}_\alpha =$$

$$= \lim_{\mathbf{x}_{n+1}\to\mathbf{x}_q} \left\{ \nu \frac{\partial^2}{\partial x_{(n+1)m} \, \partial x_{(n+1)m}} \int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} u_{\alpha l} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha l}} [f_n \langle u_{(n+1)k}\rangle_{A(n)}] \, d\mathbf{u}_\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_{(n+1)k}} \int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} u_{\alpha l} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha l}} [f_n \langle p_{n+1}\rangle_{A(n)}] \, d\mathbf{u}_\alpha \right\} \tag{2.3}$$

Учитывая, что по определению

$$\langle u_{(n+1)k}\rangle_{A(n)} = \frac{1}{f_n} \int\limits_{\mathbf{u}_{n+1}} u_{(n+1)k} f_{n+1} \, d\mathbf{u}_{n+1}$$

проведем с первым интегралом в правой части соотношения (2.3) следующие преобразования:

$$\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} u_{\alpha l} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha l}} [f_n \langle u_{(n+1)k}\rangle_{A(n)}] \, d\mathbf{u}_\alpha = \int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} \left\{ u_{\alpha l} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha l}} \int\limits_{\mathbf{u}_{n+1}} u_{(n+1)k} f_{n+1} \, d\mathbf{u}_{n+1} \right\} d\mathbf{u}_\alpha =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{u}_{n+1}} \left\{ u_{(n+1)k} \int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} u_{\alpha l} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{\alpha l}} \, d\mathbf{u}_\alpha \right\} d\mathbf{u}_{n+1} = 0$$

так как согласно уравнению (1.1), записанному для f_{n+1}

$$\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} u_{\alpha l} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{\alpha l}} \, d\mathbf{u}_\alpha = 0$$

Следовательно, первый член в фигурных скобках в правой части соотношения (2.3) равен нулю.

Для вычисления второго члена в правой части уравнения (2.3) проведем предварительно некоторые вспомогательные преобразования.

Обозначим среднее значение компоненты скорости $u_{\alpha l}$ в точке α при заданных значениях всех аргументов $A^{\alpha}(n-1)$ и давления p_{n+1} в $n+1$-й точке символом $\langle u_{\alpha l}\rangle_{A^{\alpha}(n-1),\ p_{n+1}}$. Если осреднить уравнение неразрывности, записанное для точки α, при заданных значениях $A^{\alpha}(n-1)$ и p_{n+1}, то, очевидно, получится

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha l}}\langle u_{\alpha l}\rangle_{A^{\alpha}(n-1),\ p_{n+1}}=0 \tag{2.4}$$

Обозначим через W_{n+1} плотность вероятности различных значений скоростей в выбранных n точках и давления в $n+1$-й точке, $W_n(A^{\alpha}(n-1),p_{n+1})$ — плотность вероятности различных значений скоростей в тех же точках, кроме точки α, и давления в $n+1$-й точке. По определению величины $\langle u_{\alpha l}\rangle_{A^{\alpha}(n-1),\ p_{n+1}}$ для нее справедливо следующее выражение:

$$\langle u_{\alpha l}\rangle_{A^{\alpha}(n-1),\ p_{n+1}}=\frac{1}{W_n(A^{\alpha}(n-1),p_{n+1})}\int\limits_{\mathbf{u}_{\alpha}} u_{\alpha l}W_{n+1}\,d\mathbf{u}_{\alpha}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.4) и учитывая независимость $W_n(A^{\alpha}(n-1),p_{n+1})$ от $\mathbf{x}_{\alpha}$, получаем

$$\int\limits_{\mathbf{u}_{\alpha}} u_{\alpha l}\frac{\partial W_{n+1}}{\partial x_{\alpha l}}\,d\mathbf{u}_{\alpha}=0 \qquad (\alpha\neq n+1) \tag{2.5}$$

Вычислим теперь интеграл во втором члене в правой части соотношения (2.3). Учитывая, что по определению

$$\langle p_{n+1}\rangle_{A(n)}=\frac{1}{f_n}\int\limits_{p_{n+1}} p_{n+1}W_{n+1}\,dp_{n+1}$$

получим

$$\int\limits_{\mathbf{u}_{\alpha}} u_{\alpha l}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha l}}[f_n\langle p_{n+1}\rangle_{A(n)}]\,d\mathbf{u}_{\alpha}=\int\limits_{p_{n+1}}\left\{p_{n+1}\int\limits_{\mathbf{u}_{\alpha}} u_{\alpha l}\frac{\partial W_{n+1}}{\partial x_{\alpha l}}\,d\mathbf{u}_{\alpha}\right\}dp_{n+1}=0$$

так как входящий в правую часть этого выражения интеграл по $\mathbf{u}_{\alpha}$ согласно уравнению (2.5) равен нулю.

Таким образом, вся правая часть соотношения (2.3) равна нулю и, следовательно, величины B_{qk} удовлетворяют уравнениям

$$\int\limits_{\mathbf{u}_{\alpha}} u_{\alpha l}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha l}}(f_nB_{qk})\,d\mathbf{u}_{\alpha}=0 \qquad (\alpha\neq q) \tag{2.6}$$

Приведенные соотношения исчерпывают все сведения о величинах B_{qk}, которые можно получить, используя только общие свойства распределений случайных величин, соотношения (1.1) и (2.5), следующие из уравнения неразрывности, и предполагая известным n-точечное распределение вероятностей скоростей f_n.

3. Перейдем теперь к получению приближенных выражений для B_{qk}. С практической точки зрения обычно при расчете турбулентных потоков важно найти величины средних значений некоторых функций от скоростей в различных точках (например, одно- и многоточечные моменты поля скоростей и др.).

В связи с этим рассмотрим среднее значение какой-либо функции F от скоростей в n точках, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{|\mathbf{u}_q|\to\infty}\{f_n F\varphi\}=0, \qquad (q=1,\ldots,n) \tag{3.1}$$

Здесь φ — функция от скоростей в n точках и координат этих точек, изменяющаяся не быстрее, чем многочлены ограниченной (и притом невысокой) степени от компонент скоростей. В дальнейшем придется использовать условие (3.1), в которое в качестве функции φ будут входить либо просто величина u_{qk}, либо величина B_{qk} (зависящая согласно выражениям (1.3) или (1.8) от произведений скоростей в невысоких степенях), либо приближенное выражение для B_{qk}. Так как плотность вероятности f_n должна очень быстро убывать с ростом $|\mathbf{u}_q|$, то условие (3.1), по-видимому, должно выполняться для достаточно широкого класса функции F (во всяком случае для представляющих наибольший интерес произведений компонент скоростей в различных степенях).

Умножая уравнение (1.2) на F и интегрируя по скоростям во всех точках, получаем

$$\frac{\partial\langle F\rangle}{\partial t}=\sum_{q=1}^{n}\left\{-\frac{\partial\langle Fu_{qk}\rangle}{\partial x_{qk}}+\left\langle\frac{\partial F}{\partial u_{qk}}B_{qk}\right\rangle\right\} \tag{3.2}$$

При получении этого уравнения было проведено интегрирование по частям по u_{qk} и использовано условие (3.1). Угловыми скобками в уравнении (3.2) отмечены средние значения (математические ожидания) различных величин.

Обозначим через B'_{qk} какое-либо приближенное значение B_{qk} и через $(\partial\langle F\rangle / \partial t)'$ приближенное значение $\partial\langle F\rangle / \partial t$, определяемое соотношением (3.2) при замене в нем B_{qk} величиной B'_{qk} (но при заданной функции f_n).

Учитывая уравнение (3.2), проведем оценку абсолютной величины разности

$$\left|\frac{\partial\langle F\rangle}{\partial t}-\left(\frac{\partial\langle F\rangle}{\partial t}\right)'\right|\leqslant\sum_{q=1}^{n}\left|\left\langle\frac{\partial F}{\partial u_{qk}}(B_{qk}-B_{qk}')\right\rangle\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{q=1}^{n}\left\{\left(\left\langle\frac{\partial F}{\partial u_{qm}}\frac{\partial F}{\partial u_{qm}}\right\rangle\right)^{1/2}(\langle(B_{qk}-B_{qk}')(B_{qk}-B_{qk}')\rangle)^{1/2}\right\} \tag{3.3}$$

Таким образом, для любой заданной функции F наилучшая оценка точности расчета $\partial\langle F\rangle / \partial t$ получается согласно соотношению (3.3) при таких B_{qk}', для которых интеграл

$$\langle(B_{qk}-B_{qk}')(B_{qk}-B_{qk}')\rangle=\int_{\mathbf{u}}(B_{qk}-B_{qk}')(B_{qk}-B_{qk}')f_n\,d\mathbf{u} \tag{3.4}$$

имеет наименьшую величину. Однако далее придется минимизировать не этот интеграл, а интеграл

$$J_q=\int_{\mathbf{x}^{(q)}}\int_{\mathbf{u}}(B_{qk}-B_{qk}')(B_{qk}-B_{qk}')f_n\,d\mathbf{u}\,d\mathbf{x}^{(q)} \tag{3.5}$$

Здесь интегрирование проводится по скоростям во всех n точках (это отмечено символом $\mathbf{u}$ под знаком интеграла; произведение дифференциалов компонент всех скоростей обозначено $d\mathbf{u}$), а также по координатам всех точек, кроме точки q, по всей области течения жидкости (это отмечено символом $\mathbf{x}^{(q)}$ под знаком интеграла; произведение дифференциалов координат всех точек, кроме точки q, обозначено $d\mathbf{x}^{(q)}$).

Ясно, что минимум интеграла J_q соответствует близким к минимальным значениям интеграла (3.4) для большинства различных расположений рассматриваемых точек в потоке при фиксированном положении точки q.

Интеграл (3.5) введен вместо интеграла (3.4), так как иначе возникли бы трудности при определении функций B_{qk}', удовлетворяющих требованиям уравнения неразрывности.

Без введения каких-либо дополнительных условий задача об обращении в минимум интеграла J_q, конечно, не может ставиться, так как функции B_{qk} под знаком интеграла неизвестны (а если бы они были известны, то решение было бы тривиальным: $B_{qk}' = B_{qk}$). Однако если ограничить возможный вид функций B_{qk}', то можно поставить задачу об их определении из условия минимума интеграла J_q, учитывая указанные в п. 2 свойства функций B_{qk}. Наиболее общее выражение для B_{qk}', допускающее определение этой величины только с использованием известных свойств B_{qk} и без введения дополнительных гипотез, имеет следующий вид:

$$B_{qk}' = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_{qk}^{(\alpha)} + \sum_{\alpha \neq q} u_{\alpha m} \frac{\partial \lambda_{qk}^{(\alpha)}}{\partial x_{\alpha m}} \tag{3.6}$$

Здесь $\psi_{qk}^{(\alpha)}$ и $\lambda_{qk}^{(\alpha)}$ — любые функции от координат всех n точек, от времени (для нестационарного в среднем потока) и от скоростей во всех рассматриваемых точках, кроме точки α, т. е. функции от аргументов $A^{\alpha}(n-1)$ и $\mathbf{x}_\alpha$; символ $\alpha \neq q$ около второго знака суммы в выражении (3.6) означает, что суммирование проводится по всем $\alpha = 1, \ldots, n$, кроме $\alpha = q$.

До проведения дальнейших вычислений, имеющих целью получение уравнений для $\psi_{qk}^{(\alpha)}$ и $\lambda_{qk}^{(\alpha)}$, приведем некоторые соображения, позволяющие составить качественное представление о степени удовлетворительности аппроксимации функции B_{qk} выражением вида (3.6). Прежде всего заметим, что для тех частей области интегрирования по координатам какой-либо точки α в выражении (3.5), для которых $|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_q|$ велико (например, при удалении точки α от точки q, имеющей фиксированное положение, на бесконечность или на стенку), величина B_{qk} под знаком интеграла (3.5) становится известной и определяется по формуле (2.1).

Ясно, что для обеспечения минимума J_q должно быть в этих частях области интегрирования $B_{qk}' = B_{qk}$; при этом B_{qk} согласно формуле (2.1) не зависит от $\mathbf{u}_\alpha$. Следовательно, при удалении точки α от точки q функция $\psi_{qk}^{(\alpha)}$ в формуле (3.6) должна стремиться к величине, определяемой правой частью соотношения (2.1), а все остальные функции в выражении для B_{qk}' должны стремиться к нулю, т. е. должно быть

$$\lim_{|\mathbf{x}_\alpha| \to \infty} \psi_{qk}^{(\alpha)} = \lim_{\mathbf{x}_{n+1} \to \mathbf{x}_q} \left\{ \nu \frac{\partial^2 \langle u_{(n+1)\,k} \rangle_{A^{\alpha}(n-1)}}{\partial x_{(n+1)\,m}\, \partial x_{(n+1)\,m}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p_{n+1} \rangle_{A^{\alpha}(n-1)}}{\partial x_{(n+1)\,k}} \right\} \quad (\alpha \neq q)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}_\alpha| \to \infty} \psi_{qk}^{(\gamma)} = 0 \qquad (\gamma \neq \alpha)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}_\alpha| \to \infty} \frac{\partial}{\partial x_{rm}} \lambda_{qk}^{(r)} = 0 \qquad (r \neq q,\ m = 1, 2, 3).$$

Из последнего соотношения следует, что при $|\mathbf{x}_\alpha| \to \infty$ величина $\lambda_{qk}^{(r)} \to \mathrm{const}$, где const может быть выбрана произвольно, так как в формулу (3.6) функции $\lambda_{qk}^{(\alpha)}$ входят только под знаком производной.

Таким образом, установлено, что при $|\mathbf{x}_\alpha| \to \infty$ для любого $\alpha \neq q$ аппроксимация вида (3.6) для функции B_{qk} дает точное представление этой функции.

Аналогично можно установить также, что выражение (3.6) позволяет точно представить функцию B_{qk} в случае слияния каких-либо двух точек из числа рассматриваемых.

При произвольном расположении всех n точек можно было бы пытаться составить приближенное выражение для B_{qk}, исходя, например, из следующих соображений (частично интуитивного характера).

Величина B_{qk} зависит согласно соотношению (1.3) от средних значений скорости и давления в $n+1$-й точке, вычисляемых при заданных значениях скоростей в рассматриваемой группе n точек.

Исключим временно из рассмотрения одну из точек (например, точку α) и подставим в формулу (1.3) средние значения скорости и давления в $n+1$-й точке при заданных скоростях во всех точках, кроме точки α, т. е. величины $\langle u_{(n+1)k}\rangle_{A\alpha(n-1)}$ и $\langle p_{n+1}\rangle_{A\alpha(n-1)}$. Правая часть соотношения (1.3) при этом может быть определена при знании только n-точечного распределения вероятностей скоростей.

Проводя такие вычисления для случаев отбрасывания различных точек (т. е. для всех $\alpha = 1, \ldots, n$) и суммируя затем получающиеся при расчетах по формуле (1.3) результаты, взятые с подобранными каким-либо образом весовыми множителями можно попытаться получить приближенное выражение для B_{qk}. Ясно, что при суммировании с относительно большим весом должны браться результаты расчетов для тех случаев, когда отбрасывается точка α, расположенная от $n+1$-й точки дальше других точек. Следовательно весовые множители могут зависеть от координат всех точек.

Представляется весьма вероятным, что с помощью описанной процедуры можно было бы получить достаточно хорошее приближение для величины B_{qk}. В то же время получающееся при проведении указанных вычислений выражение для B_{qk}' соответствует только первому члену в правой части формулы (3.6). Следовательно, выражение вида (3.6) позволяет обеспечить более точную аппроксимацию для функции B_{qk}, чем это можно было бы сделать с помощью описанных выше построений.

Приведенные соображения позволяют надеяться, что выражение вида (3.6) может обеспечить достаточно удовлетворительную аппроксимацию для функции B_{qk}.

Перейдем теперь к определению функций $\psi_{qk}^{(\alpha)}$ и $\lambda_{qk}^{(\alpha)}$ из условия минимума интеграла J_q. Варьируя функцию B_{qk}' вида (3.6) в выражении (3.5) для J_q и приравнивая вариацию интеграла δJ_q нулю, получаем

$$\delta J_q = -2 \int\limits_{\mathbf{x}^{(q)}} \int\limits_{\mathbf{u}} (B_{qk} - B_{qk}') \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \delta\psi_{qk}^{(\alpha)} + \sum_{\alpha\neq q} u_{\alpha m} \frac{\partial \delta\lambda_{qk}^{(\alpha)}}{\partial x_{\alpha m}} \right\} f_n \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{x}^{(q)} = 0$$

Находя вторую вариацию и определяя ее знак, легко показать, что условие $\delta J_q = 0$ определяет минимум интеграла J_q.

Выражение для δJ_q представляет собой сумму нескольких интегралов, каждый из которых должен равняться нулю в силу независимости вариаций различных функций $\psi_{qk}^{(\alpha)}$ и $\lambda_{qk}^{(\alpha)}$, т. е. должно быть

$$\int\limits_{\mathbf{x}^{(q)}} \int\limits_{\mathbf{u}} (B_{qk} - B_{qk}') \delta\psi_{qk}^{(\alpha)} f_n \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{x}^{(q)} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{\mathbf{x}^{(q)}} \int\limits_{\mathbf{u}} (B_{qk} - B_{qk}') u_{\alpha m} \frac{\partial \delta\lambda_{qk}^{(\alpha)}}{\partial x_{\alpha m}} f_n \, d\mathbf{u} \, d\mathbf{x}^{(q)} = 0 \qquad (\alpha \neq q) \tag{3.8}$$

Так как $\psi_{qk}^{(\alpha)}$ не зависит от $\mathbf{u}_\alpha$, то из условия (3.7) получается

$$\int\limits_{\mathbf{x}^{(q)}} \int\limits_{\mathbf{u}^{(\alpha)}} \left\{ \delta\psi_{qk}^{(\alpha)} \int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} (B_{qk} - B_{qk}') f_n \, d\mathbf{u}_\alpha \right\} d\mathbf{u}^{(\alpha)} \, d\mathbf{x}^{(q)} = 0$$

где символ $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ отмечает интегрирование по скоростям во всех точках, кроме точки α. Отсюда следует, что должно быть

$$\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} (B_{qk} - B_{qk}') f_r \, d\mathbf{u}_\alpha = \int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} B_{qk} f_n \, d\mathbf{u}_\alpha - \int\limits_{\mathbf{u}_\alpha} B_{qk}' f_n \, d\mathbf{u}_\alpha = 0 \; {\scriptstyle (\alpha=1,\ldots,n)} \tag{3.9}$$

Интегралы в правой части (3.9) будем обозначать соответственно через I_1 и I_2.

Хотя величина B_{qk} неизвестна, но входящий в (3.9) интеграл I_1 известен; он определяется формулой (2.2). Учитывая это, а также подставляя вместо B_{qk}' выражение (3.6) для этой функции, получаем

$$\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha}\left\{\sum_{\gamma=1}^{n}\psi_{qk}{}^{(\gamma)}+\sum_{\gamma\neq q}u_{\gamma m}\frac{\partial\lambda_{qk}{}^{(\gamma)}}{\partial x_{\gamma m}}\right\}f_n\,d\mathbf{u}_\alpha= \tag{3.10}$$

$$=f_{n-1}(A^\alpha(n-1))\lim_{\mathbf{x}_{n+1}\to\mathbf{x}_q}\left\{\nu\frac{\partial^2\langle u_{(n+1)k}\rangle_{A^\alpha(n-1)}}{\partial x_{(n+1)m}\,\partial x_{(n+1)m}}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\langle p_{n+1}\rangle_{A^\alpha(n-1)}}{\partial x_{(n+1)k}}\right\}$$

$$(\alpha=1,\ \ldots,\ n)$$

Проинтегрируем условие (3.8) по частям по координате $x_{\alpha m}$, учитывая при этом, что

$$\lim_{|x_\alpha|\to\infty}(B_{qk}-B_{qk}')=0$$

в результате получим

$$\int\limits_{\mathbf{x}^{(q)}}\int\limits_{\mathbf{u}}(B_{qk}-B_{qk}')\,u_{\alpha m}\frac{\partial\delta\lambda_{qk}{}^{(\alpha)}}{\partial x_{\alpha m}}f_n\,d\mathbf{u}\,d\mathbf{x}^{(q)}=$$

$$=-\int\limits_{\mathbf{x}^{(q)}}\int\limits_{\mathbf{u}}\delta\lambda_{qk}{}^{(\alpha)}u_{\alpha m}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha m}}\{f_n(B_{qk}-B_{qk}')\}\,d\mathbf{u}\,d\mathbf{x}^{(q)}=$$

$$=-\int\limits_{\mathbf{x}^{(q)}}\int\limits_{\mathbf{u}^{(\alpha)}}\left\{\delta\lambda_{qk}{}^{(\alpha)}\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha}u_{\alpha m}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha m}}[f_n(B_{qk}-B_{qk}')]\,d\mathbf{u}_\alpha\right\}d\mathbf{u}^{(\alpha)}\,d\mathbf{x}^{(q)}=0\qquad(\alpha\neq q)$$

Отсюда следует, что должно быть

$$\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha}u_{\alpha m}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha m}}[f_n(B_{qk}-B_{qk}')]\,d\mathbf{u}_\alpha=0\quad(\alpha\neq q)$$

Подставляя в это соотношение выражение (3.6) для B_{qk}' и учитывая, что B_{qk} удовлетворяет уравнению (2.6), получим

$$\int\limits_{\mathbf{u}_\alpha}u_{\alpha m}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha m}}\left\{f_n\left[\sum_{\gamma=1}^{n}\psi_{qk}^{(\gamma)}+\sum_{\gamma\neq q}u_{\gamma r}\frac{\partial\lambda_{qk}^{(\gamma)}}{\partial x_{\gamma r}}\right]\right\}d\mathbf{u}_\alpha=0\quad(\alpha\neq q)\tag{3.11}$$

Таким образом, входящие в формулу (3.6) для B_{qk}' функции $\psi_{qk}^{(\alpha)}$ и $\lambda_{qk}^{(\alpha)}$ должны определяться из уравнений (3.10) и (3.11).

Условия существования и единственности решения уравнений, определяющих B_{qk}', здесь не рассматриваются, предполагается, что эти условия выполняются. Заметим только, что если решение существует, и оно единственно, то B_{qk}' — действительная величина. Действительно, если бы величина B_{qk}' была комплексной, т. е. имела бы вид $M_{qk}+iN_{qk}$ (где M_{qk} и N_{qk} — действительные величины), то функция M_{qk} должна была бы удовлетворять тем же уравнениям (3.10) и (3.11), что и B_{qk}' (а N_{qk} — соответствующим однородным уравнениям); однако это противоречит исходному предположению о единственности решения.

В заключение данного пункта обратим внимание на то, что уравнения (3.10) и (3.11) совпадают с соотношениями (2.2) и (2.6), если в них вместо B_{qk} подставить величину B_{qk}', определяемую выражением вида (3.6). Следовательно, при определении B_{qk}' можно было бы не пользоваться условием минимума интеграла J_q, а просто потребовать, чтобы величина B_{qk}' (вида (3.6)) удовлетворяла тем же соотношениям (2.2) и (2.6), которые справедливы для B_{qk}. Однако существенно, что при определении B_{qk}' с помощью уравнений (3.10) и (3.11) обеспечивается минимум интеграла J_q (для функций B_{qk}' вида (3.6)), и тем самым достигается наилучшая (в указанном выше смысле) оценка для точности решения задачи.

4. Укажем ряд важных особенностей уравнения

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = -\sum_{q=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{qk}}(f_n u_{qk}) + \frac{\partial}{\partial u_{qk}}(f_n B_{qk}')\right\} \tag{4.1}$$

получающегося из уравнения (1.2) при подстановке в него величины B_{qk}' вместо точной функции B_{qk}'.

1. Плотность вероятности f_n, рассчитываемая по уравнению (4.1), удовлетворяет в любой момент времени t соотношениям (1.1) (т. е. требованиям уравнения неразрывности), если начальные значения f_n (при $t=0$) удовлетворяют этим соотношениям.

Для подтверждения справедливости этого утверждения необходимо, очевидно, доказать, что если функция f_n в некоторый момент времени t удовлетворяет уравнениям (1.1), то

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbf{u}_q} u_{qm}\frac{\partial f_n}{\partial x_{qm}}\,d\mathbf{u}_q = \int\limits_{\mathbf{u}_q} u_{qm}\frac{\partial}{\partial x_{qm}}\left(\frac{\partial f_n}{\partial t}\right) d\mathbf{u}_q = 0 \quad (q=1,\ldots,n) \tag{4.2}$$

Подставляя сюда $\partial f_n / \partial t$ из уравнения (4.1) и проводя простые преобразования, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbf{u}_q} u_{qm}\frac{\partial f_n}{\partial x_{qm}}\,d\mathbf{u}_q = -\sum_{\alpha\neq q}\left\{ u_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha k}}\int\limits_{\mathbf{u}_q} u_{qm}\frac{\partial f_n}{\partial x_{qm}}\,d\mathbf{u}_q + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial u_{\alpha k}}\int\limits_{\mathbf{u}_q} u_{qm}\frac{\partial}{\partial x_{qm}}(f_n B_{\alpha k}')\,d\mathbf{u}_q\right\} - \frac{\partial^2}{\partial x_{qm}\partial x_{qk}}\int\limits_{\mathbf{u}_q} u_{qm}u_{qk}f_n\,d\mathbf{u}_q - \tag{4.3}$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_{qm}}\int\limits_{\mathbf{u}_q} u_{qm}\frac{\partial}{\partial u_{qk}}(f_n B_{qk}')\,d\mathbf{u}_q$$

Первый член в фигурных скобках в правой части уравнения (4.3) равен нулю, так как f_n удовлетворяет соотношениям (1.1). Второй член в этих скобках равен нулю, так как величина $B_{\alpha k}'$ удовлетворяет уравнению вида (2.6) (т. е., что то же самое, уравнению (3.11)).

Последний член в правой части уравнения (4.3) можно преобразовать путем интегрирования по частям по u_{qm}. Учитывая условие (3.1), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_{qm}}\int\limits_{\mathbf{u}_q} u_{qm}\frac{\partial}{\partial u_{qk}}(f_n B_{qk}')\,d\mathbf{u}_q = -\frac{\partial}{\partial x_{qm}}\int\limits_{\mathbf{u}_q} f_n B_{qm}'\,d\mathbf{u}_q$$

Стоящий здесь в правой части интеграл определяется соотношением (3.10), если в нем положить $\alpha = q$ (или, что то же самое, соотношением (2.2), если в нем заменить B_{qk} величиной B_{qk}' и принять $\alpha = q$). Учитывая это, а также используя уравнение неразрывности, можно привести сумму последних двух членов правой части уравнения (4.3) к виду

$$-f_{n-1}(A^q(n-1))\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_{qm}\,\partial x_{qk}}\langle u_{qm}u_{qk}\rangle_{A^q(n-1)} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x_{qm}\partial x_{qm}}\langle p_q\rangle_{A^q(n-1)}\right\}$$

Стоящая здесь в фигурных скобках величина согласно уравнению (1.4) равна нулю.

Таким образом, вся правая часть соотношения (4.3) равна нулю, и, следовательно, доказана справедливость утверждения, приведенного в начале этого пункта.

2. Функция f_n, определяемая по уравнению (4.1), удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{\mathbf{u}} f_n\, d\mathbf{u} = 1$$

в любой момент времени t, если эта функция нормирована при $t = 0$.

Чтобы это свойство функции f_n соблюдалось, необходимо

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{u}} f_n\, d\mathbf{u} = \int_{\mathbf{u}} \frac{\partial f_n}{\partial t}\, d\mathbf{u} = 0 \tag{4.4}$$

Подставляя сюда $\partial f_n / \partial t$ из уравнения (4.1), получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{u}} f_n\, d\mathbf{u} = -\sum_{q=1}^{n}\left\{\int_{\mathbf{u}} u_{qk}\frac{\partial f_n}{\partial x_{qk}}\, d\mathbf{u} + \int_{\mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial u_{qk}}(f_n B_{qk}')\, d\mathbf{u}\right\}$$

Первый член в фигурных скобках в этом уравнении равен нулю, так как f_n удовлетворяет уравнениям (1.1); второй член в этих же скобках равен нулю, так как при интегрировании по u_{qk} в этом члене получается величина $|f_n B_{qk}'|_{u_{qk}=-\infty}^{\infty}$, равная нулю согласно условию (3.1). Таким образом, условие (4.4) выполняется, и функция f_n сохраняет нормировку при любых t.

3. Функция f_n, определяемая по уравнению (4.1), является действительной неотрицательной величиной. Это свойство f_n можно установить, например, с помощью следующих рассуждений:

неотрицательную величину f_n можно представить в виде

$$f_n = \psi_n \bar{\psi}_n \tag{4.5}$$

где ψ_n и $\bar{\psi}_n$ — комплексно-сопряженные величины.

Легко проверить, что уравнение (4.1) эквивалентно следующему уравнению для ψ_n:

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = -\sum_{q=1}^{n}\left\{u_{qk}\frac{\partial \psi_n}{\partial x_{qk}} + \frac{\psi_n}{2}\frac{\partial B_{qk}'}{\partial u_{qk}} + B_{qk}'\frac{\partial \psi_n}{\partial u_{qk}}\right\} + i\psi_n F \tag{4.6}$$

где F — произвольная действительная функция [1].

Таким образом, вместо вычислений f_n по уравнению (4.1) можно вычислять ψ_n по уравнению (4.6), а затем определять f_n по формуле (4.5). Ясно, что при таком вычислении может получиться только действительная неотрицательная величина f_n.

Заметим, что единственное свойство величины B_{qk}', которое использовалось при выполнении этого доказательства неотрицательности f_n, состоит в том, что B_{qk}' должно быть действительной величиной (иначе уравне-

---

[1] Если умножить уравнение (4.6) на $\bar{\psi}_n$, затем уравнение, комплексно-сопряженное с (4.6), умножить на ψ_n и сложить полученные соотношения, то получится уравнение (4.1).

ния (4.1) и (4.6) не будут эквивалентны). Как указывалось выше (в п. 3) это свойство B_{qk}' вытекает из принятого (без доказательства) предположения о существовании и единственности решения уравнений для B_{qk}'.

Таким образом, определяемая по уравнению (4.1) функция f_n обладает необходимыми свойствами плотности вероятностей n-точечного распределения скоростей: эта функция в любой момент времени t действительна, неотрицательна, должным образом нормирована и удовлетворяет требованиям уравнения неразрывности (если при $t = 0$ задается функция $f_n = (f_n)_0$, удовлетворяющая этим условиям). Такими же свойствами должна обладать рассчитываемая с использованием уравнения (4.1) функция f_n для стационарных (в среднем) турбулентных потоков; это следует из того, что любой устойчивый (в среднем) стационарный режим можно рассматривать как предел решения с помощью уравнения (4.1) нестационарной задачи со стационарными граничными условиями.

4. Уравнение (4.1) переходит в точное уравнение для f_{n-1}, если его проинтегрировать по всем компонентам скорости в любой точке q (из числа рассматриваемых n точек).

В справедливости этого утверждения легко убедиться, если при интегрировании уравнения (4.1) по $\mathbf{u}_q$ учесть соотношения (1.1), (3.1) и (3.10).

5. Из приближенного уравнения (4.1) можно получить точные уравнения Фридмана — Келлера для всех m-точечных моментов, где $m \leqslant n$.

Докажем это утверждение.

Выберем не более чем одну компоненту скорости в каждой из рассматриваемых точек потока и составим их произведение; обозначим его F. Для среднего значения $\langle F \rangle$ получится уравнение вида уравнения (3.2) (это и есть одно из уравнений Фридмана — Келлера — уравнения для момента $\langle F \rangle$), в котором только в последнем члене величина B_{qk} должна быть заменена величиной B_{qk}', т. е. этот последний член должен быть записан в виде

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u_{qk}} B_{qk}' \right\rangle = \int\limits_{\mathbf{u}} \frac{\partial F}{\partial u_{qk}} B_{qk}' f_n \, d\mathbf{u} \tag{4.7}$$

Величина $\partial F / \partial u_{qk}$ не зависит от скорости в точке q, так как функция F — это произведение компонент скоростей, в которое скорость в каждой точке входит не более чем один раз. В связи с этим в правой части соотношения (4.7) можно произвести вначале интегрирование по $\mathbf{u}_q$, вынеся $\partial F / \partial u_{qk}$ из-под знака соответствующего интеграла. Но согласно уравнению (3.9) интеграл I_2 равен интегралу I_1. Следовательно, в правой части соотношения (4.7) величину B_{qk}' можно заменить точной величиной B_{qk}. Таким образом из уравнения (4.1) получаем точные уравнения Фридмана — Келлера вида (3.2).

Используя при вычислении правой части соотношения (4.7) вместо I_1 выражение (2.2) для этого интеграла (при $\alpha = q$), можно привести уравнения Фридмана — Келлера к обычному виду.

Полученные в этом разделе результаты позволяют рассмотреть с новой точки зрения принятый метод определения величин B_{qk}': для того чтобы приближенное уравнение (4.1) обладало указанными выше свойствами, величины B_{qk}' (какие бы выражения для них ни использовались) должны удовлетворять соотношениям (2.2) и (2.6), справедливым для точных величин B_{qk}; при использовании для B_{qk}' выражения вида (3.6) эти соотношения превращаются в уравнения (3.10) и (3.11), определяющие функции $\varphi_{qk}^{(\alpha)}$ и $\lambda_{qk}^{(\alpha)}$; при этом одновременно достигается минимум интеграла (3.5) для функций B_{qk}' вида (3.6).

5. Расчеты характеристик турбулентности для различных частных случаев с помощью полученной выше системы уравнений представляют собой самостоятельную весьма сложную проблему, выходящую за рамки данной статьи. Поэтому ограничимся приведением только нескольких общих соображений по поводу возможных подходов к решению этой задачи.

Вычисления можно реально пытаться проводить, конечно, только для небольших n. Уравнения для $n = 1$ рассматривать не имеет смысла, так как значительная часть физически важной информации о турбулентности зависит от двухточечных распределений (распределение энергии по спектру, масштабы турбулентности и пр.). Приведенные выше данные по свойствам уравнения (4.1) и физическая прозрачность использованного метода приближенного «замыкания» системы уравнений теории турбулентности позволяют надеяться, что теория для ряда задач может оказаться достаточно точной уже при $n = 2$.

Для численного решения задачи об определении f_n (и, в первую очередь, f_2) необходимо использовать какой-либо вариант вариационного метода, т. е. искомые функции должны представляться в виде некоторых выражений, содержащих достаточно большое число параметров, определяемых из условия получения наилучшей аппроксимации точного решения. Любая разновидность метода сеток для расчетов f_n представляется неприемлемой, так как f_n зависит от большого числа аргументов, часть из которых (или даже все) изменяются в бесконечных пределах. В то же время вид аппроксимирующих выражений для f_n может быть, по-видимому, выбран без больших затруднений: можно, например, взять за основу n-точечное нормальное распределение скоростей и внести в него искажающие члены, которые содержат варьируемые параметры.

В связи с этим заметим, что часто вносят (для других задач) такое искажение, умножая плотность вероятности нормального распределения на полином какой-либо степени. При такой аппроксимации f_n варьируемыми параметрами оказываются моменты различного порядка. Получающаяся для них система уравнений может, в частности (при определенной аппроксимации f_n), совпадать с известными уравнениями для моментов, замыкаемыми с помощью предположения о равенстве нулю семиинвариантов четвертого или более высокого порядка (см. эти уравнения, например, в [4]). Однако, при представлении f_n в виде произведения нормального распределения на полином не выполняется условие неотрицательности f_n, поэтому в общем случае такая аппроксимация f_n вряд ли пригодна (хотя, возможно, для некоторых задач она может использоваться).

Поступило 10 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Hopf E. Statistical Gydromechanics and functional calculus. J. Rational Mech. Analysis, 1952, vol. 1, No. 1.
2. Монин А. С. Уравнения для конечномерных распределений вероятности поля турбулентности. Докл. СССР, 1967, т. 177, № 5.
3. Новиков Е. А. Кинетические уравнения для поля вихря. Докл. СССР, 1967, т. 177, № 2.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.