

## ЛАМИНАРНЫЙ МНОГОКОМПОНЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ БОЛЬШИХ ВДУВАХ

Э. А. ГЕРШБЕЙН

(Москва)

Вопрос о влиянии большого вдува на ламинарный пограничный слой интересен [1-4] в связи с проблемой входа тел в атмосферы планет со второй и большими космическими скоростями. При этом тепловые потоки к телу достигают значительных величин и его поверхность интенсивно разрушается. В работах [1, 2] приведены численные решения автомодельных уравнений пограничного слоя для однородной жидкости с большими вдувами. В работе [3] получено асимптотическое решение уравнений импульсов и бинарной диффузии в критической точке тела с постоянными поперек пограничного слоя коэффициентами переноса. В работе [4] получено асимптотическое решение уравнений Прандтля для однородной несжимаемой жидкости с отрицательным градиентом давления и с постоянным вдоль поверхности тела параметром вдува. В данной работе приводится асимптотическое решение уравнений двумерного ламинарного пограничного слоя для произвольной  $N$ -компонентной смеси газов при больших вдувах с поверхности тела. Получены асимптотические формулы для коэффициента трения, конвективного теплового потока, для диффузионных потоков и градиентов концентраций компонент. Приводится численное решение уравнений пограничного слоя для смеси газов O, N, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, CO, CN, HCN, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> при изменении параметра вдува в пределах  $0 \leq -f_w \leq 30$ . Численное и асимптотическое решения сравниваются между собой и устанавливаются области применимости асимптотических формул. Отметим, что асимптотическое решение совпадает с численным при таких величинах параметра вдува, когда еще остается справедливым приближение пограничного слоя. Исследуется поведение эффективных чисел Шмидта на поверхности тела и в пограничном слое при изменении параметра вдува.

**1. Уравнения ламинарного многокомпонентного пограничного слоя и граничные условия.** Уравнения ламинарного многокомпонентного пограничного слоя для плоского и осесимметричного течения при пренебрежении термодиффузией и химическими реакциями внутри слоя имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r^k) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v r^k) &= 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} - \sum_{i=1}^n I_i c_{pi} \frac{\partial T}{\partial y} \\ \rho \left( u \frac{\partial C_i}{\partial x} + v \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial y} I_i \quad (i=1, \dots, n-1) \\ \frac{\partial C_i}{\partial y} + \frac{C_i}{m} \frac{\partial m}{\partial y} &= \sum_{j=1}^n \frac{m}{\mu m_j} S_{ij} (C_i I_j - C_j I_i) \quad (i=1, \dots, n-1) \\ \sum_{i=1}^n C_i &= 1, \quad \sum_{i=1}^n I_i = 0, \quad p = \frac{\rho RT}{m}, \quad S_{ij} = \frac{\mu}{\rho D_{ij}}, \quad m = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{m_i} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — координаты, направленные вдоль поверхности тела и по нормали к ней;  $u$  и  $v$  — составляющие скорости в направлении этих координат;  $r$  — расстояние до оси симметрии тела;  $k = 0$  для плоскопараллельного течения,  $k = 1$  для осесимметричного течения;  $p, \rho, T, \mu, c_p, \lambda$ , и  $m$  — давление, плотность, температура, вязкость, теплоемкость, теплопроводность и молекулярный вес газа, состоящего из  $n$  химических компонент;  $m_i, C_i, c_{pi}$  и  $I_i$  — молекулярный вес, массовая концентрация, теплоемкость и массовый диффузионный поток  $i$ -й компоненты;  $D_{ij}$  и  $S_{ij}$  — бинарный коэффициент диффузии и бинарное число Шмидта. Последние уравнения (1.1) — соотношения Стефана — Максвелла, записанные для массовых концентраций.

Система уравнений (1.1) решается при следующих граничных условиях:

$$u \rightarrow u_e(x), \quad T \rightarrow T_e(x), \quad C_i \rightarrow C_{ie} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad \text{при } y \rightarrow \infty$$

$$u = 0, \quad \rho v = G(x), \quad T = T_w(x)$$

$$\sum_{k=1}^n [\rho v (C_k - C_k^{(A)}) + I_k] m_{lk} = 0 \quad (l=1, \dots, r-1)$$

$$p_i (p_1 \dots p_r)^{\nu_{ri}} = K_{pi} \quad (i=r+1, \dots, n) \quad \text{при } y=0 \tag{1.2}$$

Здесь  $m_{lk}$  — весовая доля  $l$ -го элемента в  $k$ -й компоненте,  $C_k^{(A)}$  — массовая концентрация  $k$ -й компоненты во вдуваемых газах,  $p_k$  — парциальное давление  $k$ -й компоненты,  $r$  — число химических элементов,  $K_{pi}$  — константа равновесия реакции образования компоненты  $A_i$ .

$$A_i = \nu_{i1} A_1 + \dots + \nu_{ir} A_r \quad (i=r+1, \dots, n)$$

Введем безразмерные функции и переменные Дородницына — Лиза

$$\xi = \int_0^x \rho_e \mu_e u_e r^{2k} dx, \quad \eta = \frac{u_e r^k}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy$$

$$f_\eta' = \frac{u}{u_e}, \quad \theta = \frac{T}{T_e}, \quad l = \frac{\mu \rho}{\mu_e \rho_e}, \quad X_i = \frac{r^k \sqrt{2\xi}}{\xi x'} I_i \tag{1.3}$$

$$\beta_1 = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi}, \quad \beta_2 = \frac{2\xi}{T_e} \frac{dT_e}{d\xi}, \quad \alpha = \frac{u_e^2}{c_{pe} T_e}$$

Преобразуем (1.1) и (1.2) к безразмерному виду

$$\rho v = -r^k [(f + 2\xi f_\xi') \xi_{x'} + 2\xi f_\eta' \eta_{x'}] (2\xi)^{-1/2} \tag{1.4}$$

$$(l f_\eta'')_\eta' = -f f_\eta'' - \beta_1 [\rho_e / \rho - (f_\eta')^2] + 2\xi (f_\eta' f_{\xi\eta}'' - f_\xi' f_{\eta\eta}'') \tag{1.5}$$

$$\left( \frac{c_p}{c_{pe}} \frac{l}{\sigma} \theta_\eta' \right)_\eta' = \left[ -\frac{c_p}{c_{pe}} (f + 2\xi f_\xi') + \sum_{i=1}^n \frac{c_{pi}}{c_{pe}} X_i \right] \theta_\eta' + \frac{c_p}{c_{pe}} \beta_2 f_\eta' \theta + \alpha \beta_1 f_\eta' \rho_e / \rho - \alpha l (f_\eta'')^2 + 2\xi (c_p / c_{pe}) f_\eta' \theta_\xi' \tag{1.6}$$

$$X_{i\eta}' = (f + 2\xi f_\xi') C_{i\eta}' - 2\xi f_\eta' C_{i\xi}' \quad (i=1, \dots, n-1) \tag{1.7}$$

$$a_{i1} X_1 + \dots + a_{in-1} X_{n-1} = a_0 (b_{i1} C_{i\eta}' + \dots + b_{in-1} C_{n-1}^\eta) \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$\text{для } i, j = 1, \dots, n-1; j \neq i \tag{1.8}$$

$$a_{ij}^* = \frac{m_q}{m_j} \frac{S_{ij}}{S_{pq}} - \frac{S_{iq}}{S_{pq}}, \quad b_{ij}^* = \frac{m_q}{m_j} - 1, \quad a_0 = -\frac{l}{S_{pq}}, \quad a_{ij} = -a_{ij}^* C_i$$

$$a_{ii} = \frac{S_{iq}}{S_{pq}} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}^* C_j, \quad b_{ii} = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij}^* C_j, \quad b_{ij} = -b_{ij}^* C_i$$

Соотношения (1.8) получены из соотношений Стефана — Максвелла путем исключения из них концентрации  $C_q$  и диффузионного потока  $X_q$ ;  $p$  — любая из оставшихся  $(n-1)$ -й компоненты

$$f_{\eta'} \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow 1, \quad C_i \rightarrow C_{ie} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

$$f + 2\xi f_{\xi'} = \Phi(\xi), \quad f_{\eta'} = 0, \quad \theta = \theta_w$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} [\Phi(\xi) (C_i - C_i^{(i)}) - X_i] m_{lh} = 0 \quad (l=1, \dots, r-1) \quad (1.10)$$

$$C_i = m_i \left( \prod_{i=1}^{r-1} m_l^{v_{li}} \right)^{-1} K_p (mp)^{\omega_i} \prod_{i=r+1}^n C_l^{v_{li}} \quad (i=r+1, \dots, n)$$

$$\omega_i = \sum_{k=1}^r v_{ki} - 1 \quad \text{при } \eta = 0$$

**2. Асимптотическое решение уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при больших вдувах.** Основная задача будет состоять в нахождении напряжения трения, градиента температуры, градиентов концентраций и диффузионных потоков компонент на поверхности тела.

Рассмотрим соотношения (1.8). Разрешая их относительно  $i$ -го диффузионного потока, получаем

$$X_i = a_0 \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} C_{j\eta'}, \quad D_{ij} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{A_{im} b_{mj}}{\det \|a_{ij}\|} \quad (i, j=1, \dots, n-1) \quad (2.1)$$

Здесь  $A_{im}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{im}$ .

Подставив (2.1) в уравнения диффузии (1.7), получим

$$\left( a_0 \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} C_{j\eta'} \right)' = (f + 2\xi f_{\xi'}) C_{i\eta'} - 2\xi f_{\eta'} C_{i\xi'} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (2.2)$$

Отметим, что коэффициенты  $D_{ij}$  являются функциями только состава смеси газа и его температуры, т. е. они не зависят от градиентов концентраций и диффузионных потоков.

Пусть на поверхности тела

$$f(\xi, 0) = \Phi_1(\xi), \quad f'(\xi, 0) = 0, \quad \theta(\xi, 0) = \theta_w(\xi), \quad (2.3)$$

$$C_i(\xi, 0) = C_{iw}(\xi) \quad (i=1, \dots, n-1)$$

Для внутренней области вблизи стенки введем переменные по формулам

$$\zeta = \varepsilon_1 \eta, \quad \xi = \xi, \quad \varphi = \varepsilon_1 f, \quad Z_i = X_i / \varepsilon_1 \quad (i=1, \dots, n-1), \quad \varepsilon_1 = \Phi_1^{-1} \quad (2.4)$$

Тогда система уравнений (1.5), (1.6) и (2.2) и граничные условия (1.9) и (2.3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 (l\varphi_{\zeta\zeta''})_{\zeta'} &= -(\psi\varphi + 2\xi\varphi_{\xi}')\varphi_{\zeta\zeta} - \beta_1[\rho_e/\rho - (\varphi_{\eta}')^2] + 2\xi\varphi_{\zeta'}\varphi_{\zeta\zeta''} \\ \varepsilon_1^2 \left[ \left( \frac{c_p}{c_{pe}} \frac{l}{\sigma} \theta_{\zeta'} \right)'_{\zeta} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_{pi}}{c_{pe}} Z_i \theta_{\zeta'} + \alpha l (\varphi_{\zeta\zeta''})^2 \right] &= \\ &= -\frac{c_p}{c_{pe}} (\psi\varphi + 2\xi\varphi_{\xi}') \theta_{\zeta'} + \frac{c_p}{c_{pe}} \left( \beta_2 \theta + \alpha \beta_1 \frac{c_{pe}\rho_e}{c_{p\rho}} + 2\xi\theta_{\xi}' \right) \varphi_{\zeta'} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_1^2 \left( a_0 \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} C_{j\zeta'} \right)'_{\zeta} = (\psi\varphi + 2\xi\varphi_{\xi}') C_{i\zeta'} - 2\xi\varphi_{\zeta'} C_{i\xi'} \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$\psi = \Phi/\Phi_1$$

$$\varphi_{\eta}' \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow 1, \quad C_i \rightarrow C_{ie} \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$\varphi = 1, \quad \varphi_{\zeta'} = 0, \quad \theta = \theta_w(\xi), \quad C_i = C_{iw}(\xi) \quad (i=1, \dots, n-1) \quad \text{при } \zeta = 0$$

Решение во внутренней области пограничного слоя при  $\varepsilon_1$ , стремящемся к нулю, будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \zeta) &= \varphi_0(\xi, \zeta) + \varepsilon_1^2 \varphi_2(\xi, \zeta) + \dots, \quad \theta(\xi, \zeta) = \theta_0(\xi, \zeta) + \varepsilon_1^2 \theta_2(\xi, \zeta) + \dots \\ C_i(\xi, \zeta) &= C_{i0}(\xi, \zeta) + \varepsilon_1^2 C_{i2}(\xi, \zeta) + \dots \quad (i=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в систему (2.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$\begin{aligned} (\psi\varphi_0 + 2\xi\varphi_{0\xi}')\varphi_{0\zeta\zeta''} + \beta_1[\rho_e/\rho - (\varphi_{0\zeta}')^2] &= 2\xi\varphi_{0\zeta'}\varphi_{0\zeta\zeta''} \\ (\psi\varphi_0 + 2\xi\varphi_{0\xi}')\theta_{0\zeta'} &= (\beta_2\theta_0 + \alpha\beta_1 c_{pe}\rho_e/c_{p\rho} + 2\xi\theta_{0\xi}')\varphi_{0\zeta'} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$(\psi\varphi_0 + 2\xi\varphi_{0\xi}')C_{i\zeta'} = 2\xi\varphi_{0\zeta'}C_{i0\xi'} \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$\begin{aligned} (l\varphi_{0\zeta\zeta''})_{\zeta'} &= -(\psi\varphi_0 + 2\xi\varphi_{0\xi}')\varphi_{2\zeta\zeta''} - [(2-\psi)\varphi_2 + 2\xi\varphi_{2\xi'}]\varphi_{0\zeta\zeta''} - \\ &- \beta_1(\rho_e/\rho)_2 + 2(\beta+1-\psi)\varphi_{0\zeta'}\varphi_{2\zeta'} + 2\xi(\varphi_{2\zeta'}\varphi_{0\zeta\zeta''} + \varphi_{0\zeta'}\varphi_{2\zeta\xi}) \end{aligned}$$

Из рассмотрения системы (2.7) следует, что разложение решения в ряд в окрестности стенки при  $\varepsilon_1$ , стремящемся к нулю, приводит к системе дифференциальных уравнений, порядок которых на единицу меньше порядка уравнений исходной системы. Следовательно, граничные условия на внешней границе пограничного слоя должны быть опущены. Граничные условия для системы (2.7) принимаем следующие

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_{0\zeta'} = 0, \quad \theta_0 = \theta_w(\xi), \quad C_{i0} = C_{iw}(\xi) \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (2.8)$$

$$\varphi_k = 0, \quad \varphi_{k\zeta'} = 0, \quad \theta_k = 0, \quad C_{ik} = 0 \quad (i=1, \dots, n-1; k > 0) \quad \text{при } \zeta = 0$$

Для нахождения распределения скоростей, температур и концентраций поперек пограничного слоя необходимо найти внешнее решение и сравнить его с внутренним решением [2-4]. Однако в силу того что число граничных условий (2.8) в точности соответствует порядку системы уравнений (2.7), значения  $\varphi_{k\zeta\zeta''}$ ,  $\theta_{k\zeta'}$ ,  $C_{ik\zeta'}$  на поверхности тела для любого  $k \geq 0$  могут быть найдены из внутреннего решения. Используя (2.7), (2.8) и (2.4), получаем следующие выражения для безразмерного трения, градиентов кон-

центраций и температур на поверхности тела в переменных  $\xi$  и  $\eta$  (индекс  $w$  здесь и далее опущен):

$$f_{\eta\eta}''(\xi, 0) = f_1(\xi)\varepsilon + f_5(\xi)\varepsilon^5 + O(\varepsilon^9) \quad (2.9)$$

$$\theta_{\eta}'(\xi, 0) = \theta_3(\xi)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^7) \quad (2.10)$$

$$C_{i\eta}'(\xi, 0) = C_{i3}(\xi)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^7) \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (2.11)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\Phi(\xi)}, \quad f_1 = -\frac{\beta_1 \rho_e}{\rho},$$

$$\theta_3 = -f_1 \frac{l}{\sigma} \left\{ \beta_2 \theta \left[ 1 - (1 - \sigma) \frac{m_e c_{pe}}{m c_p} \right] + 2\xi \theta_{\xi}' \right\}$$

$$C_{i3} = -2\xi f_1 \frac{l}{S_{pq}} \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} C_{j\xi}' \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$$f_5 = f_1 l^2 \left[ (2\beta_1 - 1) f_1 + 2\xi f_{1\xi}' - 2\xi f_1 \Phi_{\xi}' / \Phi \right] - (f_1 l) \theta_3^* - \sum_{i=1}^{n-1} (f_1 l) c_i' C_{i3}^*$$

$$\theta_3^* = (1 + \sigma) \theta_3 + \alpha l \sigma \frac{c_{pe}}{c_p} f_1^2$$

$$C_{i3}^* = C_{i3} - 2\xi l f_1 C_{i\xi}' \quad (i=1, \dots, n-1)$$

Диффузионные потоки на поверхности тела можно найти по формулам (2.1), если в них подставить выражения (2.11)

$$X_i = 2\xi f_1 \left( \frac{l}{S_{pq}} \right)^2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} D_{ij} D_{jm} C_{m\xi}' \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (2.12)$$

Отметим, что в случае несжимаемой жидкости при

$$l \equiv 1, \quad \rho_e / \rho \equiv 1, \quad f(\xi, 0) \equiv \text{const}$$

формула (2.9) совпадает с формулой (2.7) работы [4].

В критической точке тела при  $\xi = 0$  получим

$$f_{\eta\eta}'' = f_1 \varepsilon [1 + l^2 (2\beta_1 - 1) f_1 \varepsilon^4] + O(\varepsilon^9)$$

$$\theta_{\eta}'(0, 0) = O(\varepsilon^k), \quad C_{i\eta}'(0, 0) = O(\varepsilon^k) \quad (i=1, \dots, n-1; k > 0)$$

Можно показать, что в критической точке тела

$$\theta_{\eta}'(0, 0) \sim \exp(-fw^2), \quad C_{i\eta}' \sim \exp(-fw^2) \quad (i=1, \dots, n-1)$$

Рассмотрим асимптотическое решение уравнений диффузии. Из асимптотического решения в общем случае произвольной  $N$  — компонентной смеси газов следует:

1) если для какой-либо  $m$ -й компоненты

$$C_m(\xi, 0) \equiv 0 \quad (2.13)$$

то

$$C_{m\eta}'(\xi, 0) = O(\varepsilon^k), \quad X_m(\xi, 0) = O(\varepsilon^k) \quad \text{для } k > 0$$

2) если концентрации всех компонент на поверхности тела постоянны (не зависят от  $\xi$ ), то

$$C_{i\eta}'(\xi, 0) = O(\varepsilon^k), \quad X_i(\xi, 0) = O(\varepsilon^k) \quad (i=1, \dots, n, k > 0) \quad (2.14)$$

Рассмотрим частный случай смеси газов. Пусть на поверхности тела присутствуют две группы компонент с различными диффузионными свойствами: группа  $A$ , состоящая из одной компоненты (например,  $H_2$  или  $SiO_2$ ,  $CO_2$  и т. д.), и группа  $B$ , состоящая из  $p$  компонент (например,  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO$ ,  $CN$  и т. д.). Будем считать, что диффузионные свойства компонент внутри групп одинаковы. На внешней границе пограничного слоя присутствуют  $N$  различных компонент, в том числе компоненты групп  $A$  и  $B$ . Граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} C_i &\rightarrow C_{ie} \quad (i = 1, \dots, N) \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \\ C_i &= C_{jw} \quad (i = j = 1, \dots, p), \quad C_i = C_a \quad (i = p + 1), \\ C_i &= 0 \quad (i = p + 2, \dots, N) \quad \text{при } \eta = 0 \end{aligned}$$

Формулы (2.13) дают величины градиентов концентраций и диффузионных потоков компонент, диффундирующих от внешней границы пограничного слоя и не входящих в группы  $A$  и  $B$ . Для компонент групп  $A$  и  $B$  получим

$$C_{a\eta}' = 2\xi\beta_1 \frac{\rho_e}{\rho} \frac{l}{S_{ab}} C_{a\xi}' \varepsilon^3 + O(\varepsilon^7) \quad (2.15)$$

$$C_{j\eta}' = 2\xi\beta_1 \frac{\rho_e}{\rho} \frac{l}{S_{ab}} \frac{\alpha_1 C_j C_{a\xi}' + (1 + \alpha_2 C_a) C_{j\xi}'}{1 - \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) C_a} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^7) \quad (2.16)$$

$$\alpha_1 = 1 - S_{bb} / S_{ab}, \quad \alpha_2 = -1 + m_b / m_a$$

Здесь  $S_{ab}$ ,  $S_{bb}$  — бинарные числа Шмидта.

Вычислим эффективные числа Шмидта [6] на поверхности тела

$$S_i = -l C_{\eta}' / X_i \quad (i=1, \dots, p+1) \quad (2.17)$$

Используя (2.15) — (2.17) и (2.12), получаем с точностью  $O(\varepsilon^7)$

$$\frac{S_{ab}}{S_j} = \frac{1 + \alpha_2 C_a}{1 - \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) C_a} + \frac{S_a = S_{ab} \quad \alpha_1 C_j C_{a\xi}'}{\alpha_1 C_j C_{a\xi}' + (1 + \alpha_2 C_a) C_{j\xi}'} \quad (j=1, \dots, p)$$

Формулы (2.9) — (2.12) связывают параметр вдува, температуру и концентрации компонент на поверхности тела с их производными и диффузионными потоками. Подставив (2.9) — (2.12) в граничные условия (1.10), получим систему уравнений для определения состава газа на поверхности тела. Таким образом задача, сформулированная в п. 1 при больших вдувах, будет полностью решена.

Возвращаясь к физическим координатам и размерным функциям и учитывая первые ненулевые члены разложения, получаем на поверхности тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\rho_e u_e}{\rho v} \frac{du_e}{dx} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\lambda}{\rho c_p v^2} \frac{\rho_e u_e}{\rho v} \frac{du_e}{dx} \left[ \frac{c_{pe} \rho_e}{c_p \rho} (1 - \sigma) \frac{dT_e}{dx} - \frac{\partial T}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial C_i}{\partial y} &= - \frac{\mu}{\rho S_{pq} v^2} \frac{\rho_e u_e}{\rho v} \frac{du_e}{dx} \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij} \frac{\partial C_j}{\partial x} \quad (i = 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

3. Численное решение уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя. Для решения на ЭЦВМ уравнений двумерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя на разрушающейся поверхности была составлена стандартная программа. Использовалась неявная четырехточечная двухслойная разностная схема с точностью аппроксимации  $O(\Delta\xi^2) + O(\Delta\eta^4)$  [8]. Коэффициенты вязкости и теплопроводности вычислялись по приближенным формулам кинетической теории газов [7]. Были рассмотрены три задачи:

а) плоское бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра потоком несжимаемой жидкости ( $\beta_1 = (1 - 2\xi) / (1 - \xi)$ ). Расчет проводился до точки отрыва пограничного слоя (фиг. 1);

б) обтекание тела диссоциированным потоком воздуха ( $0 \leq C_e(O) + C_e(N) \leq 1$ ) с вдувом газа, состоящего из химических элементов N, O, C, H. На поверхности тела предполагалось наличие химических компонент  $N_2, O_2, CO, CN, HCN, H_2, C_2, C_3$ . Система уравнений (1.5) — (1.8) решалась с граничными условиями (1.9), (1.10);

в) система уравнений (1.5) — (1.8) решалась с граничными условиями (1.9) и (2.3). В этом случае на поверхности тела и на внешней границе пограничного слоя задавались концентрации компонент O, N,  $O_2, N_2, CO, CN, C_2, H_2, HCN, C_3$ . Граничные условия (2.3) и (1.9) гарантировали постоянство значений  $l_w, \rho_e / \rho_w, \sigma_w$  и т. д. на поверхности тела при изменении параметра вдува.

В случаях б) и в) пограничный слой предполагался локально автомодельным. Параметры  $\beta_1$  и  $\alpha$  полагались равными  $\beta_1 = 0.1, 0.5, \alpha = 0, 0.25, 0.5$ , параметр вдува изменялся  $0 \leq -f_w \leq 30$ . Всего было просчитано свыше ста вариантов, при этом выбранный диапазон значений  $p, T_w, f_w, \theta_w, C_{e_e}, C_{i_i}^{(1)}$  или  $C_{i_w}$  приводил к следующим значениям безразмерных величин:

$$1.45 \leq l_w \leq 11.83, \quad 0.41 \leq \rho_e / \rho_w \leq 0.0083, \\ 0.469 \leq \sigma_w \leq 0.71$$

Рассмотрим результаты численных расчетов.

*Напряжение трения.* Результаты расчетов показывают, что для течения с отрицательным градиентом давления ( $\beta_1 > 0$ ) влияние вязкого члена  $(lf_{\eta\eta}')_{\eta'}$  в уравнении импульсов (1.5) на напряжение трения на поверхности тела уменьшается с увеличением вдува и становится пренебрежимым при  $-f_w \geq 2 \div 3$  для всех рассчитанных вариантов, т. е. величина напряжения трения, подсчитанная по асимптотической формуле (2.9) с учетом первого члена (пунктирные линии на фиг. 1, 2), практически не отличается от точного численного решения для вдувов  $-f_w \geq 2 \div 3$ .

Для сравнения приведем значения величин  $f_{\eta\eta}''$  и  $\theta_{\eta'}$  на поверхности тела, полученные из численного и асимптотического решений при  $\alpha = 0.25$  и  $\beta_1 = 0.5$ .

Для значений параметров  $\theta = 1/3, l_w = 1.6537, \rho_e / \rho_w = 0.2771, \sigma_w = 0.4694$  было получено

| $-f_w$ | $f''_{\eta\eta w}$ | $f''_{\eta\eta w}$ (2.9) | $\theta'_{\eta w}$     | $\theta'_{\eta w}$ (2.10) |
|--------|--------------------|--------------------------|------------------------|---------------------------|
| 1.0    | 0.1637             | 0.1385                   | $0.4676 \cdot 10^{-1}$ | $0.1273 \cdot 10^{-1}$    |
| 3.0    | 0.0462             | 0.0462                   | $0.6019 \cdot 10^{-3}$ | $0.4714 \cdot 10^{-3}$    |
| 5.0    | 0.0277             | 0.0277                   | $0.1026 \cdot 10^{-3}$ | $0.1018 \cdot 10^{-3}$    |

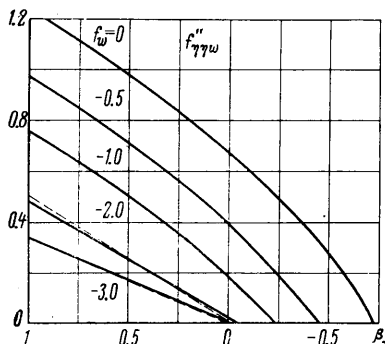
Для значений параметров  $\theta = 0.05, l_w = 3.006, \rho_e / \rho_w = 0.04156, \sigma_w = 0.4694$  было получено

| $-f_w$ | $f''_{\eta\eta w}$ | $f''_{\eta\eta w}$ (2.9) | $\theta'_{\eta w}$     | $\theta'_{\eta w}$ (2.10) |
|--------|--------------------|--------------------------|------------------------|---------------------------|
| 1.0    | 0.0535             | 0.0208                   | $0.3245 \cdot 10^{-1}$ | $0.5205 \cdot 10^{-3}$    |
| 3.0    | 0.00693            | 0.00693                  | $0.2609 \cdot 10^{-4}$ | $0.1928 \cdot 10^{-4}$    |
| 4.5    | 0.00462            | 0.00462                  | $0.5746 \cdot 10^{-5}$ | $0.5712 \cdot 10^{-5}$    |

Интересно отметить, что с увеличением вдува точка отрыва пограничного слоя ( $f_{\eta\eta}'' = 0$ ) приближается к точке, где прекращается падение давления ( $\xi = 0.5, \beta_1 = 0$ ).

При вдувах  $-f_w \geq 2$  параметр давления  $\beta_1$ , соответствующий точке отрыва пограничного слоя, мало отличается от нуля (фиг. 1).

*Градиент температуры.* Результаты расчетов в критической точке тела показывают, что величина  $\theta_{\eta'}(0,0)$  пропорциональна  $\exp(-f_w^2)$  при вдувах  $-f_w \geq 1.5 \div 3$

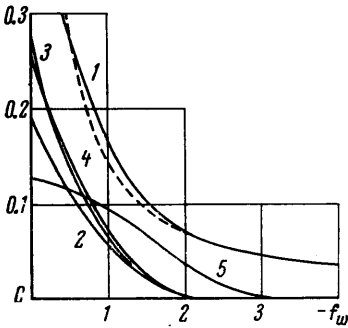


Фиг. 1

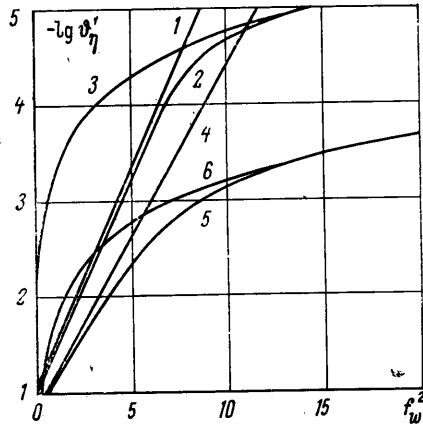
(фиг. 3, линия 1 получена при  $l_w = 3.0$ ,  $\rho_e / \rho_w = 0.042$ ; линия 4 получена при  $l_w = 1.65$ ,  $\rho_e / \rho_w = 0.277$ ). Ввиду экспоненциальной зависимости от параметра вдува величина  $\theta_{\eta w}'$  в критической точке тела при конечном вдуве может стать пренебрежимо малой (фиг. 2, линия 2). Например, в случае

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0.5, \quad l_w = 1.65, \quad \sigma_w = 0.469, \quad \rho_e / \rho_w = 0.277 \\ f_{\eta w}' &= 0.0277, \quad \theta_{\eta w}' = 0.15 \cdot 10^{-9} \text{ при } f_w = -5 \\ f_{\eta w}'' &= 0.01385, \quad \theta_{\eta w}'' = 0 \text{ (машинный нуль) при } f_w = -10. \end{aligned}$$

На боковой поверхности тела при  $\beta_1 > 0$ ,  $\alpha > 0$  величина  $\theta_{\eta}'(\xi, 0)$  пропорциональна  $f_w^{-3}$  при вдувах  $-f_w \geq 3 \div 5$ . Отличие значений  $\theta_{\eta}'(\xi, 0)$ , подсчитанных по асимптотической формуле (2.10), от численных решений, становится малым при  $-f_w \geq 3 \div 5$  для всех рассчитанных вариантов и стремится



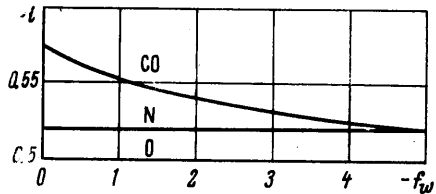
Фиг. 2



Фиг. 3

к нулю с увеличением вдува (фиг. 3: линии 3, 6 — формула (2.10); 2, 5 — численные решения,  $\theta_{\eta}' = \theta_{\eta}' / (1 - \theta_w)$ ).

**Градиенты концентраций и диффузионные потоки компонент. Эффективные числа Шмидта.** В критической точке тела и на боковой поверхности градиенты концентраций компонент, диффундирующих от внешней границы пограничного слоя и исчезающих на поверхности тела при вдувах  $-f_w \geq 2$ , пропорциональны  $\exp(-f_w^2)$ . При некотором конечном вдуве они становятся пренебрежимо малыми (в численных расчетах машинный нуль достигался при вдувах  $-f_w = 8 \div 15$ ). На фиг. 2 приведены величины  $g_{i\eta}' = C_{i\eta w}' (C_{ie} - C_{iw})^{-1}$  (3 — O, N; 4 — H<sub>2</sub>; 5 — CO). Эффективные числа Шмидта  $S_{iw}$  компонент, концентрации которых равны нулю на поверхности тела, зависят только от концентраций остальных компонент на поверхности тела и в некоторых случаях (например, в случае в) могут быть вычислены до решения задачи. Эффективные числа Шмидта компонент, концентрации которых на поверхности тела отличны от нуля, зависят в общем случае от концентраций, градиентов концентраций и диффузионных потоков всех компонент. Изучим поведение эффективных чисел Шмидта во всем диапазоне изменения параметра вдува. Рассмотрим два случая.



Фиг. 4

1. Пусть на поверхности тела присутствуют компоненты с одинаковыми диффузионными свойствами, например молекулы CO и N<sub>2</sub>, а на внешней границе пограничного слоя атомы O, N и молекулы N<sub>2</sub> (фиг. 4). При малых вдувах эффективное число Шмидта  $S_w(\text{CO})$  слабо зависит от вдува и при изменении концентрации атомов на внешней границе изменяется в пределах [9]

$$S_w(\text{CO}, \text{N}) \leq S_w(\text{CO}) \leq S_w(\text{CO}, \text{N}_2)$$

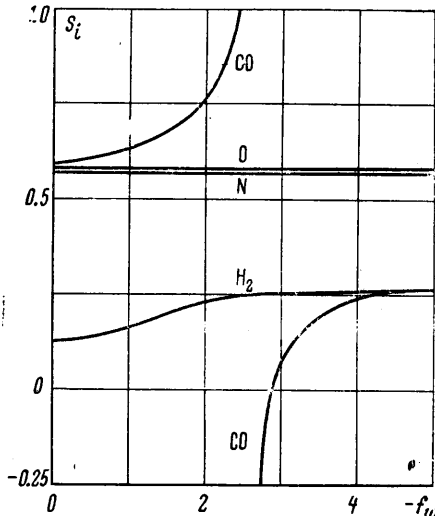
При больших вдувах эффективное число Шмидта  $S_w(\text{CO})$  становится равным биарному числу Шмидта  $S_w(\text{N}, \text{CO})$ , как бы ни была мала концентрация атомов на внешней границе пограничного слоя, т. е. при больших вдувах в рассматриваемом



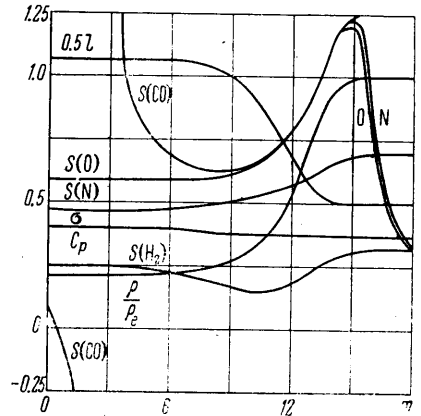
случае могут достигнуть поверхности тела в основном только компоненты, обладающие наибольшей подвижностью. Аналогичная картина будет и в случае, когда на внешней границе пограничного слоя присутствуют компоненты  $H_2$ , O, N,  $N_2$ , а на поверхности тела — HCN, CO,  $N_2$ . В этом случае при больших вдувах

$$S_w(CO) = S_w(HCN) = S_w(H_2, CO) = S_w(H_2, HCN)$$

2. Пусть на внешней границе пограничного слоя присутствуют атомы O, N и молекулы  $N_2$ , а на поверхности тела — молекулы  $N_2$ , CO и  $H_2$  (фиг. 5). В этом случае при малых вдувах эффективны числа Шмидта  $S_w(CO)$  и  $S_w(H_2)$  зависят от концентрации атомов на внешней границе пограничного слоя и водорода на поверхности тела и слабо зависят от параметра вдува [9]. При увеличении вдува эффективное число Шмидта  $S_w(CO)$  увеличивается и при некотором вдуве ( $1.8 \leq -f_w \leq 4$ ) обра-

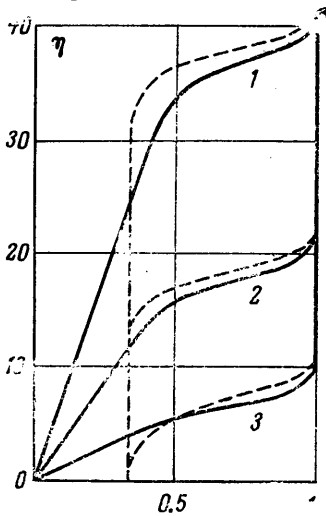


Фиг. 5

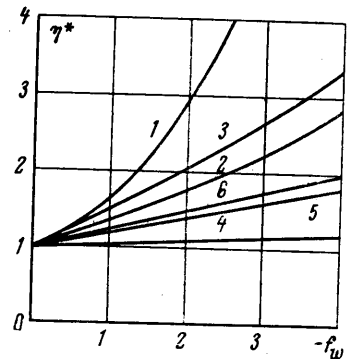


Фиг. 6

щается в бесконечность. При дальнейшем увеличении вдува  $S_w(CO)$  изменяется от минус бесконечности до значения, равного бинарному числу Шмидта  $S_w(H_2, CO)$ . На фиг. 6 представлено изменение эффективных чисел Шмидта поперек пограничного слоя при  $f_w = -3$ . Отметим, что в данном случае профиль концентрации CO при некотором вдуве имеет максимум на поверхности тела. При увеличении вдува максимум концентрации перемещается внутрь пограничного слоя. Диффузионный



Фиг. 7



Фиг. 8

поток компоненты CO при таких вдувах внутри пограничного слоя изменяет свой знак. Таким образом, при больших вдувах атомы O и N, диффундирующие от внеш-

ней границы пограничного слоя, отгоняются, а молекулы  $N_2$  и  $CO$  диффундируют друг в друга

$$X_w(N_2) + X_w(CO) \approx -X_w(H_2)$$

В силу того что диффузионные потоки компонент, диффундирующих от внешней границы пограничного слоя, становятся малыми, химические реакции на поверхности тела с участием этих компонент прекращаются, и концентрации химических элементов на поверхности тела приближаются к концентрациям химических элементов во вдуваемом газе.

На фиг. 7 приведены характерные профили скоростей  $u/u_e$  и температур  $T/T_e$  (пунктирные линии) псперек пограничного слоя. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям параметра  $f_w = -10, -5, -2$ .

На фиг. 8 приведена безразмерная толщина пограничного слоя  $\eta^*$ , отнесенная к толщине пограничного слоя при вдуве, равном нулю.

Кривые 1, 2, 3, соответствующие  $\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*$ , получены при следующих значениях параметров  $\beta_1 = 0.5$ :

|                    |              |                        |                    |
|--------------------|--------------|------------------------|--------------------|
| 1) $\alpha = 0$    | $l_w = 4.92$ | $\rho_e/\rho = 0.0257$ | $\sigma_w = 0.705$ |
| 2) $\alpha = 0$    | $l_w = 1.65$ | $\rho_e/\rho = 0.2770$ | $\sigma_w = 0.469$ |
| 3) $\alpha = 0.25$ | $l_w = 1.65$ | $\rho_e/\rho = 0.2770$ | $\sigma_w = 0.469$ |

Там же приведена физическая толщина пограничного слоя  $y^*$ , отнесенная к физической толщине пограничного слоя при вдуве, равном нулю ( $4 - y_1^*, 5 - y_2^*, 6 - y_3^*$ ). Незначительное увеличение толщины пограничного слоя  $y_1^*$  объясняется тем, что основное увеличение безразмерной толщины пограничного слоя  $\eta_1^*$  с увеличением вдува происходит главным образом в области, примыкающей к поверхности тела. В этой области величина  $\rho_e/\rho$  мало отличается от величины  $\rho_c/\rho_w$  и поэтому вносит небольшой вклад в интеграл  $\int_0^{\eta^*} (\rho_e/\rho) d\eta$ .

Автор благодарит Г. А. Тирского за помощь в работе.

Поступило 14 III 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Libby P. A. The homogeneous boundary layer at an axisymmetric stagnation point with large rates of injection. J. Aero/Space Sci., 1962, vol. 29, No. 1.
2. Kubota T., Fernandez F. L. Boundary-layer with large injection and heat transfer AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 1.
3. Acrivos A. The asymptotic form the laminar boundary-layer mass-transfer rate for large interfacial velocities. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, No. 3.
4. Филимонов В. Н. Асимптотическое решение уравнений несжимаемого пограничного слоя с отрицательным градиентом давления при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖТ, 1967, № 5.
5. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
6. Тирский Г. А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
7. Тирский Г. А. Сублимация тупого тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке смеси газов. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 5.
8. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб.: «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», М., «Наука», 1964, стр. 304—325.
9. Тирский Г. А. Вычисление эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном диссоциированном многокомпонентном пограничном слое. ПММ, 1969, № 1.