

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ДО- И ТРАНСЗВУКОВОЙ ОБЛАСТЯХ СОПЛА ЛАВАЛЯ

У. Г. ПИРУМОВ

(Москва)

В работе [1] был предложен метод расчета течения в соплах Лавалья, позволяющий рассчитывать дозвуковую, трансзвуковую и сверхзвуковую области течения. Метод основан на численном решении обратной задачи теории сопла с использованием устойчивой трехточечной разностной схемы с переменным шагом на слое. В работе [1] дано обоснование метода расчета, построено несколько асимптотических решений и отмечены некоторые качественные особенности трансзвуковых течений. Однако в работе не было проведено параметрического исследования течения в до- и трансзвуковых областях. В данной работе с использованием метода, описанного в [1], проведена серия расчетов, позволившая исследовать зависимости параметров течения от геометрических характеристик дозвуковой и трансзвуковой частей сопла. Рассмотрено влияние показателя адиабаты и влияние формы трансзвуковой области на течение в сверхзвуковой части сопла. Проведено сравнение численного решения с результатами специальных экспериментов, в которых исследовалось течение в соплах, рассчитанных по методу, предложенному в работе [1].

### 1. Параметрическое исследование течения в до- и трансзвуковой областях. Геометрию дозвуковой и трансзвуковой областей современных сопел можно характеризовать

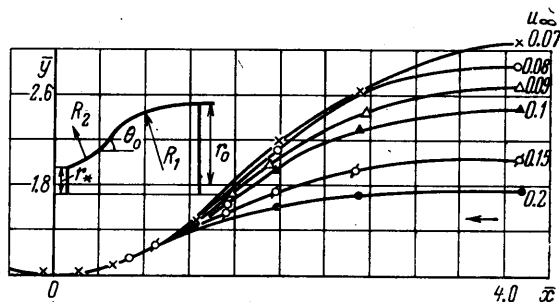
следующими параметрами: радиусом очертания критического сечения  $R_2$ , углом наклона конического участка  $\theta_0$ , радиусом сопряжения конического и цилиндрического участков  $R_1$  и степенью поджатия  $n$  (отношением радиуса входа в цилиндрическую часть сопла к радиусу критического сечения) (фиг. 1).

Ниже будет рассмотрено влияние этих параметров

на течение в дозвуковой и трансзвуковой областях сопла.

Как отмечалось, в работе [1] получено численное решение обратной задачи теории сопла, в процессе решения которой определяется семейство линий тока, соответствующих некоторому заданному распределению скорости на оси. Для определения течения в заданном контуре сопла (прямая задача) можно, варьируя параметры, характеризующие распределение скорости по оси, подобрать их так, чтобы форма некоторой линии тока полностью или частично соответствовала заданному контуру сопла. В качестве исходного распределения скорости выбрано следующее трехпараметрическое распределение:

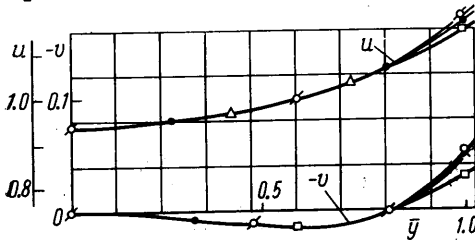
$$u = 1 + \frac{(1 - u_\infty)(\bar{u}_\infty - 1)(e^{-x/b} - 1)}{(1 - u_\infty)e^{-x/b} + (\bar{u}_\infty - 1)} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

где параметр  $u_\infty$  равен асимптотическому значению коэффициента скорости в дозвуковой области на бесконечности,  $\bar{u}_\infty$  — асимптотическому значению коэффициента скорости в сверхзвуковой области на бесконечности, а параметр  $b$  характеризует величину производной в центре сопла.

Рассмотрим зависимость параметров течения в трансзвуковой области от радиуса очертания критического сечения  $R_2$ . Варьируя параметры  $u_\infty$ ,



Фиг. 2

$\bar{u}_\infty$  в распределении скорости (1.1), можно подобрать их таким образом, чтобы окрестность критического сечения имела форму дуги окружности с заданным значением  $R_2$ . Было показано, что величина  $R_2$  зависит в основном от значений первой и второй производной в центре сопла. Отметим, что в решении Зауэра [2] и в одномерной теории  $R_2$  зависит только от первой производной в центре сопла. Для распределения скорости (1.1) значения первой и второй производной в центре сопла равны

$$u'(0) = -\frac{1}{b} \frac{(\bar{u}_\infty - 1)(1 - u_\infty)}{\bar{u}_\infty - u_\infty} \quad (1.2)$$

$$u''(0) = -\frac{1}{b^2} (\bar{u}_\infty - 1)(1 - u_\infty) \frac{2 - (\bar{u}_\infty + u_\infty)}{(\bar{u}_\infty - u_\infty)^2} \quad (1.3)$$

С использованием распределения скорости (1.1) было рассчитано семейство контуров сопел с  $k = 1.4$ , у которых  $u'(0) = -1.575$ ,  $u''(0) = 0$ , а  $u_\infty + \bar{u}_\infty = 2$ . Полученные в результате расчетов контура сопел показаны на фиг. 1. На фиг. 1 и далее

$$\bar{x} = x/r_*, \quad \bar{y} = y/r_*$$

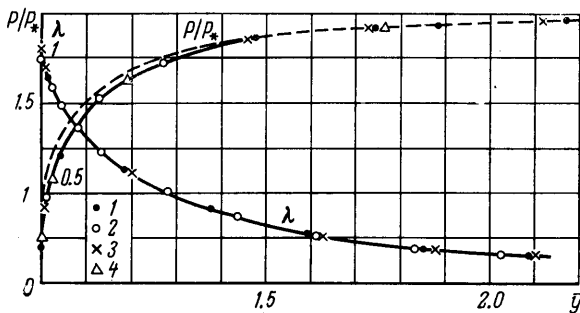
На фиг. 2 (обозначения, как на фиг. 1) показаны зависимости  $u$  и  $v$  (составляющих скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  декартовой системы координат) в сечении  $\bar{x} = 0.3489$  трансзвуковой части сопла от  $\bar{y}$  для сопел, изображенных на фиг. 1. Из этих фигур и из результатов расчетов следует, что при варьировании  $\theta_0$  от 30 до 60°,  $u_\infty$  от 0.2 до 0.07 течение в трансзвуковой области практически не зависит от этих параметров до значений  $\bar{y} \approx 0.45$ , что соответствует значениям  $R_2 \geq 0.4 r_*$ . Зависимость от  $\theta_0$  и  $u_\infty$  (отметим, что степень поджатия  $n = \sqrt{1/q(u_\infty)}$ ) начинает проявляться при  $\theta_0 \leq 15^\circ$  и  $u_\infty = 0.3$ . Таким образом, параметры течения в трансзвуковой области зависят в основном от  $R_2$  (при  $R_2 \geq 0.5 r_*$ ) и слабо зависят от величины  $\theta_0$  и  $n$  в диапазоне изменения  $\theta_0$  от 30 до 60° и  $n$  от 2.5 до 6. Этот вывод подтверждается данными дренажных испытаний сопел с  $R_2 = 2 r_*$  и различной формой дозвуковой части, приведенными в работе [3].

$k$	$R_2 = 2r_*$		$R_2 = r_*$		$R_2 = 0.5r_*$		$R_2 = 0.25r_*$	
	$u'(0)$	$u''(0)$	$u'(0)$	$u''(0)$	$u'(0)$	$u''(0)$	$u'(0)$	$u''(0)$
1.4	-1.5(0.13)	-0.35	-1.8(0.185)	-0.2	-2.05(0.16)	0.2	-2.15(0.15)	0.4
1.25	-1.55(0.13)	-0.35	-1.85(0.18)	-0.2	-2.15(0.18)	0.8	-2.3(0.1)	0.3
1.14	-1.6(0.14)	-0.2	-1.92(0.18)	-0.2	-2.35(0.18)	0.8		

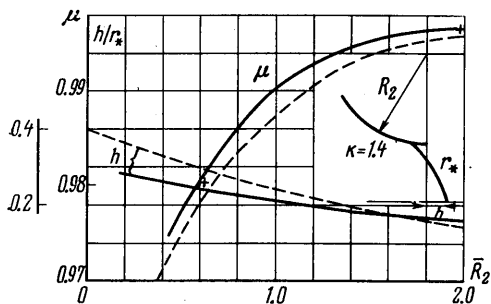
Для определения зависимости параметров трансзвукового течения от  $R_2$  при значениях  $k = 1.4, 1.25$  и  $1.14$  были рассчитаны контуры сопел с различными значениями  $R_2 = 2, 1, 0.5, 0.25 r_*$ . Значения  $u'(0)$  и  $u''(0)$ , соответствующие этим величинам  $R_2$ , приведены в таблице (в скобках указано  $u_\infty$ ). Отметим, что указанные значения  $R_2$  получены для линии тока с  $\psi = 0.06$  [4].

На фиг. 3 представлена зависимость давления на контуре, отнесенного к давлению в критическом сечении, от относительного радиуса  $\bar{y}$  для  $R_2 = 2r_*$  и различных значений  $u_\infty$ . На этой фигуре  $k = 1.4$ ,  $u'(0) = -1.5$ ,  $u''(0) = -0.35$  и 1 соответственно  $u_\infty = 0.06$ , 2 — 0.08, 3 — 0.13, 4 — 0.18. Из рассмотрения этой фигуры и результатов расчетов следует, что при одинаковых  $u'(0)$  и  $u''(0)$  форма трансзвуковой области одинакова примерно до значений  $\bar{y} = 1.15-1.2$  и в этой области значения  $p/p_*$  практически не зависят от формы трансзвуковой области при  $\bar{y} > 1.2$  и значений  $u_\infty$ . Интересно отметить, что заметное отличие  $p/p_*$  от значений, рассчитанных по одномерной теории, имеет место при  $\bar{y} < 1.25$ . При  $1.25 < \bar{y} < 1.5$   $p/p_*$ , рассчитанные по методу [1], не более чем на 2% отличаются от соответствующих значений, рассчитанных по одномерной теории (пунктирная линия на фиг. 3), а при  $\bar{y} > 1.5$  это различие составляет не более 1%.

Влияние показателя адиабаты на течение в дозвуковой и трансзвуковой области также проиллюстрировано на фиг. 3. Из этой фигуры следует, что при одинаковой форме сопла ( $R_2 = 2r_*$ ) значения коэффициента скорости в течениях с различными  $k$  ( $k$  варьировалось от 1.4 до 1.14) практически не различаются, хотя значения  $p/p_*$  могут различаться заметно. Этот результат находится в соответствии с одномерной теорией, согласно которой при одинаковых значениях  $\bar{y}$  в до и трансзвуковой областях значения коэффициента скорости, соответствующие различным  $k$ , отличаются незначительно, а отношение  $p/p_*$  довольно заметно. Таким образом, если в сопле с заданной геометрией рассчитано поле скоростей с некоторым значением  $k$ , то результаты этих расчетов можно использовать и при других значениях  $k$ .



Фиг. 3



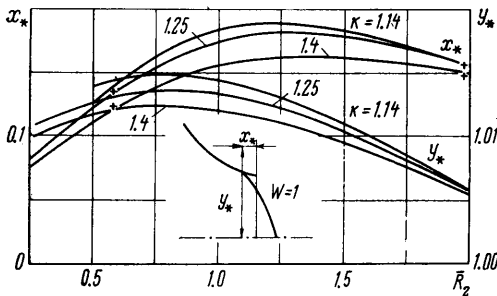
Фиг. 4

Проведенные расчеты позволяют построить зависимости некоторых важных газодинамических параметров от  $R_2$  и  $k$ . На фиг. 4—6 при различных значениях  $k$  представлены зависимости от  $R_2$  ( $\bar{R}_2 = R_2/r_*$ ) коэффициента расхода  $\mu$ , координат звуковой линии на контуре и оси, коэффициента скорости  $\lambda_0$  в точке контура, где угол наклона скорости равен нулю, тангенса угла наклона скорости в звуковой точке на контуре  $\zeta_*$ . Из представленных данных следует, что все приведенные на этих фигурах параметры довольно слабо зависят от  $k$ . Влияние  $k$  несколько увеличивается при уменьшении  $R_2$ . На фиг. 6 при  $\bar{R}_2 = 2$   $\lambda_0 = 1.1$ , а  $\zeta_* = 0.065$ .

На фиг. 7 построены звуковые линии в соплах с различными значениями  $R_2$ . Как видно из этой фигуры, при малых значениях  $R_2$  у звуковой линии имеется точка перегиба, которая возникает из-за близости угловой точки в поле течения [4, 5].

Известно, что при некоторых значениях  $R_1$  (см. фиг. 1) в окрестности точки сопряжения радиусного и цилиндрического участков возникает положительный градиент давления, величина которого характеризуется параметром  $C_p = 2(p - p_\infty) / \rho_\infty u_\infty^2$ . Для обеспечения безотрывного течения в пограничном слое величина  $C_p$  не должна превышать  $0.3 \div 0.4$ . Максимальное положительное значение  $C_{p_{т}}$ , как показано экспериментально

А. А. Сергиенко, В. Ф. Тереховым и В. М. Жировым, зависит в основном от  $R_1$  и слабо зависит от  $\theta_0$  и  $n$ . В данной работе была исследована зависимость  $C_{pm}$  от  $R_1$  и показателя адиабаты  $k$ . Было показано, что величина  $C_{pm}$  не зависит от  $k$ . Сравнение экспериментальных и расчетных данных показало их удовлетворительное согласие. Отметим, что в расчетах отмечено некоторое снижение  $C_{pm}$  при уменьшении  $n$ . Кроме того, в расчетах максимум  $C_{pm}$  является более пологим, чем в экспериментах, что, по-видимому,



Фиг. 5

связано с асимптотическим выходом на заданное значение  $\gamma_0$ , которое имеет место в расчетах. В результате расчетов было показано, что для любого значения  $n$  можно получить контур сопла, давление вдоль которого вниз по потоку монотонно убывает.

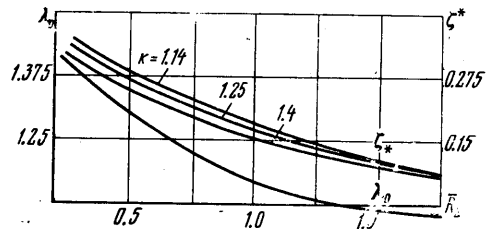
2. Исследование течения в сверхзвуковой области сопел с криволинейной поверхностью перехода. В используемых на практике соплах, трансзвуковая область которых выполнена в виде дуги окружности, поверхность перехода является криволинейной. В этом пункте исследуется влияние формы трансзвуковой области осесимметричного сопла на параметры течения в сверхзвуковой области. Для плоского случая аналогичное исследование, базирующееся на численном решении задачи об истечении сверхзвуковой струи из отверстия с плоскими стенками, проведено в работе [5]. Результаты, полученные для осесимметричного случая, базируются на численном решении обратной задачи теории сопла.

В результате численного решения обратной задачи определяется семейство линий тока и параметры на них как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой области сопла. Имея поле течения в сверхзвуковой области, нетрудно рассчитать координаты характеристик в поле течения и параметры на них. В переменных  $x, \psi$ , использованных в работе [1], уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{d\psi} = \pm \frac{\beta \pm \zeta}{1 + \zeta^2} \frac{1}{\rho u} \quad (2.1)$$

$$d\zeta \mp \frac{2\beta^2(1 + \zeta^2)d\beta}{(k+1)(1 + \beta^2)[1 + (k+1)/(k-1)\beta^2]} \pm \frac{\zeta(1 + \zeta^2)dx}{(\beta \pm \zeta)y} = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $\zeta = \operatorname{tg} \theta$ ,  $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ ,  $\rho$  — плотность, отнесенная к плотности в критическом сечении,  $u$  — составляющая скорости вдоль оси  $x$ , отнесенная к критической скорости звука, а верхний знак относится к характеристикам первого семейства. По формулам (2.1) и (2.2) были рассчитаны координаты и параметры на характеристиках второго семейства, выходящих из точек контура с  $\zeta = 0$ , на контурах с различными  $R_2$ . Результаты рас-



Фиг. 6

четов для различных  $\bar{R}_2$  ( $R_2 = 0.625, 1, 2$ ) представлены на фиг. 8 и 9. Из этих фигур следует, что при одинаковых  $R_2$  влияние  $k$  на геометрию и параметры на характеристиках невелико и несколько увеличивается по мере уменьшения  $R_2$ . На этих фигурах I соответствует  $k = 1.4$ , II —  $k = 1.25$ , III —  $k = 1.14$ .

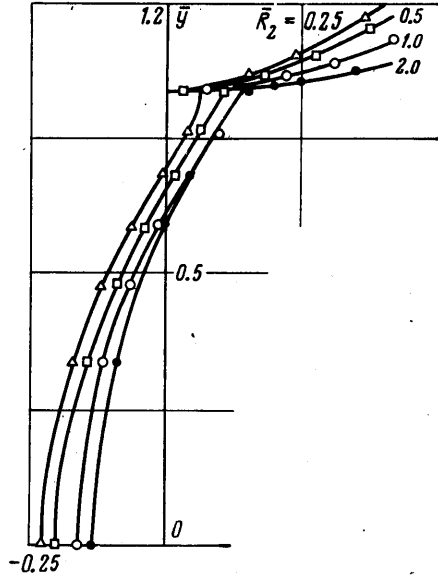
Немонотонность изменения  $\zeta$  на характеристиках, выходящих из точки  $\zeta = 0$  на контуре и приходящих на ось сопла (на оси  $\zeta = 0$  в силу симметрии) приводит к немонотонности изменения  $\beta$  вдоль характеристик. Первоначально  $\beta$  уменьшается, а затем начинает расти. В плоском случае факт немонотонного изменения  $\beta$  очевиден, в осесимметричном случае получен в результате численного расчета. Уменьшение  $\beta$  вдоль начального участка характеристики второго семейства в плоском случае приводит к тому, что на контуре сверхзвукового сопла с угловой точкой непосредственно за угловой точкой, возникает положительный градиент давления [3]. Представляет интерес и в осесимметричном случае исследовать обтекание угловой точки при наличии криволинейной поверхности перехода.

С использованием данных на характеристиках (фиг. 8, 9) были рассчитаны характеристики веера волн разрежения, возникающего при обтекании угловой точки с координатами  $\bar{x} = 0, \bar{y} = 1$ . Полученные таким образом характеристики веера волн разрежения использовались далее для расчета течения в заданном контуре сопла, выбранного из семейства сопел с угловой точкой и с прямолинейной характеристикой с  $\zeta = 0$  на выходе, рассчитанного из условия прямолинейности звуковой линии.

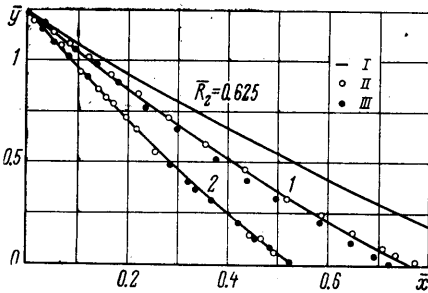
Методом характеристик [6] были проведены расчеты течения в соплах с угловой точкой с различными числами  $M_0$  и  $k$ . ( $M_0$  — число  $M$  на выходе сопла с угловой точкой и равномерным потоком на выходе).

Типичные результаты расчетов при  $M_0 = 5.5$  и  $k = 1.14$  представлены на фиг. 10. Из этой фигуры следует, что лишь в небольшой окрестности угловой точки до  $\bar{x} \approx 0.5-0.6$  распределение чисел  $M$  при наличии криволинейной звуковой линии отличается от распределения чисел в сопле с прямолинейной звуковой линией. На остальной части сопла при  $\bar{x} \geq 1$  распределения чисел  $M$  в соплах с различными  $R_2$  практически совпадают. Этот факт находится в соответствии с результатами работы [2] и с известными результатами о быстром заглушении начальных возмущений в сверхзвуковых соплах [7].

Кроме того, в осесимметричном случае в отличие от плоского [3] при наличии криволинейной звуковой линии в окрестности угловой точки не возникает положительного градиента давления. Отсутствие положительного градиента давления в осесимметричном сопле за угловой точкой связано, во-первых, с более сильным уменьшением величины  $|d\beta/dx|_2$  в веере волн (производной от  $\beta$  вдоль характеристики второго семейства), чем в плоском случае (ниже эти результаты получены аналитически), а во-вторых, с тем, что на начальном участке осесимметричного сопла с угловой точкой с прямолинейной звуковой линией и равномерным потоком на выходе угол наклона скорости первоначально увеличивается, а затем уменьшается (в отли-

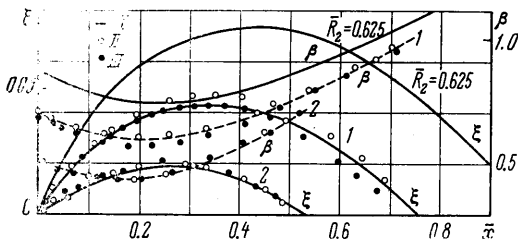


Фиг. 7



Фиг. 8

чие от плоского сопла, у которого на начальном участке угол остается постоянным). Отсутствие положительного градиента давления за угловой точкой в осесимметричном сопле показано экспериментально В. М. Жировым. Для проверки точности предложенного метода [1], который позволяет построить поле течения как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой области сопла, течение в сверхзвуковой области в контуре сопла, рассчитанного обратным методом, определялось методом характеристик. При этом в поле течения сопла, соответствующего линии тока  $\psi = 0.06$  для распределения скорости по оси (1.1) при  $u_\infty = 0.1$ ,  $\bar{u}_\infty = 1.9$  и  $1/b = 3.5$ , была рассчитана характеристика второго семейства, выходящая из точки  $\zeta = 0$ , и по известным параметрам на характеристике и известным координатам контура (рассчитанным обратным методом) было определено методом характеристик течение в заданном контуре. Во всех точках поля течения результаты расчетов обоими численными методами совпали с точностью до  $0.2 \div 0.5\%$ .



Фиг. 9

Вопрос о возможности возникновения положительного градиента давления в окрестности угловой точки и в областях, где имеется разрыв вторых производных на контуре, можно исследовать аналитически. Выведем первоначально соотношения, связывающие производные на контуре с производными вдоль характеристик. Рассмотрим треугольник 0.13 (фиг. 11, а). Вдоль характеристик первого (13) и второго (01) семейств выполняются уравнения совместности

$$d\zeta \pm f(\beta, \zeta) d\beta \pm \varphi(\zeta, \beta, y) dS = 0 \quad (2.3)$$

где

$$f(\beta, \zeta) = \frac{2\beta^2(1 + \zeta^2)}{(k + 1)(1 + \beta^2)[1 + (k - 1)/(k + 1)\beta^2]},$$

$$\varphi(\beta, \zeta, y) = j \frac{\zeta(1 + \zeta^2)}{y\sqrt{1 + \beta^2}}$$

Параметры в точках 0 1 и 3 связаны между собой следующими соотношениями:

$$\beta_3 = \beta_0 + \left(\frac{d\beta}{dS}\right)_w \Delta S, \quad \zeta_3 = \zeta_0 + \left(\frac{d\zeta}{dS}\right)_w \Delta S \quad (2.4)$$

$$\zeta_1 = \zeta_0 + \left(\frac{d\zeta}{dS}\right)_2 \Delta S_2 = \zeta_0 + \left[\varphi_0(\zeta, \beta, y) - f_0(\beta, \zeta) \left(\frac{d\beta}{dS}\right)_2\right] \Delta S_2 \quad (2.5)$$

$$\beta_1 = \beta_0 + \left(\frac{d\beta}{dS}\right)_2 \Delta S_2$$

Здесь  $(d\beta/dS)_w$  и  $(d\beta/dS)_2$  — производные  $\beta$  вдоль стенки и характеристики второго семейства соответственно. Используя соотношения вдоль характеристик первого семейства

$$\zeta_3 - \zeta_1 - f(\beta, \zeta)(\beta_3 - \beta_1) + \varphi(\zeta, \beta, y)\Delta S_1 = 0$$

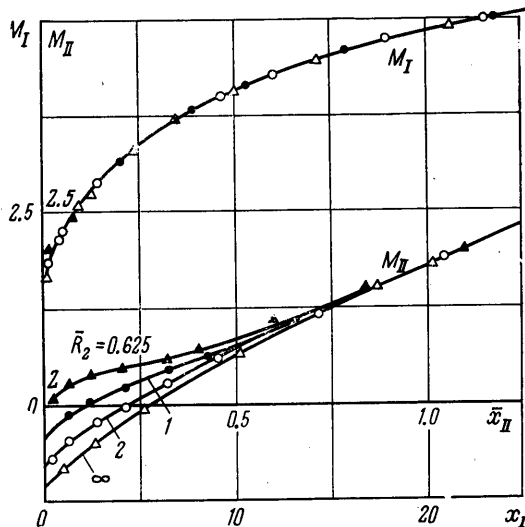
и производя несложные преобразования, получаем

$$\left(\frac{d\beta}{dS}\right)_w = \frac{\sqrt{\beta^2 + 1}}{\beta} \left(\frac{d\beta}{dS}\right)_2 + \frac{1}{f(\beta, \zeta)} \left(\frac{d\zeta}{dS}\right)_w \quad (2.6)$$

Формула (2.6) позволяет по известному значению  $(d\beta/dS)_2$  на характеристике второго семейства и значению  $(d\zeta/dS)_w$  на контуре определить значение  $(d\beta/dS)_w$  вдоль контура. В частности, если в точке на контуре имеет место разрыв второй производной, то разрыв производной  $d\beta/dS$  на контуре определяется из соотношения

$$\left[ \frac{d\beta}{dS} \right] = \frac{1}{f(\beta, \zeta)} \left[ \frac{d\zeta}{dS} \right] \quad (2.7)$$

Из формулы (2.6) следует, в частности, что на цилиндрическом участке, примыкающем к контуру, выполненному в виде дуги окружности, должен возникать положительный градиент давления, так как на характеристиках второго семейства, выходящих из точки сопряжения  $d\beta/dS < 0$ . На фиг. 12 представлено распределение чисел  $\beta$  вдоль цилиндрического участка при различных значениях  $R_2$ , рассчитанное методом характеристик. Как видно из этой фигуры, в начальной части цилиндрического участка имеет место течение сжатия, после которой число  $\beta$  увеличивается и затем вновь уменьшается. Такой характер изменения числа находится в соответствии с колебательным характером распространения малых возмущений в соплах [7]. Существование течения сжатия приводит к пересечению характеристик второго семейства, выходящих из точек контура, к образованию ударных волн и нарушению устойчивости счета, который производился безвихревым методом характеристик. Наличие большого положительного градиента давления на начальной области цилиндрического участка может привести к отрыву пограничного слоя в этой области. Схема течения, позволяющая представить причину возникновения положительного градиента давления, представлена на фиг. 12. Отметим, что согласно формуле (2.7) при скруглении

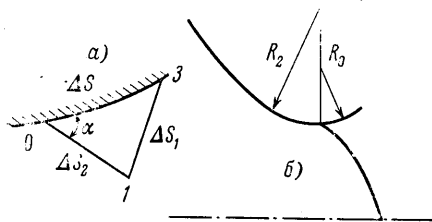


Фиг. 10

угловой точки радиусом  $R^0$  в точке сопряжения с дугой окружности радиуса  $R_2$  (см. фиг. 11, б) градиент давления, несмотря на наличие разрыва в производной  $d\beta/dS$ , остается отрицательным. Величина  $(d\beta/dS)_{2w}$  в этом случае определяется по формуле

$$\left( \frac{d\beta}{dS} \right)_{2w} = \left( \frac{d\beta}{dS} \right)_{1w} + \frac{1}{f(\beta, \zeta)} \times \left[ \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right] \quad (2.8)$$

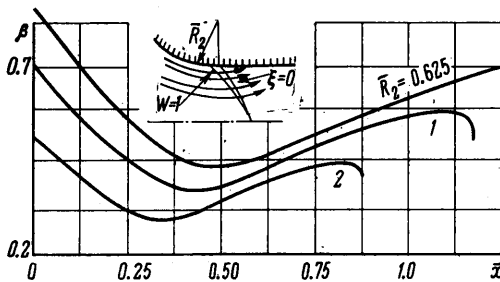
На контуре сопла с угловой точкой величина  $(d\zeta/dS)_w$  максимальна в угловой точке, а вниз по потоку уменьшается до нуля и становится от-



Фиг. 11

рицательной. Этим объясняется уменьшение производной  $dM/dx$  вдоль контура сопла, что при наличии отрицательных производных  $(d\beta/dx)_2$  вдоль характеристик второго семейства (особенно при малых  $R_2$ ) приводит к появлению областей с почти постоянным числом  $M$  (фиг. 10).

Выше в результате расчетов методом характеристик было показано, что в осесимметричном случае на контуре сопел с угловой точкой положительного градиента давления не возникает. Этот факт можно установить аналитически, не проводя расчетов методом характеристик. Из рассмотрения в окрестности угловой точки характеристического треугольника можно получить дифференциальное уравнение для производных вдоль характеристик веера волн разрежения в угловой точке, позволяющее определить значение этих производных на любой характеристике по известным значениям на некоторой начальной характеристике. Выпишем без вывода это дифференциальное уравнение для плоского и осесимметричного случаев



Фиг. 12

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{d\alpha}{dx} \right) = A \frac{d\alpha}{dx} + B \quad (2.9)$$

где

$$A = \frac{k+1}{k-\cos 2\alpha} \left[ \frac{\cos(\theta+\alpha)}{\sin 2\alpha \cos(\theta-\alpha)} + \frac{2 \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \right], \quad B = j \frac{\sin(\theta+\alpha)}{2 \cos(\theta-\alpha)}$$

$j = 0$  в плоском и  $j = 1$  в осесимметричном случае, а  $\alpha$  и  $\theta$  — значение угла Маха и угла наклона скорости в угловой точке.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\left( \frac{d\alpha}{dx} \right)_2 = \exp \int_{\alpha_0}^{\alpha} A d\alpha \left[ \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)_{02} + \int_{\alpha_0}^{\alpha} B \left( \exp - \int_{\alpha_0}^{\alpha} A d\alpha \right) d\alpha \right] \quad (2.10)$$

где  $(d\alpha/dx)_{02}$  — значения  $d\alpha/dx$  на некоторой начальной характеристике. Для характеристик, выходящих из точек  $\zeta = 0$  контура трансзвуковой части сопла, выполненного дугами окружности с различными значениями  $R_2$ , были рассчитаны значения  $(d\alpha/dx)_{02}$  и по уравнению (2.10) определены значения  $d\alpha/dx$  на характеристиках веера, соответствующих различным  $\theta$  в угловой точке. Из результатов расчета следует, что производная  $d\alpha/dx$  резко уменьшается по мере увеличения  $\theta$  и при  $R_2 = 2r_*$  становится отрицательной при  $\theta \geq 0.05$  (что соответствует числу  $M_0 \geq 1.5$ ), т. е. производная  $d\alpha/dx$  меняет знак. Для других значений  $R_2$  величина  $d\alpha/dx$ , хотя и остается положительной до  $\theta \approx 0.7$ , но мала. В силу соотношения (2.6) и учитывая тот факт, что в соплах с угловой точкой и равномерным потоком на выходе  $d\zeta/dS$  в окрестности угловой точки положительно, получаем, что, начиная с некоторых значений  $\theta_*$  за угловой точкой, градиент давления должен быть отрицателен. Величина  $\theta_*$  зависит от  $R_2$  и увеличивается при уменьшении  $R_2$ . В результате расчетов градиентов скорости вдоль характеристик второго семейства по формуле (2.10) и расчетов градиентов скорости вдоль контура с угловой точкой по формуле (2.6) было показано, что при  $R_2 \geq 0.5r_*$  и  $M_0 \geq 1.5$  на контуре осесимметричных сопел с угловой точкой градиент давления отрицателен.

Из формулы (2.10) следует, что в осесимметричном случае производная  $d\alpha/dx$  уменьшается сильнее, чем в плоском (что связано с наличием второго члена в квадратных скобках), и может становиться отрицательной даже при положительном значении  $(d\alpha/dx)_0$ . Кроме того, в плоском случае в окрестности угловой точки  $(d\zeta/dS)_w \approx 0$ , в то время как в осесимметричном  $(d\zeta/dS)_w > 0$ . Изложенные соображения объясняют наличие положительного градиента давления в плоском случае с угловой точкой [3] в ее окрестности и отсутствие его при  $R_2 \geq 0.5r_*$  и  $M_0 \geq 1.5$  в осесимметричном сопле.

**3. Сравнение расчетных и экспериментальных результатов.** В работе [3] приведены результаты экспериментальных измерений коэффициента расхода и координат звуковой линии на контуре. Экспериментальные данные работы [3] сравниваются с расчетными значениями, полученными в

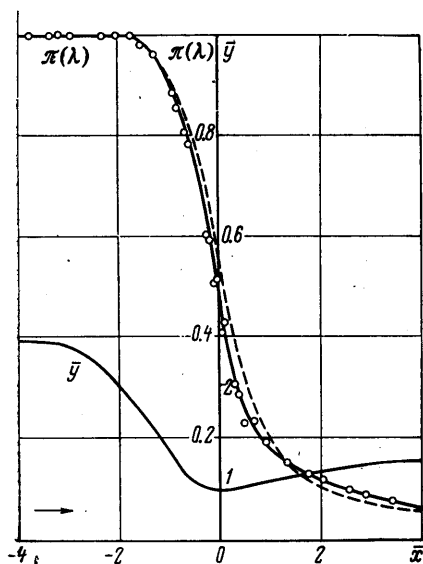


этой работе, на фиг. 4 и 5 (экспериментальные данные работы [3] показаны крестиком). На фиг. 4 представлены также экспериментальные значения коэффициента расхода и координат звуковой линии на оси, измеренные А. А. Сергиенко (пунктирная кривая). Во всех случаях имеет место хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных.

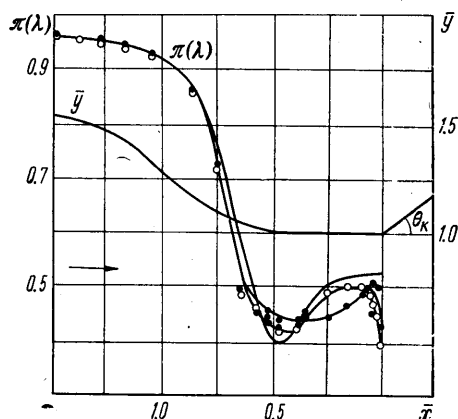
Для экспериментальной проверки метода расчета, предложенного в работе [1], были проведены измерения распределения давления на контуре осесимметричных сопел, течение в которых рассчитано при численном решении обратной задачи. Были исследованы три сопла. Контуры двух из этих сопел рассчитаны при решении обратной задачи для распределения скорости по оси симметрии

$$u = u_{\infty} + \frac{1 - u_{\infty}}{1 + Ax^2} \quad (3.1)$$

с  $A = 10$ ,  $u_{\infty} = 0.1$ , обеспечивающего в критическом сечении при идеальном невязком течении прямолинейную звуковую линию. Контуры дозвуковых частей этих моделей выполнялись по линиям тока с  $\psi = 0.02$  и  $\psi = 0.06$  [1]. Как показано в работе [1], для распределения (3.1) на линии тока с  $\psi = 0.02$  давление монотонно убывает, а на линии тока с



Фиг. 13



Фиг. 14

$\psi = 0.06$  к прямолинейной звуковой линии примыкает местная сверхзвуковая зона, в которой возникает положительный градиент давления. Контур третьей модели выполнен по линии тока с  $\psi = 0.06$ , соответствующей распределению скорости на оси (1.1) с  $\bar{u}_{\infty} = 1.9$ ,  $u_{\infty} = 0.1$ ,  $1/b = 3.5$ . В этом случае звуковая линия является криволинейной. Экспериментальное исследование течения в этих соплах было проведено В. М. Жиравовым. В результате специальных экспериментов было показано, что при наличии угловой точки в критическом сечении распределение давления в трансзвуковой области, расположенной вверх по потоку от угловой точки в некоторой ее окрестности зависит от угла наклона контура в сверхзвуковой части. Передача низкого давления вверх по потоку происходит по дозвуковой части пограничного слоя. В связи с этим к первым двум моделям дозвуковой части были приставлены в сверхзвуковой области конические участки с полууглами раскрытия  $\theta_k = 12$  и  $20^\circ$ .

Распределение статического давления по контуру двух из исследуемых сопел представлено на фиг. 13 и 14 в виде отношения  $p/p_0 = \pi(M)$ . По оси абсцисс отложено относительное расстояние  $\bar{x} = x/r_*$  точек, в которых производилось измерение давления, от критического сечения. Из рассмотрения фиг. 13, на которой представлено распределение давления в до- и сверхзвуковой областях сопла с криволинейной поверхностью перехода, рассчитанного по распределению на оси (1.1) с  $\bar{u}_\infty = 1.9$ ,  $u_\infty = 0.1$  и  $1/b = 3.5$  (контур сопла показан на этой же фигуре), видно, что измеренное распределение давления хорошо совпадает с рассчитанным по предложенному методу. Наибольшее отличие расчетных (сплошная кривая) и экспериментальных данных (светлые кружочки) имеет место в трансзвуковой области и достигает 5%. На этой фигуре пунктирной кривой показано распределение давления, рассчитанное по одномерной теории.

На фиг. 14 представлено расчетное и экспериментальное распределение давления на контуре сопла с  $\psi = 0.06$ , рассчитанного по распределению давления на оси (3.1) с прямолинейной звуковой линией (контур сопла показан на этой же фигуре). Отличие измеренного распределения давления (светлые кружочки для  $\theta_h = 12^\circ$  и черные для  $\theta_h = 20^\circ$ ) от расчетного (сплошная кривая) начинает проявляться при  $\bar{x} < 0.6$ . Распределение давления при  $\theta_h = 12^\circ$  отличается от расчетного при  $\bar{x} > 0.15$  примерно на 5%. При  $\bar{x} < 0.15$  вблизи стенки происходит разгон потока до сверхзвуковой скорости, соответствующей  $\bar{p} \approx 0.4$ . Таким образом, экспериментально показано существование зон с положительными градиентами давления и местной сверхзвуковой зоной, которые были предсказаны расчетом. Сопоставление расчетных экспериментальных данных для двух контуров сопел с  $\psi = 0.02$  и  $\psi = 0.06$ , рассчитанных по распределению на оси (3.1) показывает, что в небольшой окрестности критического сечения на распределение давления оказывает существенное влияние наличие большого отрицательного градиента давления на угловой точке сопла, который передается по дозвуковой части пограничного слоя вверх по потоку. Кроме того, из анализа расчетных и экспериментальных данных и из данных, представленных на фиг. 13 и 14, следует, что расчетные и экспериментальные данные хорошо совпадают между собой в тех областях, где влияние вязкости невелико. В трансзвуковых пологих (близких к цилиндрическим) областях, в которых небольшие отклонения контура от расчетного (за счет погрешностей изготовления или толщины вытеснения пограничного слоя) приводят к большим изменениям давления, наблюдается заметное различие в расчетных и экспериментальных данных. Влияние вязкости в пологих трансзвуковых областях проявляется особенно сильно. Отметим еще, что, несмотря на наличие большого положительного градиента давления в трансзвуковой области, отрыва пограничного слоя не происходит; это было установлено в результате специальных экспериментов с масляными покрытиями.

В работе [3] были проведены измерения распределения давления в до- и трансзвуковой областях сопла с  $R_2 = 2r_*$ ,  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $n = 7.9$  и  $R_2 = 0.625r_*$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$  и  $n = 9.76$ . По предложенному методу [4] было рассчитано распределение давления на этих контурах. Сравнение рассчитанного распределения давления с экспериментальными данными работы [3] показало их хорошее соответствие. В работе [3] распределение давления было измерено также и на сверхзвуковом коническом сопле. В трансзвуковой области этих сопел были рассчитаны характеристики второго семейства, выходящие из точек  $\xi = 0$  (см. п. 2), и затем методом характеристик рассчитано течение в коническом сопле и распределение давления на стенке, которое с точностью не менее 3% совпало с экспериментальным распределением, полученным в работе [3].

Поступило 27 IV 1969

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пирумов У. Г. Расчет течения в сопле Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
2. Зауэр Р. Введение в газовую динамику. М., Физматгиз, 1947.
3. Back, Massier, Gier Comparison of measured and predicted flows through conical supersonic nozzles, with emphasis on transonics region. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 9. (Рус. перев. Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 9.)
4. Франкль Ф. И. Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками. Докл. АН СССР, 1947, т. 58, № 3.
5. Камзолов В. Н., Пирумов У. Г. Расчетное исследование сверхзвуковой струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками. ПМТФ, 1967, № 2.
6. Кацкова О. Н., Наумова И. П., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. Изд-во ВЦ АН СССР, 1961.
7. Пирумов У. Г., Жигулева И. С. Исследование распространения малых возмущений в сверхзвуковых конических соплах. Оборонгиз, 1959.