

ОБТЕКАНИЕ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ НЕРАВНОВЕСНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

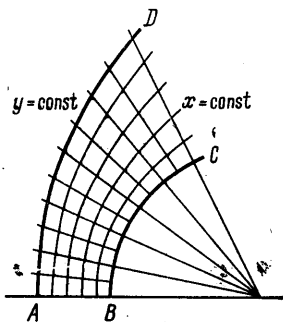
А. Л. КОСОРУКОВ

(Москва)

Рассматривается влияние колебательной релаксации на обтекание головной части затупленного тела сверхзвуковым потоком газа. Задача решается численным методом. При выводе дифференциального уравнения для колебательной энергии учитывались два механизма возбуждения колебаний: переход поступательной энергии в колебательную и обмен колебательными квантами между различными молекулами.

Расчеты производились для воздуха. В качестве затупленного тела использовались сфера и эллипсоиды вращения.

При обтекании носка затупленного тела сверхзвуковым потоком газа в связи с резким повышением температуры за ударной волной возникают различные физико-химические процессы: возбуждение вращательных и колебательных степеней свободы молекул, диссоциация, ионизация и другие химические реакции. В ряде работ изучалась колебательная релаксация за прямой ударной волной [1-5], а также за ударной волной, возникающей при обтекании осесимметричного затупленного тела [6-9]. В данной работе представлены расчеты методом сеток [10] течения газа около носка осесимметричного затупленного тела с учетом колебательной релаксации. Вращение молекул предполагается равновесным, химических реакций нет. Расчеты приведены для воздуха, имеющего состав: O_2 — 23.14%, N_2 — 75.52%, Ar — 1.34%, хотя применяемая методика не зависит от состава смеси. Численный алгоритм решения краевой задачи предложен К. И. Бабенко и В. В. Русановым.



Фиг. 1

1. Решение задачи ищется в области $ABCD$ (фиг. 1). То обстоятельство, что линия CD свободна от граничных условий, приводит к большим трудностям при написании численного алгоритма решения стационарной задачи. Поэтому использован более изученный метод установления, в котором стационарное решение ищется как предел нестационарного при $t \rightarrow \infty$. Уравнения колебательной релаксации и уравнения газодинамики в цилиндрической системе координат, жестко связанной с обтекаемым телом, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial z} + v \frac{\partial p}{\partial r} + p\gamma \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{p}{T c_v} \left(\frac{c_1}{\mu_1} Q_1 + \frac{c_2}{\mu_2} Q_2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{RT}{\mu c_v} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{c_v} \left(\frac{c_1}{\mu_1} Q_1 + \frac{c_2}{\mu_2} Q_2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + u \frac{\partial E_1}{\partial z} + v \frac{\partial E_1}{\partial r} = \frac{\rho \rho^\circ t^\circ}{\rho_0 \tau_{11}} [E_1(T) - E_1] - \frac{\rho \rho^\circ t^\circ c_2}{\rho_0 \tau_{12} c_1} [E_2(T) - E_2] = Q_1$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} + u \frac{\partial E_2}{\partial z} + v \frac{\partial E_2}{\partial r} = \frac{\rho \rho^\circ t^\circ}{\rho_0 \tau_{22}} [E_2(T) - E_2] - \frac{\rho \rho^\circ t^\circ c_1}{\rho_0 \tau_{21} c_2} [E_1(T) - E_1] = Q_2$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$z = \frac{z'}{r^\circ}, \quad r = \frac{r'}{r^\circ}, \quad p = \frac{p'}{p^\circ}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho^\circ}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{p^\circ/\rho^\circ}}$$

$$v = \frac{v'}{\sqrt{p^\circ/\rho^\circ}}, \quad t = \frac{t'}{r^\circ} \left(\frac{p^\circ}{\rho^\circ} \right)^{1/2} = \frac{t'}{t^\circ}$$

где r° — характерный размер тела, p° и ρ° — давление и плотность набегающего потока на высоте H км. В уравнениях (1.1) и в дальнейшем индексы 1, 2, 3 относятся к O_2 , N_2 , Ar соответственно, R — газовая постоянная, μ — грамм-молекулярный вес воздуха, c_i — весовые концентрации, $\rho_0 = 0.1225 \cdot 10^{-2}$ г/см³ — характерная плотность, введенная для того, чтобы времена релаксации τ_{ij} представить в виде функции от T , исключив зависимость их от плотности газа; c_v — неполная удельная теплоемкость при постоянном объеме

$$c_v = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu} - \frac{c_3}{\mu_3} R, \quad c_p = c_v + \frac{R}{\mu}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Уравнения для колебательной энергии E_1 и E_2 получены согласно с [41]. В них $E_i(T)$ — равновесная колебательная энергия при температуре T

$$E_i(T) = \frac{N h \nu_i}{\exp(h \nu_i / k T) - 1} = \frac{R T_i^*}{\exp \theta_i - 1}, \quad T_i^* = \frac{h \nu_i}{k}$$

Здесь N — число Авогадро, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, ν_i — частота колебаний молекулы, T_i^* — характеристическая температура. Времена релаксации использовались в предварительно затабулированном виде.

Граничные условия на ударной волне с учетом движения фронта волны будут иметь вид

$$\rho(u_v - D) = \rho_\infty(u_{v\infty} - D), \quad \rho(u_v - D)^2 + p = \rho_\infty(u_{v\infty} - D)^2 + p_\infty$$

$$1/2(u_v - D)^2 + w = 1/2(u_{v\infty} - D)^2 + w_\infty, \quad u_\tau = u_{\tau\infty}, \quad E_1 = E_2 = E_\infty$$

Здесь w — энтальпия, u_v , u_τ — нормальная и тангенциальная составляющие скорости на ударной волне, u_∞ — скорость набегающего потока. На теле имеем условие непротекания

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

где \mathbf{n} — вектор, нормальный к телу.

Введем новую систему координат x, y, t , выбранную таким образом, чтобы форма исследуемой области между волной и телом не зависела от отыскиваемого решения. В новых переменных $x = 0$ соответствует поверхности тела, $x = 1$ — ударной волне (фиг. 1). Решение будем искать в области

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq y_1, \quad t_0 \leq t$$

Замену переменных определим формулами

$$\begin{aligned} z &= 1 - (1 - 1/2y^2) [xF(y, t) + (1 - x)G(y)] \\ r &= y[xF(y, t) + (1 - x)G(y)], \quad t' = t \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функция $G(y)$ задается так, что уравнения

$$z(0, y, t) = 1 - (1 - 1/2y^2)G(y), \quad r(0, y, t) = yG(y)$$

будут параметрическими уравнениями обтекаемого тела.

Уравнения

$$z(1, y, t) = 1 - (1 - 1/2y^2)F(y, t), \quad r(1, y, t) = yF(y, t)$$

являются параметрическими уравнениями ударной волны, а $F(y, t)$ — искомая функция.

Численный алгоритм получен способом, аналогичным описанному в [10]. Введем в пространстве x, y, t сетку с шагами

$$h_1 = \Delta x = 1/M, \quad h_2 = \Delta y = y_1/L, \quad \tau = \Delta t$$

где M и L — целые. Обозначим

$$\begin{aligned} x_m &= mh_1, \quad y_l = lh_2, \quad t^n = t^{n-1} + \tau \\ \kappa_1 &= \tau/h_1, \quad \kappa_2 = \tau/h_2 \quad (m = 0, 1, \dots, M; l = 0, 1, \dots, L) \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$f_{ml}^n = f(x_m, y_l, t^n)$$

Значения функций в точках, не совпадающих с точками выбранной сетки, будем находить интерполяцией

$$f_{m+\frac{1}{2}, l}^{n+\frac{1}{2}} = 1/4(f_{m+1, l}^{n+1} + f_{ml}^{n+1} + f_{m+1, l}^n + f_{ml}^n)$$

Совокупность точек сетки, имеющих одинаковый индекс n , назовем «слоем». Аппроксимируем дифференциальные уравнения разностными. Для этого условимся заменить производные следующими разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{m+\frac{1}{2}, l}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2\tau}(f_{m+1, l}^{n+1} + f_{ml}^{n+1} - f_{m+1, l}^n - f_{ml}^n) - \frac{\sigma}{8h_2}(f_{m+1, l+1}^n - \\ &\quad - 2f_{m+1, l}^n + f_{m+1, l-1}^n + f_{ml+1}^n - 2f_{ml}^n + f_{ml-1}^n) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2}, l}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\alpha}{h_1}(f_{m+1, l}^{n+1} - f_{ml}^{n+1}) + \frac{\beta}{h_1}(f_{m+1, l}^n - f_{ml}^n) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{m+\frac{1}{2}, l}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\alpha}{4h_2}(f_{m+1, l+1}^{n+1} + f_{ml+1}^{n+1} - f_{m+1, l-1}^{n+1} - f_{ml-1}^{n+1}) + \\ &\quad + \frac{\beta}{4h_2}(f_{m+1, l+1}^n + f_{ml+1}^n - f_{m+1, l-1}^n - f_{ml-1}^n) \\ &\quad (0 \leq \beta \leq \alpha, \alpha + \beta = 1, 0 \leq \sigma < 1) \end{aligned}$$

Эти разностные соотношения аппроксимируют производные с точностью до $O(\tau^2) + \sigma O(\tau)$ и $O(\tau^2) + (\alpha - \beta)O(\tau)$ соответственно, т. е. при $\sigma = 0$ и $\alpha = \beta$ имеем аппроксимацию второго порядка точности.

Прежде чем говорить об аппроксимации дифференциальных уравнений разностными, необходимо заметить, что уравнения колебательной релаксации имеют существенную особенность, а именно это есть уравнения с малым параметром при производной $\delta = \tau_{ij}\rho_0 / t^\circ\rho^\circ$, порядок величины которого $10^{-5} - 10^{-3}$ на поверхности Земли и на высоте $H = 40$ км соответственно.

Систему (1.1) можно формально разделить на две связанные между собой системы. В первой системе уравнений нет малого параметра

$$\frac{\partial X}{\partial t} + A \frac{\partial X}{\partial x} + B \frac{\partial X}{\partial y} + C = 0 \quad (1.3)$$

$$A = \frac{1}{J\rho} \begin{vmatrix} U & 0 & r_y \\ 0 & U & -z_y \\ p\gamma r_y & -p\gamma z_y & \rho U \end{vmatrix}, \quad B = \frac{1}{J\rho} \begin{vmatrix} V & 0 & -r_x \\ 0 & V & z_x \\ -p\gamma r_x & p\gamma z_x & \rho V \end{vmatrix}$$

$$C = \|0, 0, C_3\|, \quad X = \|u, v, p\|$$

$$C_3 = p\gamma \frac{v}{r} + \frac{p}{c_v T} \left(\frac{c_1}{\mu_1} Q_1 + \frac{c_2}{\mu_2} Q_2 \right), \quad J = z_x r_y - z_y r_x$$

$$U = (u - z_t)r_y + (v - r_t)(-z_y), \quad V = (u - z_t)(-r_x) + (v - r_t)z_x$$

Во второй системе уравнений

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{U}{J} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{V}{J} \frac{\partial Y}{\partial y} + Q = 0 \quad (1.4)$$

$$Y = \|T, E_1, E_2\|, \quad Q = \|Q_0, -Q_1, -Q_2\|$$

$$Q_0 = \frac{RT}{\mu c_v} \operatorname{div} u + \frac{1}{c_v} \left(\frac{c_1}{\mu_1} Q_1 + \frac{c_2}{\mu_2} Q_2 \right)$$

малый параметр входит в выражение для свободных членов.

Для решения системы уравнений (1.3) можно использовать метод Эйлера с пересчетом, который дает хорошие результаты для уравнений такого типа. При решении же систем с малым параметром из соображений устойчивости приходится выбирать шаг $\tau < \delta$.

Для того чтобы можно было брать шаг намного больше δ , при аппроксимации системы уравнений (1.4) свободный член сделаем зависящим от искомых величин, а остальные коэффициенты будем вычислять на полуделом слое. Такой метод дает правильное решение при $t \rightarrow \infty$. Свободный член возьмем в виде

$$Q(Y_0, p_{m+\frac{1}{2},l}^{n+\frac{1}{2}})$$

Здесь

$$Y_0 = \frac{1}{2}\alpha(Y_{ml}^{n+1} + Y_{m+1,l}^{n+1}) + \frac{1}{2}\beta(Y_{ml}^n + Y_{m+1,l}^n)$$

При аппроксимации системы уравнений (1.3) все коэффициенты будем вычислять на полуделом слое. Две системы разностных уравнений решаются раздельно. Аналогичный способ решения подобных систем уравнений использовался в [12].

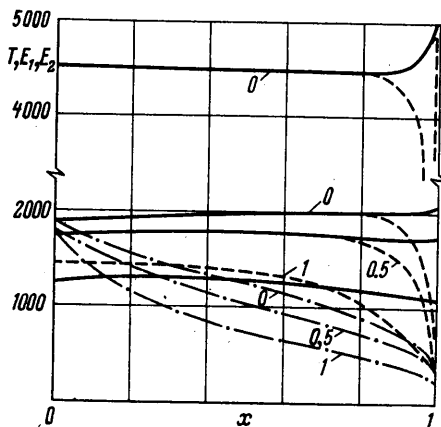
Применяемый метод включает в себя два итерационных процесса, которые можно проследить на системе уравнений, аппроксимирующей (1.3): а) решение уравнения с постоянными коэффициентами A, B, C , причем в качестве неизвестных оставляем только величины с индексом l , а вели-

чины с индексами $l \pm 1$ относим к предыдущей итерации, б) учет влияния коэффициентов путем подправления их после каждой итерации.

Эти же итерационные процессы будут участвовать и в решении уравнений (1.4) с тем отличием, что свободные члены будут зависеть от искомым величин. Процесс итераций для двух систем разностных уравнений построим следующим образом: первая итерация — решаем уравнения, соответствующие системе (1.4), считая $U/J, V/J, p$ известными; по найденным значениям вектора Y вычисляем коэффициенты C и решаем уравнения, соответствующие системе (1.3) с постоянными коэффициентами; вторая итерация: u, v, p , полученные после первой итерации, используются для подправления коэффициентов в обеих системах уравнений, после чего вычисления прodelываются в том же порядке и т. д.

Для того чтобы записать разностные уравнения в том виде, в котором они итерированы, сделаем следующие обозначения: s — номер итерации,

$f_{ml}^{n+(s)}$ — результат итерации с номером s



Фиг. 2

$$f_{ml}^{n+(0)} = f_{ml}^n, \quad f_{ml}^{n+(s/2)} =$$

$$= 1/2(f_{ml}^n + f_{ml}^{n+(s)}), \quad f_{ml}^{n+(s)} = f_{ml}^{n+1}$$

Здесь s — номер последней итерации. Затем заменим в разностных уравнениях f_{ml}^{n+1} на $f_{ml}^{n+(s+1)}$, а f_{ml}^{n+1} — на $f_{ml}^{n+(s)}$.

Коэффициенты будем вычислять по значениям $f_{ml}^{n+(s/2)}$, кроме свободных членов в уравнениях, соответствующих системе (1.4). Тогда разностный аналог уравнений (1.3) будет иметь вид

$$aX_{m+1,l}^{n+(s+1)} + bX_{ml}^{n+(s+1)} = c \quad (1.5)$$

Здесь a, b, c вычисляются по величинам с предыдущей итерации. Таким же образом уравнения (1.4) приводятся к виду

$$(1 - 2\chi_{1/2,l} U/J) Y_{ml}^{n+(s+1)} + K_{m+1/2,l}^{n+(s/2)} + 2\tau Q(Y_{0,m+1/2,l}^{n+(s/2)}) = 0 \quad (1.6)$$

Здесь $K_{m+1/2,l}^{n+(s/2)}$ вычисляется по величинам с предыдущей итерации.

2. Нелинейные уравнения (1.6) будем решать методом Ньютона. Представим их для этого в виде

$$P(T, E_1, E_2) = 0$$

(индексы, относящиеся к сетке, опускаем). Тогда решение находится с помощью обычной формулы

$$Y^{k+1} - Y^k = -\{grad P\}^{-1}P$$

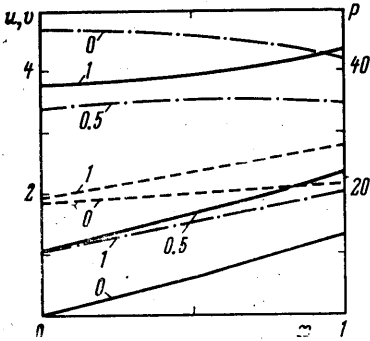
Процесс последовательных приближений считаем окончанным, когда $Y^{k+1} - Y^k < \varepsilon_1$. Граничные условия для T на ударной волне берутся с s итерации.

Система (1.5) с граничными условиями на теле

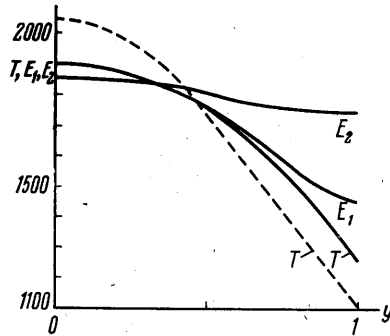
$$\gamma_0 X_0 = 0, \quad \gamma_0 = \{r_y, -z_y, 0\}$$

и условиями сохранения массы, импульса и энергии на волне решается методом прогонки [10].

Описанный выше метод решения задачи не исключает всех трудностей. Вследствие того что за ударной волной колебательная энергия резко возрастает, градиенты колебательной энергии оказываются очень большими в окрестности ударной волны (фиг. 2). При решении задачи с равномерной сеткой это может привести к тому, что на истинное решение наложится некоторая пилообразная кривая. Ясно, что, для того чтобы сохранить порядок аппроксимации дифференциальных уравнений разностными, нужно брать мелкий шаг в тех местах, где велики градиенты искомых функций, поэтому была использована неравномерная сетка по x со сгущением точек около волны.



Фиг. 3



Фиг. 4

Замена переменных в отличие от формул (1.2) определялась следующими соотношениями:

$$z = 1 - (1 - 1/2y^2) [\zeta(x, \epsilon)F(y, t) + (1 - \zeta(x, \epsilon))G(y)]$$

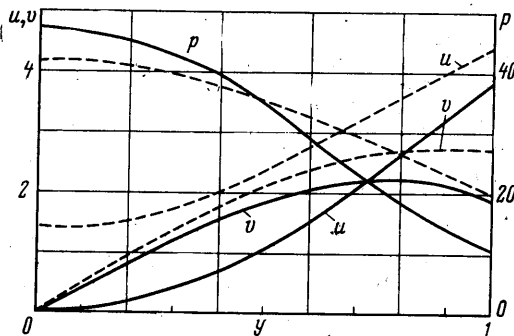
$$r = y[\zeta(x, \epsilon)F(y, t) + (1 - \zeta(x, \epsilon))G(y)]$$

Функцию $\zeta(x, \epsilon)$ предложено взять в виде

$$\zeta(x, \epsilon) = \frac{2\epsilon(1-x)}{\sqrt{[4(1-\epsilon)(1-x)-1]^2 + 12\epsilon(1-\epsilon)(1-x) + 1 - 4(1-\epsilon)(1-x)}}$$

$\zeta = x$ при $\epsilon = 1$, при $\epsilon < 1$ координатные линии сгущаются у волны.

3. Расчеты проводились на вычислительной машине. В работе представлены результаты расчета обтекания сферы радиуса 0.5 м на высоте $H = 40$ км при числах Маха набегающего потока равных 6, 8, 10 на высоте $H = 0$ и $M_\infty = 4$. Кроме того, был произведен расчет обтекания эллипса с полуосями вдоль z и r , равными 1 и 0.5 для $M_\infty = 6, 8, H = 40$ км, а также эллипса с полуосями 1 и 2 для $M_\infty = 6, H = 40$ км. Значения $T^\circ, p^\circ, \rho^\circ$ для набегающего потока на данной высоте взяты из [12]. В частности, для $H = 40$ км $T^\circ = 257.66^\circ \text{K}$, $p^\circ = 0.29199 \cdot 10^{-2}$ г.атм, $\rho^\circ = 0.400043 \cdot 10^{-5}$ г/см³. В качестве примера остановимся на результатах, полученных при $M_\infty = 6, H = 40$ км. Этот вариант рассчитан по 21×11 точкам ($M = 20, L = 10, \epsilon = 0.125$). Кроме того, этот же вариант был просчитан с удвоенным количеством точек, что дало максимальные изменения в четвертом знаке. На фиг. 2 представлены графики, описывающие изменение поступательной температуры и колебательной энергии



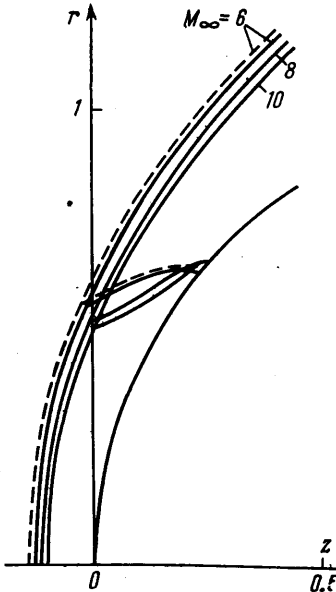
Фиг. 5

кислорода и азота для значений y , равных 0, 0,5, 1. Эти значения y указаны на фигуре. Все величины выражены в °К. Для перевода E_1 и E_2 в °К использована формула

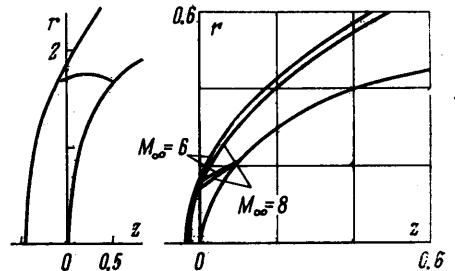
$$T = \frac{T^*}{\ln(RT^*/E + 1)}$$

Сплошная линия соответствует T , пунктирная — E_1 , штрих-пунктирная — E_2 , точками обозначена температура идеального газа при $y = 0$. Из фиг. 2 видно, что колебательная релаксация оказывает существенное влияние на температуру за фронтом ударной волны, причем изменение температуры около ударной волны связано в основном с возбуждением O_2 . И, наоборот, около тела главную роль играет возбуждение N_2 . Помимо этого надо заметить, что в некоторых областях потока колебательная температура O_2 превышает поступательную, например, при $y = 1$. Такое превышение колебательной температуры можно объяснить тем, что в эти области потока, расположенные ниже по течению, сносятся из более нагретых областей массы газа, имеющие более высокую колебательную температуру. При этом вместе с понижением поступательной температуры увеличивается время релаксации, и равновесие не успевает установиться. При увеличении M_∞ подобная картина наблюдается у N_2 , а O_2 быстро приходит к равновесию, так как $\tau_{N_2} > \tau_{O_2}$.

В верхней части той же фигуры приведены графики температуры и колебательной энергии при $M_\infty = 10$, $H = 40$ км на осевой линии, которые показывают, что за ударной волной находится практически



Фиг. 6.



Фиг. 7.

равновесный газ. На меньших высотах вследствие увеличения плотности времена релаксации значительно меньше, и равновесие за ударной волной наступает при меньших числах Маха. Течение газа существенно зависит и от радиуса обтекаемой сферы. Как показали расчеты, при уменьшении радиуса градиенты температуры и колебательной энергии около ударной волны значительно уменьшаются.

На фиг. 3 приведены графики величин u , v , p также для $y = 0, 0,5, 1$. Сплошная линия соответствует u , пунктирная — v , штрих-пунктирная — p . На фиг. 4 изображено изменение T , E_1 , E_2 на теле и на волне, а на фиг. 5 — u , v , p на теле и на волне. Все величины на теле изображены сплошными линиями, на волне — пунктирными. На фиг. 6 представлены форма ударной волны и звуковая линия, возникающие при обтекании сферы потоком газа с числами Маха 6, 8, 10 на высоте 40 км. Пунктир относится к идеальному газу $M_\infty = 6$. Интересно, что для $M_\infty = 8, 10$ звуковые линии получились с перегибом. Ударная волна и звуковая линия для эллипса с полуосями 1, 0,5, $M_\infty = 6,8$, $H = 40$ км и для эллипса с полуосями 1, 2, $M_\infty = 6$, $H = 40$ км изображены на фиг. 7.

Автор благодарен К. И. Бабенко за постановку задачи и ценные советы в процессе ее решения.

Поступило 5 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Генералов Н. А., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксация колебательной энергии молекул воздуха за фронтом прямой ударной волны. Докл. АН, 1964, 156, № 5.
2. Турчак Л. И. Обмен колебательной энергией между компонентами воздуха за фронтом прямой ударной волны. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
3. Артамонов А. К., Архипов В. Н., Старченко Г. Е. Релаксация и излучение за прямым скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. Johannessen N. H. Analysis of vibrational relaxation regions by means of the Reyleigh — line method. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, No. 25.
5. Clagcke J. F., Rodgers J. B. Shock waves in a gas with several relaxing internal energy modes. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No. 4.
6. Саяпин Г. Н. Исследование особенностей обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком неравновесного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
7. Колешко С. Б., Лунькин Ю. П., Попов Р. Д. Влияние одновременного протекания колебательной и диссоциационной релаксации на сверхзвуковое обтекание затупленных тел. Сб. «Аэрофизические исследования сверхзвуковых течений», М., «Наука», 1967.
8. Стулов В. П., Турчак Л. И. Обтекание сферы сверхзвуковым потоком воздуха с учетом колебательной релаксации. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
9. Blythe P. A. The effect of vibrational relaxation of hypersonic flow past blunt bodies. Aeronaut. Quart., 1963, vol. 14, No. 4.
10. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
11. Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. М., «Наука», 1965.
12. Стулов В. П., Турчак Л. И. О сверхзвуковом обтекании затупленных тел при наличии быстрых неравновесных процессов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
13. Таблицы временной стандартной атмосферы. ВЦ АН СССР, М., 1960.