ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗЫ ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ СТЕНКИ НА УСТАНОВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА

Ю. А. ДЕМЬЯНОВ, Л. И. ЭЛЬКИН

(*Москва*)

При рассмотрении одномерных нестационарных потоков в работе [1] показано, что в случае больших чисел Рейнольдса влияние эффектов вязкости становится несущественным, а зону течения можно разбить, как в задачах взаимодействия, на внешнюю область, описываемую уравнениями газовой динамики, и примыкающую к стенке область, в которой перепадом давления можно пренебречь. В работе [1] решена задача о нестационарном отражении ударной волны от стенки в предположении, что внешняя область представляет собой основной неподвижный однородный поток (рассчитываемый по теории идеального газа), на который наложены малые возмущения, обусловленные наличием пристеночной теплопроводной области. Соответствующая задача для случая «сильного» взаимодействия между внешним потоком и пристеночной теплопроводной зоной поставлена в работе [2], где приводится решение для начальной фазы отражения ударной волны, когда эффект взаимодействия проявляется в наибольшей степени. Ниже установлено, что за счет изменения энтропии во внешнем потоке, обусловленного начальной фазой отражения ударной волны от теплопроводной стенки, параметры внешнего потока по истечении сколь угодно большого времени существенно отличаются от параметров основного потока, принятого в работе [1]. В силу этого обстоятельства закономерности установления процессов течения и теплообмена за отраженной ударной волной отличаются от полученных в работе [1].

1. Пусть в момент времени $t=0$ от теплопроводной стенки с начальной температурой T_{w0} отражается падающая ей параллельно ударная волна, за которой имеет место равномерный поток с давлением p_0, температурой T_0, энтропией S_0 и скоростью u_0.

В соответствии с работой [2] введем в рассмотрение траекторию фиктивного поршня $x=x_\infty(t)$ $[x_\infty(0)=0]$, вызывающего во внешней области такое же течение, какое вызывает пристеночная теплопроводная область; при этом температура идеального газа при $x=x_\infty(t)$, являющаяся температурой на внешней границе теплопроводной области, определяет теплообмен между газом и стенкой.

Как показано в работе [2], при $T_{w0}<T_0$ в идеальном газе в момент $t=0$ возникает центрированная волна разряжения; на ее заднем фронте уже при $t=0$ начинается зарождение ударной волны, которая в начальной фазе отражения (при малых значениях t) остается еще достаточно слабой, и, следовательно, изэнтропической.

Поэтому при малых значениях лагранжевой координаты

$$\Psi=\int\limits_{x_\infty}^{x}\frac{\rho}{\rho^*}\,dx$$

энтропия в потоке за отраженной ударной волной мало отличается от значения S_0, совпадая с последним при $\Psi=0$. С ростом времени значения интенсивности отраженной ударной волны и энтропии газа за ней увеличиваются, стремясь к значениям, предсказываемым теорией идеального газа для случая $x_\infty(t)\equiv 0$ (в дальнейшем параметры, определяемые для этого случая, обозначаются индексом i). В результате при $t\to\infty$ газ за отраженной ударной волной придет в состояние покоя с параметрами

$$p = p_e \equiv p_i, \qquad \rho = \rho_e(\Psi), \qquad T = T_e(\Psi) \tag{1.1}$$

причем значения ρ_e и T_e определяются по значениям давления p_i и энтропии $S(\Psi)$ в отличие от работы [1], где они принимались равными ρ_i и T_i соответственно (определяясь по значениям p_i и S_i).

В частности, отношение температуры на внешней границе теплопроводной зоны $T_e(0)$ к принимаемой за такую в работе [1] температуре T_i равно

$$\frac{T_e(0)}{T_i} = \frac{T_0}{T_i}\left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \tag{1.2}$$

Используя соотношения, связывающие параметры до и после скачка уплотнения (обозначаемые соответственно индексами минус и плюс)

$$\frac{p_+}{p_-} = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}, \qquad \frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{2+(\gamma-1)M^2}{(\gamma+1)M^2} \tag{1.3}$$

$$u_+ = u_- + \frac{2(M^2-1)}{(\gamma+1)M}a_-, \qquad a_-^2 = \frac{\gamma p_-}{\rho_-}$$

выражение (1.2) приведем к виду

$$\frac{T_e(0)}{T_i} = \left[\frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}\right]^{(\gamma-1)/\gamma} \frac{(\gamma+1)^2 M_1^2}{[2+(\gamma-1)M_1^2][2\gamma M_1^2-(\gamma-1)]} \tag{1.4}$$

$$M_1 = (\gamma+1)[2+(\gamma-1)M_0^2]^{-1/2}[2\gamma M_0^2-(\gamma-1)]^{-1/2}\Big\{{}^1/_2(M_0^2-1) +$$
$$+\left[\frac{1}{4}(M_0^2-1)^2 + \frac{2\gamma(\gamma-1)M_0^4+(6\gamma-\gamma^2-1)M_0^2-2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\right]^{1/2}\Big\}$$

Здесь $\rho^* = \rho_-$, M_0 — число M падающей ударной волны.

При $M_0 \to \infty$ правая часть формулы (1.4) стремится к пределу, зависящему от показателя адиабаты γ. В частности, при $\gamma = 1.4$ и достаточно больших числах M_0 $T_e(0) / T_i = 0.792$ и величины тепловых потоков в стенку, определяемые по значениям $T_e(0)$ или T_i, отличаются примерно на 20%.

Аналогичные результаты могут быть получены при $T_{w0} > T_0$.

2. Исследуем характер установления неподвижного потока за отраженной ударной волной.

Линеаризируя уравнения газовой динамики

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho^*}\frac{\partial u}{\partial \Psi} = 0, \qquad \rho^*\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \Psi} = 0, \qquad \frac{p}{\rho^\gamma} = \vartheta(\Psi)$$

около значений (1.1), получаем

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\rho_e^2}{\rho^*}\frac{\partial u_1}{\partial \Psi} = 0, \qquad \rho^*\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial \Psi} = 0, \qquad p_1 = a_e^2\rho_1, \qquad a_e^2 = \frac{\gamma p_i}{\rho_e} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{a_e^2\rho_e^2}{\rho^{*2}}\frac{\partial^2 p_1}{\partial \Psi^2} \tag{2.2}$$

$$\rho = \rho_e + \rho_1, \qquad p = p_e + p_1, \qquad u = u_1$$

После нахождения p_1 из уравнения (2.2) u_1 определяется из любого уравнения (2.1) непосредственным интегрированием.

Из уравнения (2.2) вытекает, что из-за изменения энтропии возмущения распространяются с переменной скоростью (в отличие от работы [1], где скорость распространения возмущений была постоянной).

Чтобы оценить влияние изменения энтропии, допустим, что

$$S(\Psi)=S_i \quad \text{при } \delta(t)\geqslant\Psi\geqslant\Psi_0$$
$$S(\Psi)=S_e(0) \quad \text{при } \Psi_0\geqslant\Psi\geqslant 0$$

где Ψ_0 — некоторая фиксированная точка.

Линеаризируя с помощью (1.3) условия на отраженной ударной волне $\Psi=\delta(t)$, получаем

$$p_{1+}=\frac{4\rho_0\delta_i^{\cdot}\delta_1^{\cdot}}{\gamma+1},\quad \rho_{1+}=\frac{4a_0^2\rho_i^2\delta_1^{\cdot}}{(\gamma+1)\rho_0\delta_i^{\cdot 3}},\quad u_{1+}=\frac{2\delta_1^{\cdot}}{\gamma+1}[1+M_1^{-2}] \tag{2.3}$$

Отсюда

$$u_{1+}=\alpha_0 p_{1+},\quad \alpha_0=\frac{1+M_1^{-2}}{2\rho_0\dot{\delta}_i}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\rho^*=\rho_0,\quad \delta^{\cdot}=\delta_i^{\cdot}+\delta_1^{\cdot} \tag{2.4}$$

Второе граничное условие для системы (2.1) имеет вид

$$u(0,t)=u_\infty(t)=x_\infty^{\cdot}(t) \tag{2.5}$$

Очевидно при больших временах справедливо

$$\delta(t)=\delta_i^{\cdot}t-\Delta,\qquad \Delta=-\lim_{t\to\infty}\delta_1(t) \tag{2.6}$$

Учитывая (2.4) — (2.6), получаем решение системы (2.1):
в области $\delta(t)\geqslant\Psi\geqslant\Psi_0$

$$u_1=G(a_{00}t-\Psi)+F_0G[\lambda(a_{00}t+\Psi)+\omega] \tag{2.7}$$
$$p_1=a_{00}\rho_0\{G(a_{00}t-\Psi)-F_0G[\lambda(a_{00}t+\Psi)+\omega]\}$$

в области $\Psi_0\geqslant\Psi\geqslant 0$

$$u_1=g(a_{20}t-\Psi)-g(a_{20}t+\Psi)+u_\infty(t+\Psi/a_{20})$$
$$p_1=a_{20}\rho_0\{g(a_{20}t-\Psi)+g(a_{20}t+\Psi)-u_\infty(t+\Psi/a_{20})\} \tag{2.8}$$

Здесь

$$a_{00}=a_i\frac{\rho_i}{\rho_0},\quad a_{20}=a_e(0)\frac{\rho_e(0)}{\rho_0},\quad F_0=\frac{1-2m+M_1^{-2}}{1+2m+M_1^{-2}}$$
$$\lambda=\frac{1-m}{1+m},\quad m=\frac{\delta_i^{\cdot}}{a_{00}},\quad \omega=\frac{2\Delta}{1+m},\quad m<1,\quad \lambda>0$$

Приравнивая значения скоростей и давлений на линии $\Psi=\Psi_0$, получаем

$$G(x)={}^1/_2\Big\{(1+\beta)g[\beta x+(\beta-1)\Psi_0]+$$
$$+(\beta-1)g[\beta x+(\beta+1)\Psi_0]-(\beta-1)u_\infty\Big[\frac{x}{a_{00}}+\frac{\Psi_0}{a_{00}}\Big(1+\frac{1}{\beta}\Big)\Big]\Big\} \tag{2.9}$$

и функциональное уравнение относительно $g(x)$

$$(\beta+1)g(x)+(\beta-1)g(x-2\Psi_0)+F_0(\beta+1)g(\lambda x+A_0)+$$
$$+F_0(\beta-1)g(\lambda x+A_0+2\Psi_0)=(\beta+1)u_\infty\left(\frac{x}{\beta a_{00}}\right)+$$
$$+F_0(\beta-1)u_\infty\left(\lambda\frac{x}{\beta a_{00}}+A_1\right) \qquad (2.10)$$

Здесь

$$A_0=(\beta-1)(\lambda+1)\Psi_0+\beta\omega, \qquad \beta=\frac{a_{20}}{a_{00}}>1$$
$$A_1=\frac{\Psi_0}{\beta a_{00}}[\beta+1+\lambda(\beta-1)]+\frac{\omega}{a_{00}}$$

Как будет показано ниже, при $t\to\infty$ справедливо

$$u_\infty(t)=B_0t^{-1/2}+B_1t^{-1/2-\sigma}+\ldots, \qquad 1/2\geqslant\sigma>0 \qquad (2.11)$$

Поскольку отыскивается решение при больших временах, которым соответствуют в (2.9) и (2.10) большие значения аргумента x, можно использовать разложение Тейлора

$$f(x+a)=f(x)+af'(x)+\ldots, \qquad \text{если } a\ll x$$

и получить

$$G(x)=\beta g(\beta x)-\frac{\beta-1}{2}u_\infty\left(\frac{x}{a_{00}}\right)+\frac{\beta^2-1}{2}\Psi_0g'(\beta x)+$$
$$+\frac{1-\beta^2}{\beta a_{00}}\Psi_0u_\infty'\left(\frac{x}{a_{00}}\right)+\ldots \qquad (2.12)$$

$$2\beta g(x)+2\beta F_0g(\lambda x)-2\Psi_0(\beta-1)g'(x)+2F_0[\beta A_0+(\beta-1)\Psi_0]g'(\lambda x)=$$
$$=(\beta+1)u_\infty\left(\frac{x}{\beta a_{00}}\right)+F_0(\beta-1)u_\infty\left(\lambda\frac{x}{\beta a_{00}}\right)+F_0A_1(\beta-1)u_\infty'\left(\frac{\lambda x}{\beta a_{00}}\right)$$
$$(2.13)$$

Решением (2.13) является

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{-1/2-n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n^0x^{-1/2-\sigma-n}+\ldots \qquad (2.14)$$

Здесь первая, вторая и т. д. суммы определяются соответственно первым, вторым и т. д. слагаемыми в выражении (2.11), причем коэффициенты каждой суммы определяются последовательно.

Отбрасывая в (2.14) члены степеней, меньших $-1/2$, при больших значениях x придем к следующим выражениям:

$$(2.15)$$

$$g(x)\approx C_0x^{-1/2}, \qquad C_0=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{00}}{\beta}\right)^{1/2}\left[\beta+\frac{\sqrt{\lambda}-F_0}{\sqrt{\lambda}+F_0}\right]B_0$$

$$G(x)\approx D_0x^{-1/2}, \qquad D_0=\frac{1}{2}a_{00}^{1/2}\left[1+\frac{\sqrt{\lambda}-F_0}{\sqrt{\lambda}+F_0}\right]B_0$$

учитывающим основное влияние первого слагаемого в (2.11). Поэтому в том же приближении получим при $\Psi_0 \geqslant \Psi \geqslant 0$

$$u_1(\Psi, t) \approx \frac{C_0}{\sqrt{a_{20}t - \Psi}} - \frac{C_0}{\sqrt{a_{20}t + \Psi}} + \frac{B_0}{\sqrt{t + \Psi/a_{20}}}$$

$$p_1(\Psi, t) \approx a_{20}\rho_0 \left\{\frac{C_0}{\sqrt{a_{20}t - \Psi}} + \frac{C_0}{\sqrt{a_{20}t + \Psi}} - \frac{B_0}{\sqrt{t + \Psi/a_{20}}}\right\} \tag{2.16}$$

при $\delta(t) \geqslant \Psi \geqslant \Psi_0$

$$u_1 \approx D_0\left[\frac{1}{\sqrt{a_{00}t - \Psi}} + \frac{F_0}{\sqrt{\lambda(a_{00}t + \Psi)}}\right],$$

$$p_1 \approx a_{00}\rho_0 D_0\left[\frac{1}{\sqrt{a_{00}t - \Psi}} - \frac{F_0}{\sqrt{\lambda(a_{00}t + \Psi)}}\right] \tag{2.17}$$

Возмущение скорости ударной волны и параметры на внешней границе теплопроводной зоны таковы:

$$\delta_1 = \frac{(\gamma+1)(1-F_0)D_0}{4\sqrt{(a_{00} - \dot{\delta}_i)t}}, \qquad T(\Psi = 0, t) = T_\infty(t) \approx T_e(0) + \frac{\tau_\infty}{\sqrt{t}}$$

$$p(\Psi = 0, t) = p_\infty(t) \approx p_i + \frac{d_0}{\sqrt{t}}$$

$$\tau_\infty = \frac{\gamma - 1}{\gamma R} W_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho_e(0)} a_e(0)\right)^{1/2}, \quad d_0 = W_0\rho_0\sqrt{a_{20}}, \quad W_0 = 2C_0 - \sqrt{a_{20}}B_0$$

(R — газовая постоянная).

Течение в области $\Psi_0 \geqslant \Psi \geqslant 0$ явно зависит от β и поэтому существенно отличается от полученного в работе [1]. Течение в области $\delta(t) \geqslant \Psi \geqslant \Psi_0$ и возмущение скорости ударной волны не зависят явно от β и отличаются от рассмотренных в работе [1] лишь за счет разницы в коэффициенте B_0 (который, как показано в п. 3, меньше полученного в указанной работе).

Отсюда следует, что влияние характера неоднородности потока (1.1) за отраженной ударной волной на скорость последней, по-видимому, при больших временах незначительно.

3. Рассмотрим теплопередачу между газом и стенкой. Допустим, что температура стенки при значениях времени, больших некоторого t_0, изменяется по закону

$$T_w(t) = E_0 + \frac{E_1}{\sqrt{t}} \tag{3.1}$$

Покажем, что при $t \gg t_0$

$$q_w = k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = k\frac{E_0 - T_{w0}}{a\sqrt{\pi t}} - \frac{1}{2}\frac{kE_1R(^1/_2)}{a\sqrt{\pi}}\frac{1}{t} + \ldots \tag{3.2}$$

где k и a — соответственно коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материала стенки.

Согласно [3, 4] для полуограниченного тела $x < 0$

$$T(x,t) = T_{w0}\,\mathrm{erf} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\chi}^{\infty} T_w\left(t - \frac{x^2}{4a^2y^2}\right)e^{-y^2}\,dy \qquad \left(\chi = \frac{-x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{T_w(0) - T_{w0}}{a\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{T_w'(y)}{\sqrt{t-y}}\,dy$$

Полагая

$$T_w(t) = \varphi(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0), \qquad T_w(t) = E_0 + \frac{E_1}{t^{\alpha}} \quad (t \geqslant t_0)$$

при $t \gg t_0$ получим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{E_0 - T_{w0}'}{a\sqrt{\pi t}} - \frac{\alpha E_1 R(\alpha)}{a\sqrt{\pi}\,t^{1/2+\alpha}} - \frac{N_0}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}} + \ldots \tag{3.3}$$

$$N_0 = \int\limits_0^{t_0} \varphi(t)\,dt - \varphi(t_0)t_0 - \frac{\alpha E_1}{(1-\alpha)t_0^{\alpha-1}}$$

и формулу (3.2) при $\alpha = 1/2$

$$R(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(n-\alpha)} \tag{3.4}$$

Сходимость (3.4) легко доказывается с помощью формулы Стирлинга. Так как в теплопроводной зоне газа согласно [1, 2]

$$\frac{\partial T^0}{\partial \xi} = a_0^2\frac{\partial^2 T^0}{\partial \eta^2}, \qquad a_0^2 = \frac{k_0 p_i}{C_p R \rho_i^2} = \mathrm{const}$$

$$T^0 = \frac{T}{T_\infty(t)}, \qquad \xi = \int\limits_0^t \frac{p}{p_i}\,dt, \qquad \eta = \int\limits_0^x \frac{\rho}{\rho_i}\,dx$$

где $k_0 = \lambda_* T^{-1}$ в силу принимаемой линейной зависимости коэффициента теплопроводности газа λ_* от температуры, то по аналогии с формулой (3.2)

$$\left(\frac{\partial T^0}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \frac{1-\varepsilon_0}{a_0\sqrt{\pi\xi}} + \frac{R(1/2)\,\varepsilon_1}{2a_0\sqrt{\pi}}\frac{1}{\xi} + \ldots \tag{3.5}$$

если

$$T_w^0(\xi) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\xi}}$$

Приравнивая температуры и тепловые потоки справа и слева от плоскости $x = 0$ и учитывая, что

$$\xi = t\left(1 + \frac{2d_0}{p_i}t^{-1/2} + \ldots\right), \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = T_\infty(t)\frac{\rho(x=0,t)}{\rho_i}\left(\frac{\partial T^0}{\partial \eta}\right)_0$$

получаем

$$E_0 = \frac{T_{w0} + \varkappa^* T_e(0)}{1 + \varkappa^*}, \qquad \varkappa^* = \frac{k_0 a T_i}{k a_0}$$

$$E_1 = -\frac{2[T_e(0) - E_0] - R(1/2)E_0}{R(1/2)\,T_e(0)\,(1+\varkappa^*)}\varkappa^*\tau_\infty \tag{3.6}$$

Используя выведенную в работах [1,2] связь между параметрами газа на внешней границе теплопроводной зоны и тепловым потоком в стенку q_w

$$p_\infty u_\infty' + \gamma^{-1} p_\infty x_\infty = -\frac{\gamma - 1}{\nu} q_w \tag{3.7}$$

получаем

$$\frac{p_i B_0}{\sqrt{t}} + \frac{p_i B_1}{t^{1/2+\sigma}} + \frac{\gamma - 1}{\nu}\frac{B_0 d_0}{t} + \ldots =$$
$$= -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\left[\frac{k(E_0 - T_{w0})}{a\sqrt{\pi t}} - \frac{kR(1/2)E_1}{2a\sqrt{\pi}\, t}\right] \tag{3.8}$$

Отсюда

$$B_0 = -\frac{(\gamma - 1)k(E_0 - T_{w0})}{\gamma a\sqrt{\pi}\, p_i}$$

Докажем справедливость (2.11). Если зависимость (3.1) имеет место, то, предположив $\sigma > 1/2$, из (3.8) получим соотношение

$$1 + \varkappa^* = \left[1 + \frac{1}{2} R\left(\frac{1}{2}\right)\right]\left[1 + \varkappa^* \frac{T_e(0)}{T_{w0}}\right]$$

между уже известными величинами, которое, вообще говоря, не справедливо.

Если же вместо соотношения (3.1) справедливо следующее:

$$T_w(t) = E_0 + E_1 t^{-\alpha} \qquad (\alpha \neq 1/2,\ \alpha > 0)$$

то согласно (3.3) в правой части (3.8) вместо второго члена стоит член, пропорциональный $t^{-(1/2+\alpha)}$. Поэтому из рассмотрения коэффициентов при t^{-1} ясно, что $\sigma \leqslant 1/2$.

Поступило 26 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldsworthy F. A. The structure of a contact region with application to the reflexion of a shock from a heat-conduction wall. Fluid Mech, 1959, vol. 5, No. 1.
2. Демьянов Ю. А. О влиянии теплопроводности на формирование течений газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
4. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids Oxford, 1959. (Рус. перев.: Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.)