# О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СТОКСОВОЙ ЧАСТИЦЫ СО СЛУЧАЙНЫМ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОЛЕМ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. А. БУЕВИЧ

(*Москва*)

Движение взвешенных частиц в турбулизованной жидкости и их влияние на диссипацию энергии и уровень развития турбулентности представляет значительный интерес для многих приложений и потому ранее интенсивно исследовалось (см., например, [1–7]). Однако, насколько известно автору, все такие исследования ограничены рассмотрением поведения лишь достаточно мелких частиц, размеры которых намного ниже внутреннего (колмогоровского) масштаба турбулентности. В этом случае оказывается возможным пренебречь зависимостью случайной скорости жидкости вблизи частиц от координат, т. е. фактически рассматривать обтекание частицы однородным нестационарным потоком, используя при этом известное выражение для силы взаимодействия частицы с таким потоком [1, 8].

В общем случае в течении имеются вихри, размеры которых сравнимы или меньше размеров частиц. По-видимому, именно взаимодействие с такими вихрями обусловливает то исключительно сильное влияние, которое взвешенные частицы способны оказывать в ряде случаев на турбулентность даже при весьма ничтожной концентрации их в потоке. Изучение этого влияния тормозится отсутствием каких-либо представлений для силы взаимодействия частицы с достаточно мелкими вихрями.

Случайную невозмущенную скорость жидкости можно представить в виде стохастического интеграла Фурье — Стильтьеса

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \int e^{i(\omega t + \mathbf{kr})} d\mathbf{Z}$$

причем из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости следует, что волновой вектор $\mathbf{k}$ ортогонален к спектральной мере $d\mathbf{Z}$. Рассматривая, как обычно, задачу обтекания частицы в безынерционном приближении, видим, что ввиду линейности задача сводится к исследованию взаимодействия частицы с единственной волной в интеграле Фурье — Стильтьеса. Приближенное решение последней задачи, совершенно необходимое для дальнейшего изучения влияния частиц на турбулентность жидкости, и рассматривается в предлагаемой работе.

Пусть невозмущенное течение жидкости в окрестности частицы в системе координат, связанной с частицей, имеет вид

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t + \mathbf{kr})}, \qquad \mathbf{u}_0\mathbf{k} = 0 \tag{1}$$

Направим ось $y$ вдоль вектора $\mathbf{u}_0$, а ось $z$ — вдоль вектора $\mathbf{k}$ и обычным образом введем сферические координаты $r$, $\theta$, $\varphi$. Строго говоря, течение (1) само по себе невозможно, но это обстоятельство несущественно, если вспомнить, что (1) представляет собой лишь одну из составляющих истинного поля скорости.

Уравнения движения в приближении Стокса имеют вид

$$\rho\partial\mathbf{u}' / \partial t = -\operatorname{grad} p' + \mu\Delta\mathbf{u}', \qquad \operatorname{div}\mathbf{u}' = 0 \tag{2}$$

Естественно искать $\mathbf{u}' = \mathbf{U}e^{i\omega t}$, $\mathbf{U} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — новый неизвестный вектор. Тогда второе уравнение (2) удовлетворяется тождественно, а из первого имеем после применения к нему оператора ротора следующее уравнение:

$$\Delta(\Delta + \varkappa^2)\mathbf{A} = 0, \quad \varkappa = \frac{1-i}{\delta}, \quad \delta = \left(\frac{2\nu}{\omega}\right)^{1/2}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{3}$$

Общее решение уравнения (3), достаточное для целей работы и удовлетворяющее очевидным условиям на бесконечности, имеет вид

$$A_x = \sum_n X_n(r) P_n(\cos\theta) = A, \quad A_y = 0, \quad A_z = \cos\varphi \sin\theta \sum_n Z_n(r) \times$$

$$\times \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\cos\theta} = \cos\varphi B$$

$$X_n(r) = a_n'\alpha_n(r) + b_n'\beta_n(r), \quad Z_n(r) = c_n'\alpha_n(r) + d_n'\beta_n(r) \tag{4}$$

$$\alpha_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} H^{(2)}_{n+1/2}(\varkappa r), \quad \beta_n(r) = \frac{1}{r^n}[H^{(1)}_{n+1/2}(\varkappa r) H^{(2)}_{n-1/2}(\varkappa r) -$$

$$- H^{(1)}_{n-1/2}(\varkappa r) H^{(2)}_{n+1/2}(\varkappa r)]$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, а $H_j^{(i)}(x)$ — функции Ганкеля. Фактически (4) представляет собой более удобную запись известного решения Лэмба [9]. Компоненты вектора $\mathbf{U}$ выражаются в форме

$$U_r = -\frac{\sin\varphi}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial\theta} + B\right), \quad U_\theta = \sin\varphi\left(r\frac{\partial A}{\partial r} - \operatorname{ctg}\theta B\right)$$

$$U_\varphi = \frac{\cos\varphi}{r}\left[-\sin\theta\left(r\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial\theta}\right) + \cos\theta\left(r\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial\theta}\right)\right] \tag{5}$$

Возмущение давления $p'$ может быть найдено из соотношения

$$\operatorname{grad} p' = \mu \operatorname{rot}(\Delta + \varkappa^2)\mathbf{A} \tag{6}$$

Представляя

$$(\Delta + \varkappa^2) A_x = \sum_n x_n(r) P_n(\cos\theta)$$

$$(\Delta + \varkappa^2) A_z = \sum_n^n z_n(r) \cos\varphi \sin\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}$$

$$\begin{Bmatrix} x_n(r) \\ z_n(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_n' \\ d_n' \end{Bmatrix} \left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{n(n+1)}{r^2} + \varkappa^2\right] \beta_n(r)$$

и требуя, чтобы вектор в правой части (6) на самом деле был градиентом некоторой скалярной функции, получаем следующее уравнение:

$$\sum_n \left\{ -\frac{d}{dr}\left(r\frac{dx_n}{dr}\right) P_n(\cos\theta) + \left(\frac{dz_n}{dr} - \frac{z_n}{r} + \frac{x_n}{r}\right)\cos\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\cos\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{z_n - x_n}{r}(1 - \cos^2\theta)\frac{d^2 P_n(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^2} \right\} = 0 \tag{7}$$

которому должны удовлетворять функции $x_n(r)$ и $z_n(r)$ в (6). Используя (5), из граничных условий прилипания на поверхности сферической частицы радиуса $R$ получаем соотношения

$$\sum_n (Z_n - X_n)_{r=R} \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\cos\theta} = u_0 R \sum_n t_n \cos^n\theta \tag{8}$$

$$\sum_n \left[-r\frac{dX_n}{dr} P_n(\cos\theta) + Z_n \cos\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}\right]_{r=R} = u_0 R \sum_n t_n \cos^{n+1}\theta$$

$$\sum_n \left[\left(-r\frac{dZ_n}{dr}+X_n\right)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}+Z_n\cos\theta\frac{d^2P_n(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^2}\right]_{r=R}=$$

$$=-u_0R\sum_n t_n\cos^n\theta$$

Здесь $t_n$ — коэффициенты разложения функции $e^{ikRx}$ по степеням $x$.

Можно показать, что уравнения (7), (8) единственным образом определяют все постоянные в (4). Однако их конкретное вычисление в случаях, когда ряды в правых частях (8) не обрываются на каком-либо малом $n$, представляет собой значительные трудности. Имея в виду получение приближенных выражений для силы и момента, действующих на частицу, аппроксимируем поэтому функцию $e^{ikRx}$ в граничных условиях (8) набором парабол. Например, на участке $0\leqslant kRx\leqslant {}^1\!/_2\pi$ имеем

$$e^{ikRx}\approx 1-\left(\frac{2}{\pi}kRx\right)^2+i\left[\frac{4}{\pi}kRx-\left(\frac{2}{\pi}kRx\right)^2\right] \tag{9}$$

Такая аппроксимация сохраняет непрерывность $e^{ikRx}$ и ее первой производной, но вторая производная терпит разрыв в точках $kRx=\pm{}^1\!/_2n\pi$.

Заметим далее, что для вычисления силы и момента нет необходимости решать задачу при произвольных $\omega$, когда выкладки оказываются весьма громоздкими. Действительно, согласно (4) — (6) искомые сила и момент могут быть представлены как некоторые полиномы по положительным степеням $\sqrt{\omega}$ (или отрицательным степеням «глубины проникновения» $\delta$). Оказывается, что нулевые по $\sqrt{\omega}$ члены в этих полиномах могут быть получены из рассмотрения предельного случая $\omega=0$, а все остальные члены — из рассмотрения асимптотики $|\varkappa R|\gg 1$.

1. *Стационарное обтекание* ($\omega=0$). В этом случае из (4) — (6) имеем выражения

$$\begin{Bmatrix}X_n(r)\\ Z_n(r)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}a_n\\ c_n\end{Bmatrix}\frac{1}{r^{n+1}}+\begin{Bmatrix}b_n\\ d_n\end{Bmatrix}\frac{1}{r^{n-1}}$$

$$\begin{Bmatrix}x_n(r)\\ z_n(r)\end{Bmatrix}=-2(2n-1)\begin{Bmatrix}b_n\\ d_n\end{Bmatrix}\frac{1}{r^{n+1}}$$

Решение уравнений (7) и (8) дает соотношения для постоянных

$$\begin{aligned}
&a_0={}^2\!/_9R^2t, \quad b_0=0, \quad a_1={}^1\!/_4R^3t_0+{}^{11}\!/_{60}R^3t_2\\
&c_1=-{}^1\!/_4R^3t_0-{}^7\!/_{60}R^3t_2, \quad b_1=-d_1=-{}^3\!/_4Rt_0-{}^1\!/_4Rt_2\\
&a_2={}^1\!/_3R^4t_1, \quad c_2=-{}^1\!/_6R^4t_1, \quad b_2=-{}^5\!/_9R^2t_1, \quad d_2={}^5\!/_{18}R^2t_1\\
&a_3={}^1\!/_4R^5t_2, \quad c_3=-{}^1\!/_{12}R^5t_2, \quad b_3=-{}^7\!/_{20}R^3t_2, \quad d_3={}^7\!/_{60}R^3t_2
\end{aligned}$$

Скорость жидкости и возмущение давления в ней представляются в виде

$$\begin{aligned}(u+u')_r=u_0\sin\varphi\sin\theta\Bigg\{&t_0-\left(\frac{3}{2}t_0+\frac{1}{2}t_2\right)\frac{R}{r}+\left(\frac{1}{2}t_0+t_2\right)\left(\frac{R}{r}\right)^3-\\
&-\frac{1}{2}t_2\left(\frac{R}{r}\right)^5+\cos\theta\left[\frac{r}{R}-\frac{5}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]t_1+\\
&+\cos^2\theta\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2-\frac{7}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3+\frac{5}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^5\right]t_2\Bigg\}\end{aligned}$$

$$(u+u')_\theta = u_0 \sin\varphi \left\{ -\frac{1}{2} t_1 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} t_1 \left(\frac{R}{r}\right)^4 + \right.$$

$$+ \cos\theta \left[ t_0 - \left(\frac{3}{4} t_0 + \frac{1}{4} t_2\right)\frac{R}{r} - \left(\frac{1}{4} t_0 + \frac{9}{8} t_2\right)\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{11}{8} t_2 \left(\frac{R}{r}\right)^5 \right] +$$

$$\left. + \cos^2\theta \left[\frac{r}{R} - \left(\frac{R}{r}\right)^4\right] t_1 + \cos^3\theta \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{7}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^3 - \frac{15}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^5\right] t_2 \right\}$$

$$(u+u')_\varphi = u_0 \cos\varphi \left\{ t_0 - \left(\frac{3}{4} t_0 + \frac{1}{4} t_2\right)\frac{R}{r} + \left(-\frac{1}{4} t_0 + \frac{1}{8} t_2\right)\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \right.$$

$$+ \frac{1}{8} t_2 \left(\frac{R}{r}\right)^5 + \cos\theta \left[\frac{r}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4\right] t_1 +$$

$$\left. + \cos^2\theta \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{3}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^3 - \frac{5}{8}\left(\frac{R}{r}\right)^5\right] t_2 \right\}$$

$$p' = -\mu u_0 \frac{\sin\varphi \sin\theta}{r} \left[ \left(\frac{3}{2} t_0 + \frac{1}{2} t_2\right)\frac{R}{r} - \frac{7}{4} t_2 \left(\frac{R}{r}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + 5 t_1 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta + \frac{35}{4} t_2 \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos^2\theta \right]$$

Отсюда для отличных от нуля компонент силы и момента имеем

$$F_y = \pi\mu R u_0 \int_{-1}^{1} [3t_0 - 2t_2 + 8t_1\xi + 13 t_2 \xi^2]\, d\xi, \qquad \xi = \cos\theta$$

$$M_x = -\pi\mu R^2 u_0 \int_{-1}^{1} [-t_1 + (3t_0 - 4t_2)\xi + 9t_1\xi^2 + 15 t_2 \xi^3]\, d\xi \tag{10}$$

Если $t_j$ не терпят разрывов на поверхности сферы, получим

$$F_y = \pi\mu R (6t_0 + {}^{14}/_{3} t_2) u_0, \qquad M_x = -4\pi\mu R^2 t_1 u_0$$

Отметим, что в этих выражениях не учитывается сила, действующая на частицу со стороны невозмущенного давления в жидкости. Для потока Пуазейля в круглой трубе (когда скорость зависит от обеих поперечных координат) коэффициент при $t_2$ в выражении для $F_y$ должен быть, очевидно, удвоен. Если учесть также силу, действующую на частицу со стороны невозмущенного давления в потоке Пуазейля в круглой трубе, получим выражение

$$F_y = \pi\mu R (6t_0 + 4t_2) u_0$$

совпадающее с формулой Симхи, использованной, например, в [10]. Заметим, что выражая $t_1$ через скорость сдвига, приходим также к известному соотношению для $M_x$ в однородном сдвиговом потоке.

2. *Асимптотика* $|\varkappa R| \gg 1$. Из (4) — (6) имеем в этом случае

$$\begin{Bmatrix} X_n(r) \\ Z_n(r) \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} a_n \\ c_n \end{Bmatrix} \frac{e^{-sr}}{r} + \begin{Bmatrix} b_n \\ d_n \end{Bmatrix} \frac{1}{r^{n+1}}$$

$$\begin{Bmatrix} x_n(r) \\ z_n(r) \end{Bmatrix} \approx -s^2 \begin{Bmatrix} b_n \\ d_n \end{Bmatrix} \frac{1}{r^{n+1}}, \qquad s = i\varkappa$$

Входящие сюда постоянные с точностью до членов $\sim |\varkappa R|^{-1}$ равны

$$a_0 = \frac{2}{9} \frac{e^{sR}}{s} R t_1, \qquad b_0 = 0, \qquad a_1 = \left(\frac{3}{2} R t_0 + \frac{3}{5} R t_2\right) \frac{e^{sR}}{s}$$

$$c_1 = -\left(\frac{3}{2} R t_0 + \frac{2}{5} R t_2\right) \frac{e^{sR}}{s},$$

$$b_1 = -d_1 = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{sR}\right)R^3 t_0 - \frac{1}{10}\left(1+\frac{5}{sR}\right)R^3 t_2$$

$$a_2 = -2c_2 = \frac{10}{9}\frac{e^{sR}}{s}Rt_1, \qquad b_2 = -2d_2 = -\frac{2}{9}\left(1+\frac{5}{sR}\right)R^4 t_1$$

$$a_3 = -3c_3 = \frac{7}{10}\frac{e^{sR}}{s}Rt_2, \qquad b_3 = -3d_3 = -\frac{1}{10}\left(1+\frac{7}{sR}\right)R^5 t_2$$

Скорость жидкости (с точностью до членов $\sim 1$) и возмущение давления (с точностью до членов $\sim |\varkappa R|$) равны

$$(u+u')_r = \sin\varphi\sin\theta\left\{t_0 - \left(t_0+\frac{1}{5}t_2\right)\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{1}{5}t_2\left(\frac{R}{r}\right)^5 + \right.$$
$$\left. + \cos\theta\left[\frac{r}{R} - \left(\frac{R}{r}\right)^4\right]t_1 + \cos^2\theta\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{R}{r}\right)^5\right]t_2\right\}u_0 e^{i\omega t}$$

$$(u+u')_\theta = \sin\varphi\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{R}{r}e^{-s(r-R)} - \left(\frac{R}{r}\right)^4\right]t_1 + \cos\theta\left[t_0 - \right.\right.$$
$$-\left(\frac{3}{2}t_0 - \frac{9}{20}t_2\right)\frac{R}{r}e^{-s(r-R)} + \left(\frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{10}t_2\right)\left(\frac{R}{r}\right)^3 - \frac{11}{20}t_2\left(\frac{R}{r}\right)^5\right] +$$
$$+\cos^2\theta\left[\frac{r}{R} - \frac{5}{3}\frac{R}{r}e^{-s(r-R)} + \frac{2}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]t_1 + \cos^3\theta\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{7}{4}\frac{R}{r}e^{-s(r-R)} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^5\right]t_2\right\}u_0 e^{i\omega t}$$

$$(u+u')_\varphi = \cos\varphi\left\{t_0 - \left(\frac{3}{2}t_0 + \frac{1}{20}t_2\right)\frac{R}{r}e^{-s(r-R)} + \left(\frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{10}t_2\right)\left(\frac{R}{r}\right)^3 - \right.$$
$$-\frac{1}{20}t_2\left(\frac{R}{r}\right)^5 + \cos\theta\left[\frac{r}{R} - \frac{4}{3}\frac{R}{r}e^{-s(r-R)} + \frac{1}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^4\right]t_1 + \cos^2\theta\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{5}{4}\frac{R}{r}e^{-s(r-R)} + \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^5\right]t_2 + \frac{1}{3}\cos^3\theta\left[-\frac{R}{r}e^{-s(r-R)} + \left(\frac{R}{r}\right)^4\right]t_1\right\}u_0 e^{i\omega t}$$

$$p' = -\mu s\left\{sR\left[\left(\frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{10}t_2\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{1}{20}t_2\left(\frac{R}{r}\right)^4 + \frac{1}{3}t_1\left(\frac{R}{r}\right)^3\cos\theta + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}t_2\left(\frac{R}{r}\right)^4\cos^2\theta\right] + \left(\frac{3}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_2\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{7}{20}t_2\left(\frac{R}{r}\right)^4 +$$
$$\left. + \frac{5}{3}t_1\left(\frac{R}{r}\right)^3\cos\theta + \frac{7}{4}t_2\left(\frac{R}{r}\right)^4\cos^2\theta\right\}u_0 e^{i\omega t}\sin\varphi\sin\theta$$

Отсюда получим выражения для $F_y$ и $M_x$, верные с точностью до членов $\sim |\varkappa R|$

$$F_y = \pi\mu s R^2\left\{\int_{-1}^{1}\left[3t_0 + \frac{1}{5}t_2 + \frac{8}{3}t_1\xi + \frac{12}{5}t_2\xi^2 - \frac{4}{3}t_1\xi^3\right]d\xi + \right.$$
$$\left. + sR\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{20}t_2 + \frac{1}{3}t_1\xi + \left(-\frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{5}t_2\right)\xi^2 - \frac{1}{3}t_1\xi^3 - \frac{1}{4}t_2\xi^4\right]d\xi\right\}u_0 e^{i\omega t} \qquad (11)$$

$$M_x = -\pi\mu s R^3\int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{3}t_1 + \left(3t_0 - \frac{2}{5}t_2\right)\xi + 3t_1\xi^2 + 3t_2\xi^3 + \frac{1}{3}t_1\xi^4\right]d\xi\, u_0 e^{i\omega t}$$

Если $t_j$ не терпят разрывов на поверхности сферы, имеем

$$F_y = \pi\mu sR^2[6t_0 + 2t_2 + sR(^2/_3 t_0 + ^2/_{15} t_2)]e^{i\omega t}u_0$$
$$M_x = -^{22}/_{15}\pi\mu sR^3 t_1 u_0 e^{i\omega t}$$

Здесь также не учтена сила, обусловленная невозмущенным давлением в течении.

Таким образом, искомые сила и момент представляются в форме (см. соотношения (10) и (11))

$$\mathbf{F} = \pi\mu R\mathbf{u}_0 e^{i\omega t}\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{4}\Phi_j\xi^j\,d\xi, \quad M_x = -\pi\mu R^2 u_0 e^{i\omega t}\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{4}\Psi_j\xi^j\,d\xi \qquad (12)$$

$$\Phi_0 = 3t_0 - 2t_2 + (3t_0 + ^1/_5 t_2)sR + (^1/_2 t_0 + ^1/_{20} t_2)(sR)^2$$
$$\Phi_1 = (8 + ^8/_3 sR + ^1/_3 (sR)^2)t_1, \quad \Phi_2 = 13t_2 + ^{12}/_5 t_2 sR + (-^1/_2 t_0 + + ^1/_5 t_2)(sR)^2$$
$$\Phi_3 = -^1/_3(4sR + (sR)^2)t_1, \qquad \Phi_4 = ^1/_4(sR)^2 t_2$$
$$\Psi_0 = -(1 + ^1/_3 sR)t_1, \qquad \Psi_1 = 3t_0 - 4t_2 + (3t_0 - ^2/_5 t_2)sR$$
$$\Psi_2 = 3(3 + sR)t_1, \qquad \Psi_3 = 3(5 + sR)t_2, \qquad \Psi_4 = ^1/_3 sRt_1$$

Отсюда для однородного нестационарного потока следует выражение

$$F_y = \pi\mu R[6(1 + sR) + ^2/_3(sR)^2]t_0 u_0 e^{i\omega t}$$

вычисленное ранее в [11].

До сих пор рассматривалась закрепленная частица. В действительности частица перемещается под воздействием течения жидкости; кроме того, она способна вращаться вокруг оси $x$ с некоторой угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = (\Omega_x, 0, 0)$. Первое обстоятельство не изменяет соотношений (12), если понимать под $\mathbf{u}$ относительную скорость жидкости. Вращение частицы вызывает появление дополнительного момента $\mathbf{M}'$, для которого из решения задачи о нестационарном вращении частицы получим выражение

$$\mathbf{M}' = 8\pi\mu\Omega R^3(1 + ^1/_3 sR) \qquad (13)$$

Исследуем теперь выражения (12), используя аппроксимацию (9). Пусть сначала $kR < ^1/_2\pi$ (диаметр частицы меньше половины длины волны (1)). Тогда после вычисления имеем из (12) формулы

$$\mathbf{F} = 2\pi\mu R\mathbf{u}_0 e^{i\omega t}\sum_{j=0}^{4}\frac{1}{j+1}\Phi_j\left(1, 0, -\frac{4}{\varepsilon_0^2}\right)$$
$$M_x = -2\pi\mu R^2 u_0 e^{i\omega t} i\sum_{j=0}^{4}\frac{1}{j+1}\Psi_j\left(0, \frac{4}{\varepsilon_0}, -\frac{4}{\varepsilon_0^2}\right) \qquad (14)$$
$$\left\{\begin{matrix}\Phi_j\\ \Psi_j\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\Phi_j(t_0, t_1, t_2)\\ \Psi_j(t_0, t_1, t_2)\end{matrix}\right\}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\pi}{kR}$$

Пусть теперь $kR > ^1/_2\pi$. Введем число $N$ такое, что

$$kR = (N + ^1/_2)\pi + \varepsilon kR, \qquad -^1/_2\varepsilon_0 < \varepsilon \leqslant ^1/_2\varepsilon_0$$

и вычислим силу $\mathbf{F}$. Нетрудно видеть, что поверхность сферы разбивается на зоны

$$(n - ^1/_2)\pi < kR|\xi| \leqslant (n + ^1/_2)\pi, \qquad n \leqslant N, \qquad \xi = \cos\theta$$

причем вклады в выражение (12) для **F** от соседних зон имеют разные знаки. Это соответствует своеобразной «интерференции» элементарных напряжений, действующих на разных участках поверхности частицы. Из соображений симметрии легко видеть, что вклад в **F** дает только косинусоидальная составляющая волны (1). Коэффициенты ее разложения в различных зонах равны согласно (9)

$$\cos kR\xi \approx (-1)^n \left[1 - \left(\frac{2}{\varepsilon_0}\right)^2 (\xi - n\varepsilon_0 \operatorname{sign}\xi)^2\right]$$

$$t_0 = (-1)^n (1 - 4n^2), \quad t_1 = (-1)^n \frac{8n}{\varepsilon_0} \operatorname{sign}\xi, \quad t_2 = -(-1)^n \frac{4}{\varepsilon_0^2}$$

$$(n - 1/2)\varepsilon_0 < |\xi| \leqslant (n + 1/2)\varepsilon_0$$

Используя эти выражения в первой формуле (12), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = 2\pi\mu R \mathbf{u}_0 e^{i\omega t} \sum_{j=0}^{4} \frac{1}{j+1} \Bigg\{ \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^{j+1} \Phi_j\left(1, 0, -\frac{4}{\varepsilon_0^2}\right) + \\ + \varepsilon_0^{j+1} \varphi_j(N) + (-1)^{N+1} \left[1 - \left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\varepsilon_0\right)^{j+1}\right] \times \\ \times \Phi_j\left(1 - 4N^2, \frac{8N}{\varepsilon_0}, -\frac{4}{\varepsilon_0^2}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \varphi_j(N) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^{j+1} - \left(n - \frac{1}{2}\right)^{j+1}\right] \times \\ \times \Phi_j\left(1 - 4n^2, \frac{8n}{\varepsilon_0}, -\frac{4}{\varepsilon_0^2}\right) \end{aligned}$$

Суммирование по $n$ сводится, как легко видеть, к определению сумм

$$S_m(N) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n n^m = \sum_{n=1}^{1/2 N} [(2n)^m - (2n-1)^m], \quad (-1)^N = 1$$

$$S_m(N) = \sum_{n=1}^{1/2(N-1)} [(2n)^m - (2n-1)^m] - N^m, \quad (-1)^N = -1$$

Таким образом, эти суммы выражаются через хорошо известные суммы степеней натуральных чисел.

Совершенно аналогично вклад в момент $M_x$ вносит только синусоидальная составляющая волны (1), для которой имеем приближенно

$$i \sin kR\xi \approx (-1)^n i \left[1 - \left(\frac{2}{\varepsilon_0}\right)^2 \left(\xi - \left(n + \frac{1}{2}\right)\varepsilon_0 \operatorname{sign}\xi\right)^2\right]$$

$$t_0 = (-1)^n i \left[1 - 4\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right] \operatorname{sign}\xi, \qquad t_1 = (-1)^n i \frac{8}{\varepsilon_0}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$t_2 = -(-1)^n i \frac{4}{\varepsilon_0^2} \operatorname{sign}\xi, \qquad n\varepsilon_0 < |\xi| \leqslant (n+1)\varepsilon_0$$

Из второго выражения (12) следует тогда

$$M_x = -2\pi\mu R^2 u_0 i e^{i\omega t} \sum_{j=0}^{4} \frac{1}{j+1} \Big\{ \varepsilon_0^{j+1} \psi_j(N) + \\ +(-1)^{N+1}[1-((N+1)\varepsilon_0)^{j+1}]\Psi_j\left(1-4\left(N+\frac{3}{2}\right)^2, \frac{8}{\varepsilon_0}\left(N+\frac{3}{2}\right), -\frac{4}{\varepsilon_0^2}\right)\Big\}, \tag{16}$$

$$\psi_j(N) = \sum_{n=0}^{N} [(n+1)^{j+1} - n^{j+1}]\Psi_j\left(1-4\left(n+\frac{1}{2}\right), \frac{8}{\varepsilon_0}\left(n+\frac{1}{2}\right), -\frac{4}{\varepsilon_0^2}\right)$$

Величины (15) и (16) представляют собой полиномы третьего и второго порядков от $\sqrt{\omega}$ соответственно. Зависимость обеих этих величин от волнового числа $k$ весьма сложна: в области достаточно больших $kR$ они имеют колебательный характер, регулярно изменяют свой знак, причем период этих колебаний равен $k_0 = \pi / R$, а их амплитуда быстро возрастает по мере увеличения $k$ (или «номера» колебания $N$). Можно рассматривать также средние по одному периоду значения модулей силы и момента. Нетрудно видеть, что эти значения также возрастают с увеличением $N$ (соответствующие главные члены пропорциональны соответственно $N^2$ и $N$).

Таким образом, интенсивность взаимодействия частиц с волнами типа (1) (а также диссипация энергии в результате этого взаимодействия) быстро усиливается с ростом частоты и волнового числа, т. е. взвешенные частицы действуют, главным образом, на наиболее мелкие и высокочастотные вихри. Исследование количественной стороны этого влияния представляет собой самостоятельную задачу, но с качественной точки зрения представляется несомненным, что оно выражается, грубо говоря, в обрыве коротковолновой части энергетического спектра турбулентности. На крупные вихри частицы воздействуют (ослабляя или увеличивая их интенсивность) сравнительно незначительно [7].

Поступило 10 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Tchen C.-M. Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid. Hague, 1947.
2. Lumley J. L. Some problems connected with the motion of small particles in a turbulent fluid. Johns Hopkins Univ., Baltimore, 1957.
3. Хинце И. О., Турбулентность. Ее механизм и теория. М., Физматгиз, 1963.
4. Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. Влияние взвешенных частиц на вырождение изотропной турбулентности. ПМТФ, 1965, № 4.
5. Hjemfelt A. T., Mockros L. F. Motion of discrete particles in a turbulent fluid. Appl. Sci. Res., 1966, vol. 16, No. 2.
6. Левич В. Г., Кучанов С. И. Движение частиц, взвешенных в турбулентном потоке. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 4.
7. Буевич Ю. А. О диффузии взвешенных частиц в поле изотропной турбулентности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
8. Corrsin S., Lumley J. On the equations of motion for a particle in turbulent fluid. Appl. Sci. Res., A, 1956, vol. 6, No. 2—3.
9. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
10. Saffman P. G. The lift of a small sphere in a slow shear flow. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, No. 2. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обзор. иностр. период. лит., 1966, № 2).
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.