

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЕ

В. Д. БРЕНГАУЗ

(Горький)

Исследуется поведение малых возмущений в неоднородной изотермической атмосфере. Однородное магнитное поле  $H_0$  перпендикулярно ускорению силы тяжести  $g$ . Рассмотрено влияние магнитного поля на частотный спектр вертикально распространяющихся волн и получены условия наличия уровней полного внутреннего отражения в атмосфере. Детально исследовано распространение волн для нескольких видов зависимости квадрата эффективного коэффициента преломления среды от высоты. Показана возможность существования волноводного распространения и определен дискретный спектр волновода. Определены условия, при выполнении которых фундаментальные решения описывают поля в геометрическом приближении.

Так как физическая природа ряда явлений в атмосферах звезд и планет может быть связана с распространением магнитозвуковых волн, исследование поведения малых возмущений в неоднородной проводящей среде в присутствии магнитного поля и поля тяжести представляет значительный интерес. Фундаментальные решения соответствующих уравнений для слоисто-неоднородной анизотропной плазмы в магнитогазодинамическом приближении выражены через специальные функции лишь в двух упрощающих случаях: однородное магнитное поле, градиент неоднородности и направление распространения параллельны [1], или распространение происходит вдоль градиента неоднородности, перпендикулярного магнитному полю [2].

Исследуется распространение магнитозвуковых волн в неоднородной изотермической атмосфере в произвольном направлении. Ускорение силы тяжести  $g$  направлено вертикально вниз вдоль оси  $z$ , а однородное магнитное поле  $H_{0x}$  — горизонтально. Рассматривается распространение волн в плоскости  $xz$ , так что  $\partial / \partial y = 0$ . Тогда, используя систему линейных уравнений магнитной гидродинамики, полученную в [1], для малых смещений  $\xi_x, \xi_y, \xi_z$  имеем

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} (c_s^2 \operatorname{div} \xi - g \xi_z) + c_A^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \xi_z - (\gamma - 1) g \operatorname{div} \xi \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (c_s^2 \operatorname{div} \xi - g \xi_z) \quad \left( c_s^2 = \frac{\gamma R_0 T}{\mu} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} = c_A^2 \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} \left( \rho_0 = \rho_{00} \exp \left( -\frac{z}{z_c} \right) \right), \quad \left( c_A = \frac{H_{0x}}{\sqrt{4\pi \rho_0}} \right), \quad \left( z_c = \frac{R_0 T}{\mu g} \right) \quad (3)$$

Здесь  $c_s$  — скорость звука,  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей,  $R_0$  — универсальная газовая постоянная,  $\mu$  — молекулярный вес,  $T = \text{const}$  — температура атмосферы,  $c_A$  — альфвеновская скорость,  $\rho_0$  — невозмущенная плотность среды, изменяющаяся с высотой по закону (3),  $z_c$  — приведенная высота однородной атмосферы.

Очевидно, что смещения, лежащие в плоскости  $xz$ , не связаны с  $\xi_y$ , удовлетворяющим уравнению (3), решение которого хорошо известно. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только уравнения (1), (2) <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Если  $\partial / \partial y \neq 0$ , то задача существенно усложняется, так как при этом возможно взаимодействие магнитозвуковых волн с альфвеновской волной.

Принимая зависимости

$$\xi_x(x, z, t) = X(z) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\xi_z(x, z, t) = Z(z) e^{i(kx - \omega t)}$$

преобразуем (1), (2) к следующей форме:

$$\left[ e^u \left( \frac{d^2}{du^2} - \alpha^2 \right) + \beta^2 \left( \frac{d^2}{du^2} - \frac{d}{du} + h^2 \right) \right] Z = -i\alpha\beta^2 \left( \frac{d}{du} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) X \quad (4)$$

$$(h^2 - \alpha^2) X = -i\alpha \left( \frac{d}{du} - \frac{1}{\gamma} \right) Z \quad (5)$$

$$u = \frac{z}{z_c}, \quad \alpha = kz_c, \quad h = \frac{\omega z_c}{c_s}, \quad \beta = \frac{c_s}{c_{A_0}}, \quad c_{A_0} = \frac{H_{0x}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$$

Исключим из уравнений (4), (5) величину  $X$ ; кроме того, введем новую переменную

$$\zeta = 1 + \frac{\beta^2 h^2}{h^2 - \alpha^2} e^{-u} \quad (6)$$

Тогда для  $Z$  получим

$$\zeta(1 - \zeta)^2 \frac{d^2 Z}{d\zeta^2} - (1 - \zeta)(2\zeta - 1) \frac{dZ}{d\zeta} + [(\zeta - 1)(M + \alpha^2) - \alpha^2 \zeta] Z = 0 \quad (7)$$

$$M = h^2 - \alpha^2 + \frac{\alpha^2(\gamma - 1)}{h^2 \gamma^2} \quad (8)$$

Представим функцию  $Z(\zeta)$  в следующем виде:

$$Z(\zeta) = (\zeta - 1)^{-\alpha} \Phi(\zeta)$$

Уравнение (7) сведется к гипергеометрическому [3]

$$\zeta(\zeta - 1) \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} + [(1 + a + b)\zeta - c] \frac{d\Phi}{d\zeta} + ab\Phi = 0 \quad (9)$$

$$a, b = p_{1,2} - \alpha, \quad c = 1, \quad p_{1,2} = 1/2 \pm 1/2 \sqrt{1 - 4M}$$

Уравнение (9) обладает двумя линейно-независимыми решениями, в качестве которых при  $-2p_2 \neq m$ ,  $2a \neq m$ ,  $m = 0, 1, \dots$  может быть выбрана любая пара рядов, сходящихся около «своей» особой точки [3-5].

1. Вблизи  $\zeta = \infty$

$$\begin{aligned} Z_1 &= (\zeta - 1)^{-\alpha} (1/\zeta)^{p_1 - \alpha} F(p_1 - \alpha, p_1 - \alpha; 2p_1; 1/\zeta) \\ Z_2 &= (\zeta - 1)^{-\alpha} (1/\zeta)^{p_2 - \alpha} F(p_2 - \alpha, p_2 - \alpha; 2p_2; 1/\zeta) \end{aligned} \quad (10)$$

2. Вблизи  $\zeta = 1$

$$\begin{aligned} Z_3 &= (\zeta - 1)^{-\alpha} F(p_1 - \alpha, p_2 - \alpha; 1 - 2\alpha; 1 - \zeta) \\ Z_4 &= (\zeta - 1)^{\alpha} F(p_1 + \alpha, p_2 + \alpha; 1 + 2\alpha; 1 - \zeta) \end{aligned} \quad (11)$$

3. Вблизи  $\zeta = 0$

$$Z_5 = (\zeta - 1)^{-\alpha} F(p_1 - \alpha, p_2 - \alpha; 1; \zeta) \quad (12)$$

$$Z_6 = Z_5 \ln \zeta + (\zeta - 1)^{-\alpha} \sum_{k'=1}^{\infty} \zeta^{k'} \frac{(p_1 - \alpha)_{k'} (p_2 - \alpha)_{k'}}{(k')^2} [h^*(k') - h^*(0)]$$

$$h^*(k') = \Psi(p_1 - \alpha + k') + \Psi(p_2 - \alpha + k') - 2\Psi(1 + k')$$

Здесь  $F(x)$  — гипергеометрический ряд,  $\Psi(x)$  —  $\Psi$ -функция Эйлера.

Предположим, что малые возмущения генерируются в области  $z \rightarrow -\infty$ , где  $|\zeta| \gg 1$ . Для определения поля  $Z$  во всем интервале высот  $-\infty \leq z \leq \infty$  необходимо задать граничные условия, выбор которых становится более наглядным, если заменой

$$Z(\zeta) = \theta(\zeta) \exp \left[ \frac{1}{2} \int \frac{2\zeta - 1}{\zeta(1 - \zeta)} d\zeta \right]$$

представить уравнение (7) в форме

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + f(\zeta)\theta = 0 \quad (13)$$

где

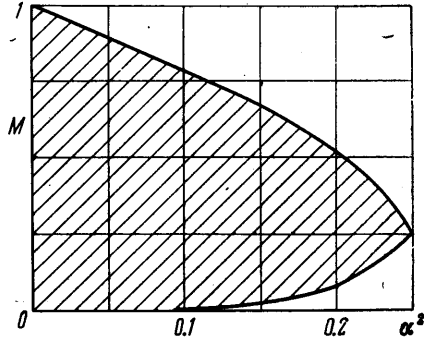
$$f(\zeta) = \frac{1}{4\zeta^2(1 - \zeta)^2} [4M\zeta^2 - 4(M + \alpha^2)\zeta + 1] \quad (14)$$

и определяет ход квадрата эффективного коэффициента преломления среды  $n_{eff}^2$  с высотой. Существование нулей  $f(\zeta)$  при  $\zeta \neq \pm\infty$  возможно, если

$$(M + \alpha^2)^2 - M \geq 0 \quad (15)$$

На фиг. 1 заштрихована область параметров  $M, \alpha^2$ , где неравенство (15) не выполняется. Если же условие (15) имеет место, то уровни отражения  $z^*$ , где  $f(\zeta) = 0$ , определяются соотношениями

$$\zeta_{1,2} = \frac{1}{2M} [M + \alpha^2 \pm \sqrt{(M + \alpha^2)^2 - M}] \quad (16)$$



Фиг. 1

Представление уравнения (7) в форме (13) позволяет установить также условия, при которых фундаментальные решения, определяемые одной из трех пар функций (10) — (12), дают выражения для полей в геометрооптическом приближении. Важно отметить, что наличие магнитного поля существенно изменило диапазон частот, в котором возможно распространение волн в атмосфере в вертикальном направлении. Этот диапазон остался неизменным лишь в области  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ , что эквивалентно условию  $s_A \rightarrow 0$ . В этом случае решения (10) совпадают с решением соответствующей гидродинамической задачи [6]. Функции  $Z_1$  и  $Z_2$  при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$  описывают поля двух бегущих в противоположном направлении волн.

если  $4M > 1$  или

$$\omega > \omega_1, \quad \omega < \omega_2$$

$$\omega_{1,2} = \frac{c_s}{2\sqrt{2z_c}} \left[ 1 + 4\alpha^2 \pm \left( (1 + 4\alpha^2)^2 - 64\alpha^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (17)$$

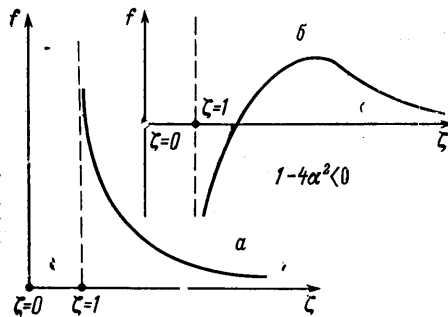
Знак плюс соответствует звуковой моде, а знак минус — гравитационной [6].

Наряду с изменением спектра распространяющихся волн наличие магнитного поля приводит к появлению отражения.

При исследовании характера поведения малых возмущений в атмосфере важно выделить два основных случая.

1. Пусть  $h > \alpha$  и, следовательно,  $M > 0$ . При этом по мере изменения высоты  $z$  в атмосфере возможна лишь реализация особых точек  $\zeta = \infty$  и  $\zeta = 1$  ( $\zeta \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow -\infty$  и  $\zeta \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow \infty$ ). На фиг. 2, а, б представлен качественно ход  $f(\zeta)$  при условии, что параметры  $M$ ,  $\alpha^2$  лежат в заштрихованной или незаштрихованной областях фиг. 1 соответственно. Высота уровня отражения  $z^*$  определяется величиной  $\zeta_1$  из соотношений (16).

Так как волны не проникают в область, где  $n_{eff}^2 < 0$ , то естественно при соблюдении неравенства (15) выбрать такое аналитическое продолжение



Фиг. 2

из окрестности  $\zeta \rightarrow \infty$  в окрестность  $\zeta = 1$ , которое описывает поле  $Z \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , если  $\alpha^2 > 1/4$ . Тогда можно показать, что  $Z$  во всем интервале высот  $\infty \geq z \geq -\infty$  имеет вид

$$Z(\zeta) = \frac{\Gamma^2(p_1 + \alpha)}{\Gamma(2p_1)\Gamma(2\alpha)} Z_1 - \frac{\Gamma^2(p_2 + \alpha)}{\Gamma(2p_2)\Gamma(2\alpha)} Z_2 \quad (18)$$

и при  $z \rightarrow \infty$   $Z \sim e^{-kz}$ . Здесь  $Z_{1,2}$  — поля, определяемые равенствами (10),  $\Gamma(x)$  —  $\Gamma$ -функция.

Падающая волна возбуждается в области высот  $z \rightarrow -\infty$ , где вертикальное распространение возможно лишь при условии  $\omega > \omega_1$  (см. соотношение (17)). Поле этой волны описывается функцией  $\exp(p_1 z / z_c)$ , а отраженной волне соответствует функция  $(p_2 z / z_c)$ , так что коэффициент отражения

$$R = - \left( \frac{h^2 - \alpha^2}{\beta^2 h^2} \right)^{p_2 - p_1} \frac{\Gamma^2(p_2 + \alpha) \Gamma(2p_1)}{\Gamma^2(p_1 + \alpha) \Gamma(2p_2)} \quad (19)$$

и  $|R| = 1$ .

В случае, если неравенство (15) не выполнено, выбор аналитического продолжения должен быть проведен при других граничных условиях, причем не исключена возможность решений, для которых при  $z \rightarrow \infty$   $Z$  не стремится к нулю.

2. Пусть  $h < \alpha$ . При этом по мере изменения высоты  $z$  в атмосфере реализуются все три особые точки

$$\begin{aligned} \zeta \rightarrow -\infty & \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, & \zeta \rightarrow 0 & \quad \text{при } z \rightarrow z_c \ln \frac{h^2 \beta^2}{\alpha^2 - h^2} \\ \zeta \rightarrow 1 & \quad \text{при } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Некоторые возможные виды зависимости  $f(\zeta)$  представлены качественно на фиг. 3, а, б, в. Важным отличием от случая  $h > \alpha$  является наличие полюса эффективного коэффициента преломления среды при  $\zeta = 0$ , где одно из решений (12) имеет логарифмическую особенность. Чтобы это решение было однозначным во всей плоскости  $\zeta$ , проведем разрез, проходящий вдоль действительной оси и соединяющий точки  $\zeta = 0$  и  $\zeta = -\infty$ .

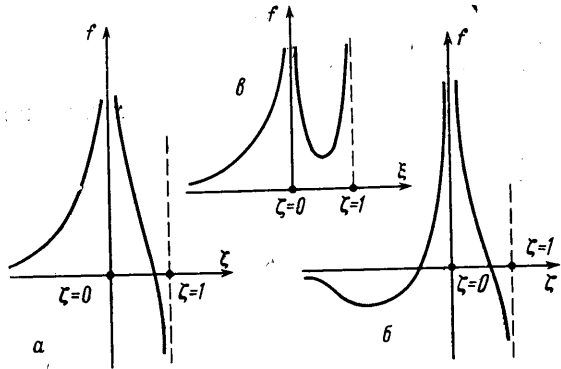
В том случае, если  $n_{eff}^2 < 0$  при  $z > z^*$  (фиг. 3, а) естественно выбрать решение  $Z \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Это возможно, если величина  $1 - 2\alpha = -m$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . Тогда получим, что при  $\zeta > 0$  смещение

$$Z(\zeta) = (\zeta - 1)^{-\alpha} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(p_1 - \alpha)_{k'} (p_2 - \alpha)_{k'}}{(k')^2} [h^* (k') - \ln \zeta] \zeta^{k'} \quad (20)$$

Эта функция при  $z \rightarrow \infty$  пропорциональна  $e^{-hz}$  и является суперпозицией пары решений вида (12). Переход к переменной  $\zeta < 0$  осуществляется путем обхода особой точки  $\zeta = 0$ , причем

направление обхода определяется из условия, что модуль коэффициента отражения не должен превышать единицу. Падающая волна возбуждается в области  $z \rightarrow -\infty$ , где вертикальное распространение при  $h < \alpha$  возможно лишь в диапазоне частот  $\omega < \omega_2$ . Поле этой волны описывается функцией  $\exp(p_1 z / z_c)$ , а полюс отраженной волны соответствует функции  $\exp(p_2 z / z_c)$ .

При  $2\alpha$  четном, когда аналитическое продолжение из окрестности  $\zeta = 1$  в окрестность  $\zeta = -\infty$  строится вдоль контура, лежащего выше разреза, коэффициент отражения равен



Фиг. 3

$$R = - \left( \frac{\alpha^2 - h^2}{\beta^2 h^2} \right)^{p_2 - p_1} \times \frac{\Gamma(p_2 - \alpha) \Gamma(p_2 + \alpha) \Gamma(2p_1) [1 + \exp(-\pi \sqrt{4M - 1})]}{\Gamma(p_1 - \alpha) \Gamma(p_1 + \alpha) \Gamma(2p_2) [1 + \exp(\pi \sqrt{4M - 1})]} \quad |R| < 1 \quad (21)$$

При  $2\alpha$  нечетном аналитическое продолжение строится вдоль контура, лежащего ниже разреза. При этом коэффициент отражения

$$R = \left( \frac{\alpha^2 - h^2}{\beta^2 h^2} \right)^{p_2 - p_1} \times \frac{\Gamma(p_2 - \alpha) \Gamma(p_2 + \alpha) \Gamma(2p_1) [1 - \exp(-\pi \sqrt{4M - 1})]}{\Gamma(p_1 - \alpha) \Gamma(p_1 + \alpha) \Gamma(2p_2) [\exp(\pi \sqrt{4M - 1}) - 1]} \quad |R| < R \quad (22)$$

Зависимость  $|R|$  от величины  $\pi \sqrt{4M - 1}$  в обоих случаях представлена на фиг. 4.

Поясним несколько подробнее полученные результаты. При  $h > \alpha$  переменная  $\zeta$  всегда положительна. Это означает, что наряду с условием

$k < \omega / c_s$  выполнено неравенство

$$k < \frac{\omega \sqrt{c_s^2 + c_A^2}}{c_s c_p}$$

Если же  $h < \alpha$ , то  $|\zeta| > 1$  лишь в области отрицательных  $\zeta$ , т. е. при

$$k < \frac{\omega \sqrt{c_s^2 + c_A^2}}{c_s c_A}$$

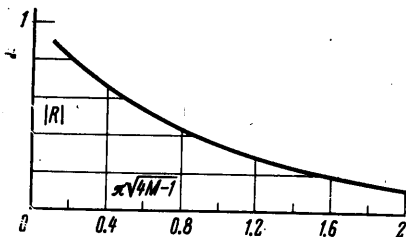
Область  $\zeta \approx 0$  соответствует тому, что при заданном  $k$  по мере распространения волны вверх из-за изменения плотности среды волна достигает высоты  $z$  такой, что

$$k \approx \frac{\omega \sqrt{c_s^2 + c_A^2}}{c_s c_A}$$

Сопоставляя это с известными результатами работы [7], можно сделать вывод, что при  $h > \alpha$  распространение происходит по типу быстрой магнитозвуковой волны, а при  $h < \alpha$  — по типу медленной магнитозвуковой волны. Отличие  $|R|$  при  $h < \alpha$  от единицы связано с тем, что при прохождении области  $\zeta \approx 0$  часть энергии уходит в волну, для которой

$$n_{eff}^2 = \infty, \quad k = \frac{\omega \sqrt{c_s^2 + c_A^2}}{c_s c_A}$$

а групповая и фазовая скорости направлены вдоль магнитного поля [7]. Полученные здесь при  $h < \alpha$  результаты и их физическая интерпретация качественно не отличаются от тех, которые имеют место при распространении высокочастотных электромагнитных волн



Фиг. 3

в слоисто-неоднородной плазме при наличии полюса коэффициента преломления [8].

Как видно из фиг. 3, б, при  $M < 0$  в атмосфере возможно волноводное распространение. Дискретный спектр волновода определяется из граничных условий, которые описывают поле  $Z \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \pm \infty$  [9, 10]. Нетрудно показать, что функция  $Z(\zeta)$  вида

$$Z(\zeta) = (\zeta - 1)^{-\alpha} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(p_1 - \alpha)_{k'} (p_2 - \alpha)_{k'}}{(k'!)^2} [h^*(k') - \ln|\zeta|] \zeta^{k'} \quad (23)$$

при  $z \rightarrow -\infty$  пропорциональна  $e^{p_1 z / z_c}$ , а при  $z \rightarrow \infty$  будет  $z \sim e^{-kz}$ , если параметры  $h, \alpha$  удовлетворяют равенствам

$$2p_2 = -n, \quad 1 - 2\alpha = -m \quad (n = 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots) \quad (24)$$

Подставляя выражение для  $p_2$  и  $\alpha$ , окончательно имеем

$$\sqrt{1 - 4M} = n + 1, \quad 1 - 2kz_c = -m \quad (25)$$

Если неравенство (15) не выполняется (см. фиг. 3, в), то, как и при  $h > \alpha$ , возможны такие условия, когда при  $z \rightarrow \infty$  смещение  $Z$  не стремится к нулю.

Отметим, что при  $h < \alpha$  и  $\zeta = 0$  существенным является учет диссипативных процессов, что приведет к ограничению величины  $Z$ . Далее, поскольку возможно существование полей, амплитуда которых возрастает с увеличением  $z$ , то полученные решения справедливы лишь на таких высотах, где не нарушается линейное приближение. Последнее особенно важно для тех случаев, когда в атмосфере отсутствуют уровни полного внутреннего отражения и  $n_{eff}^2 > 0$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Зависимость горизонтального смещения  $X$  от высоты можно получить, воспользовавшись уравнением (5), дающим связь  $X$  и  $Z$ . Не останавливаясь на этом детально, укажем лишь следующий весьма интересный факт. Если

$$X_{1,2} \sim e^{\pm hz} \quad \text{при } h^2 = (\gamma - 1) / \gamma^2$$

в окрестности  $\zeta = 1$  и одно из решений нарастает с увеличением  $z$ , то

$$X_1 \sim e^{-hz}, \quad X_2 \sim \exp \left[ \frac{z}{z_0} (\alpha - 1) \right] \quad \text{при } \alpha = \frac{1}{\gamma}$$

и оба решения убывают с ростом  $z$ .

В заключение отметим, что не представляет труда найти решение системы (4), (5) при  $h = \alpha$ .

Автор признателен Н. Г. Денисову, Ю. А. Рыжову, С. Б. Пикельнеру, В. В. Тамойкину и В. П. Докучаеву за ценные советы и внимание к работе.

Поступило 26 V 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ferraro V. C. A., Plumpton C. Hydromagnetic waves in a horizontally stratified atmosphere. *Astrophys J.* 1958, vol. 127, No. 2.
2. Тверской Б. А. О влиянии магнитного поля на увеличение амплитуды акустических волн в среде с падающей плотностью. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 2.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1965, т. 1.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Изд. 6. М.—Л., Гостехиздат, 1956, т. 3, ч. 2.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4. М., Физматгиз, 1963.
6. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
7. Lighthill M. J. Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1960, A252, No. 1014.
8. Денисов Н. Г. О поглощении радиоволн в резонансных областях неоднородной плазмы. *Радиотехника и электроника*, 1959, т. 4, вып. 3.
9. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
10. Pitteway M. L. V., Hines C. O. The reflection and ducting of atmospheric acoustic-gravity waves. *Canad. J. Phys.*, 1965, vol. 43, No. 12.