

О ЗНАЧЕНИИ ЭНТРОПИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПАРАБОЛОИДОВ

А. Н. ЛЮБИМОВ

(Москва)

Данная работа содержит результаты исследования величины энтропии на поверхности параболоидов при сверхзвуковом движении их в совершенном газе. Исследование проведено по численным результатам решения задачи о пространственном обтекании затупления, полученным методом [1].

В начале работы кратко изложены состояние вопроса и сведения о методе [1], а затем приведены основные выводы исследования и некоторые данные, подтверждающие их.

1. В большинстве работ, посвященных исследованию пространственных течений газа около тупых тел, значительное внимание уделено определению величины энтропии в критической точке. Вопрос чаще всего ставят так: «Максимальна ли энтропия на поверхности тупого тела при сверхзвуковой скорости его движения?»

Ответ на этот вопрос, прежде всего, необходим для выяснения структуры пространственного течения. Кроме того, утвердительный ответ на вопрос дает основания считать правильными результаты ряда работ, основанных на предположении о максимальном значении энтропии на поверхности тел (см., например, [2, 3]).

Пока нельзя считать успешными попытки аналитическим путем оценить величину энтропии на поверхности тупых тел в пространственных течениях. В [4] оценка величины энтропии на поверхности тела сведена при некоторых допущениях к задаче об исследовании аналитического характера уравнений газовой динамики. Отметим также работу [5], в которой сделан вывод о том, что критическая линия тока не проходит через нормальный к вектору скорости невозмущенного потока участок ударной волны и поверхность тока с максимальной энтропией не смачивает тело. В [6] показано, что в плоскости симметрии течения линия тока с максимальной энтропией смещена от критической линии тока в направлении уменьшения кривизны тела. Выводы этой работы сделаны по данным приближенного анализа, основанного на предположении о постоянстве плотности за ударной волной.

Во многих работах по численному исследованию пространственных течений около тупых тел значительное внимание уделено определению величины энтропии на их поверхности. Однако в большинстве работ не указана точность полученного численного решения. Поэтому сделанные на основании численного решения выводы о значении энтропии на поверхности тел или взаимном расположении критической линии тока и линии тока с максимальной энтропией до конца не обоснованы. Заметим к тому же, что эти выводы часто не совпадают. В [6-8] отмечено, что критическая линия тока проходит выше линии тока с максимальным значением энтропии, а в [9] сделан противоположный вывод. В [10-12] не приведено численных данных, по которым можно было бы определить величину энтропии на поверхности тел и, в частности, в критической точке.

Из-за сложностей проведения измерений в поле пространственного течения экспериментальным путем весьма трудно с удовлетворительной точностью определить величину энтропии на тупом теле. Для этого нужно найти взаимное расположение критической линии тока и линии тока с максимальным значением энтропии, т. е. провести измерения не только поля давления и поля плотности, но и поля скоростей (или поля полного давления). Внесение же в дозвуковой поток любых насадок может привести к искажению экспериментальных результатов в данном случае на большую величину, чем измеряемая. Заметим также, что эксперимент проводится в реальном, вязком газе, поэтому использовать его результаты для объяснения течений идеального газа необходимо с большой осторожностью. Это всегда следует иметь в виду, и особенно при сравнении результатов эксперимента с теоретическими данными в тех областях течения, где вязкость сказывается существенно.

В [13] экспериментально определена критическая точка на поверхности тела при $\alpha \neq 0$ и одновременно за ударной волной, образованной точно таким же телом, насадком измерено полное давление на оси симметрии при $\alpha = 0$. В [13] названы десять различных источников погрешности измерения величины давления. В частности, отмечено, что имевшаяся в рабочей части аэродинамической трубы неравномерность поля скоростей по числу M до 0.4% может привести к ошибкам в измерении полного давления до 1%. Максимальное давление на поверхности тела измерено в нескольких точках и оно оказалось на 0.3% меньше полного давления, измеренного насадком одновременно в другом месте рабочей части трубы. На основании этого в [13] сделан вывод, что энтропия в критической точке не максимальна, а линия тока с максимальной энтропией проходит выше критической линии тока.

В данной работе приведены некоторые результаты численного исследования положения критической точки и значения энтропии на поверхности параболоидов. На основании этих результатов сделана попытка ответить на поставленный выше

вопрос. Исследование проведено на основе численного решения задачи об обтекании совершенным газом ($k = 1.4$) тупого тела. Численное решение получено конечно-разностным методом, предложенным в работе [1].

2. Изложенный в [1] метод расчета пространственных течений газа около тупых тел основан на принципе установления решения по времени. На основании этого принципа численное решение стационарных уравнений ищется как предел решения нестационарных уравнений при $t \rightarrow \infty$ (t — время) и неизменных во времени форме тела и параметрах невозмущенного потока газа.

Уравнения газовой динамики, записанные в [1] в матричной форме, в цилиндрической системе координат (z, r, θ) с осью z , проходящей внутри тела¹, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + A \frac{\partial X}{\partial z} + B \frac{\partial X}{\partial r} + C \frac{\partial X}{\partial \theta} + D = 0 \tag{1}$$

Здесь A, B, C — квадратные матрицы пятого порядка. X, D — матрицы-столбцы. Задача об определении течения около тупого тела может быть сформулирована следующим образом. Отправляясь от некоторых, довольно произвольных начальных

Таблица 1

		по двум узлам		по трем узлам		по четырем узлам	
		z	r	z	r	z	r
Круг. параб. $M_\infty = 4, \alpha = 15^\circ$	P_{\max}	—	—	0.0219	0.1394	0.0216	0.1385
	ρ_{\max}	—	—	0.0219	0.1396	0.0216	0.1385
	$u = 0$	0.0208	0.1359	0.0214	0.1378	0.0287	0.1597
	$v = 0$	0.0224	0.1410	0.0221	0.1400	0.0220	0.1400
Круг. параб. $M_\infty = 6, \alpha = 15^\circ$	P_{\max}	—	—	0.0209	0.1363	0.0207	0.1356
	ρ_{\max}	—	—	0.0210	0.1367	0.0207	0.1358
	$u = 0$	0.0199	0.1331	0.0206	0.1350	0.0270	0.1548
	$v = 0$	0.0215	0.1382	0.0211	0.1373	0.0212	0.1373
Эллипт. параб. $b/a = 1.6667$ $M_\infty = 6, \alpha = 15^\circ$	P_{\max}	—	—	0.0159	0.1029	0.0155	0.1016
	ρ_{\max}	—	—	0.0160	0.1031	0.0155	0.1016
	$u = 0$	0.0153	0.1009	0.0155	0.1017	0.0171	0.1068
	$v = 0$	0.0160	0.1034	0.0158	0.1026	0.0158	0.1028

данных при $t = t_0$, необходимо найти предельное решение при $t \rightarrow \infty$ смешанной задачи для гиперболической системы (1) при соответствующих граничных условиях на поверхности тела и на ударной волне.

Процесс установления решения заканчивается в момент времени $t = \tau$, когда с заданной точностью $\partial X / \partial \tau = 0$. Значения компонент X в этот момент и представляют собой искомое стационарное течение. Алгоритм решения этой задачи подробно изложен в [1].

Конечно-разностным методом [1] проведены расчеты течений совершенного газа около круговых и эллиптических параболоидов при $4 \leq M_\infty \leq 10$ и $0 \leq \alpha \leq 15^\circ$.

Уравнения образующих параболоидов имели следующий вид:

$$z = 1.125r^2, \quad z = 1/2(a_1 \cos^2 \theta + a_2 \sin^2 \theta)r^2$$

При расчетах обтекания эллиптических параболоидов значения a_1, a_2 приняты равными $a_1 = 3, a_2 = 5$ и $a_1 = 5, a_2 = 3$, что соответствует отношению полуосей эллипсов в сечениях параболоидов плоскостями $z = \text{const}$, $b/a = 1.6667$ и $b/a = 0.6$. (Ось эллипса b лежит в плоскости $\theta = 0 \div \pi$, а ось эллипса a — в плоскости $\theta = 1/2\pi \div 3/2\pi$).

Поле течения около параболоидов в узлах конечно-разностной сетки определено с точностью не менее 0.3% при $M_\infty = 4$, 0.5% при $M_\infty = 6$ и 0.8% при $M_\infty = 10$. Ошибки в полученном численном решении максимальны в узлах конечно-разностной сетки, расположенных около поверхности параболоидов на наибольшем удалении от его вершины. Чем ближе узлы сетки расположены к оси z и к ударной волне, тем ошибки меньше.

¹ Начало системы координат помещено в вершину параболоида. Значению $\theta = 0$ соответствует меридиональная полуплоскость, расположенная с наветренной стороны.

Точность численного решения определена на основании интегральных проверок и вычисления значений интеграла Бернулли в узлах конечно-разностной сетки, а также сравнением расчетов с различной конечно-разностной сеткой.

Результаты численного исследования дают основание считать, что для параболоидов энтропия на их поверхности отличается от максимально возможной не более чем на 0.8% при всех числах M_∞ , причем отличия при меньших числах M_∞ меньше. В остальных узлах, не лежащих на поверхности тела, энтропия имеет меньшую величину, чем на поверхности тел.

Координаты критической линии тока и линии тока с максимальным значением энтропии совпадают с точностью не менее 0.2%.

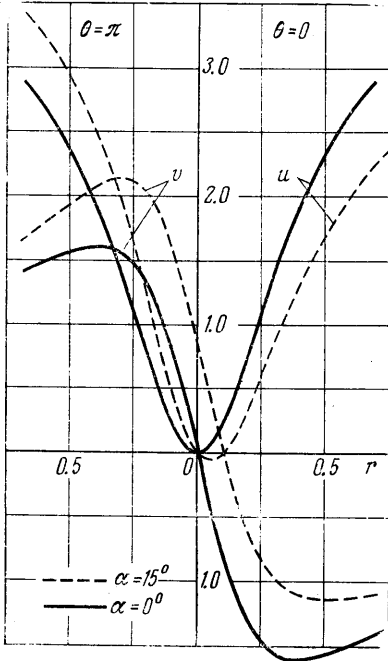
Энтропия в критической точке отличается от максимально возможного значения энтропии, равного энтропии за ударной волной нормальной к вектору скорости невозмущенного потока, не более чем на 0.1%.

Эти выводы сделаны на основе анализа результатов 15 случаев обтекания, отличающихся друг от друга формой тела, числами M_∞ и углами атаки α .

3. Приведем некоторые конкретные данные, подтверждающие сделанные в предыдущем пункте выводы. Прежде всего, отметим, что приведенные ниже значения компонент вектора скорости u, v отнесены к $\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}$, давление — к p_∞ , плотность — к ρ_∞ . Значения p_∞ и ρ_∞ равны соответственно значениям давления и плотности невозмущенного движением тела потока газа. Линейные размеры также безразмерны. Радиус кривизны в вершине кругового параболоида составляет 0.4444... единицы измерения линейных величин, принятой при расчете кругового параболоида. Сумма главных радиусов кривизны в вершинах обоих эллиптических параболоидов составляет 0.5333... единицы измерения линейных величин, принятой при расчете эллиптических параболоидов.

Сначала рассмотрим характер изменения компонент вектора скорости, давления и плотности вдоль поверхности параболоидов в плоскости симметрии течения.

На фиг. 1 приведены типичные для параболоидов функции $u(r), v(r)$, а на фиг. 2 и фиг. 3 — функции $p(r)$ и $\rho(r)$ для эллиптического параболоида $M_\infty = 4$, $\alpha = 0$ и $\alpha = 15^\circ$, $b/a = 1.6667$. Значение осевой компоненты вектора скорости равно нулю в одной точке плоскости $\theta = 0 \div \pi$ при $\alpha = 0$ и в двух точках при $\alpha > 0$. Значение радиальной компоненты v равно нулю в одной точке плоскости $\theta = 0 \div \pi$.



Фиг. 1

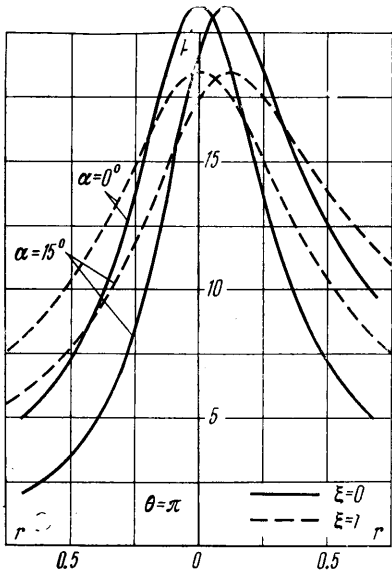
Т а б л и ц а 2

M_∞	α	Круг. параб.		Эллипт. параб., $b/a = 1.6667$	
		Z_*	r_*	Z_*	r_*
4	5	0.002	0.047	0.002	0.035
4	10	0.009	0.091	0.007	0.069
4	15	0.022	0.139	0.016	0.104
6	15	0.021	0.136	0.016	0.102
10	15	0.020	0.134	0.015	0.101

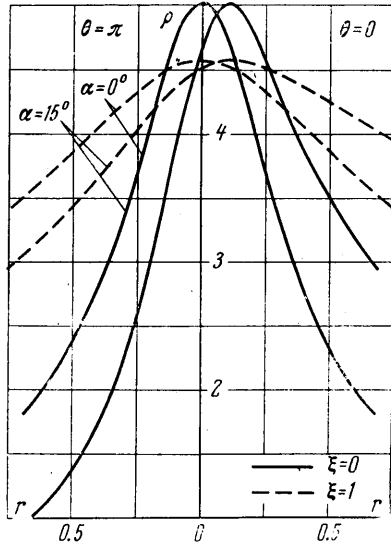
Давление и плотность имеют по одному максимуму в этой плоскости. Из графиков видно, что u, v обращаются в нуль, а p, ρ имеют максимумы в одной и той же точке плоскости $\theta = 0 \div \pi$ на поверхности параболоида. Как известно, такая точка будет критической точкой. При $\alpha = 0$ критическая точка совпадает с началом координат, а при $\alpha > 0$ она смещается в полуплоскость $\theta = 0$.

Для точного определения положения критической точки построены интерполяционные многочлены для всех четырех функций u, v, p, ρ и найдены их нули и максимумы.

В табл. 1 для трех вариантов приведены координаты z, r точек, в которых $u = v = 0$, а также $p = p_{\max}$ и $\rho = \rho_{\max}$. Координаты этих точек определены с помощью интерполяционных многочленов первой, второй и третьей степени. В большинстве случаев обтекания координаты точек максимумов давления и плотности



Фиг. 2



Фиг. 3

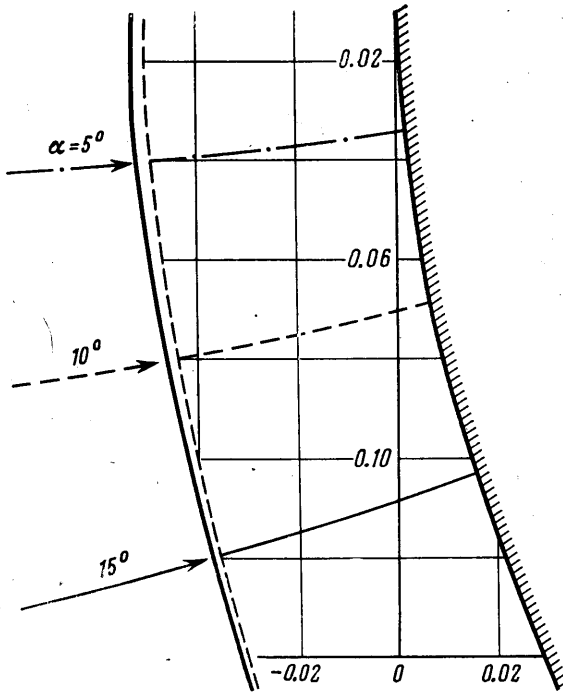
совпадают с точностью до единицы четвертого десятичного знака (при интерполяционных многочленах, построенных по четырем узлам). В некоторых отдельных случаях различия в значениях координат достигают двух единиц четвертого знака. Координаты точек, в которых $u = v = 0$, совпадают между собой и с координатами максимумов p и ρ с меньшей точностью, что можно объяснить более сложным характером изменения u, v вблизи критической точки (см., например, Фиг. 1) и недостаточно высокой степенью интерполяционных многочленов.

Таблица 3

M_∞	α°	p_{\max}		ρ_{\max}		$S = p_{\max} / \rho_{\max}^k$	
		Кол-во узлов		Кол-во узлов		Кол-во узлов	
		3	4	3	4	3	4
4	5	21.06	21.07	5.016	5.016	2.203	2.204
»	10	21.06	21.07	5.015	5.016	2.203	2.204
»	15	21.06	21.07	5.016	5.017	2.203	2.203
6	15	46.80	46.82	5.709	5.710	4.084	4.084
10	15	129.3	129.2	6.155	6.154	10.15	10.15
4	5	21.06	21.07	5.015	5.017	2.203	2.203
»	10	21.08	21.07	5.018	5.016	2.204	2.204
»	15	21.08	21.07	5.018	5.017	2.204	2.203
6	15	46.83	46.82	5.711	5.710	4.084	4.084
10	15	129.3	129.2	6.155	6.154	10.15	10.15

По результатам расчетов, представленным в табл. 1 (и по аналогичным данным), найдены координаты критической точки по максимумам p и ρ . В табл. 2 приведены координаты критических точек, найденных таким путем для 10 вариантов. По результатам табл. 2 можно оценить и величину смещения критической точки в плоскости $\theta = 0 \div \pi$ в зависимости от параметров M_∞, α и формы тела.

В табл. 3 выписаны полученные при помощи интерполяционных многочленов, построенных по 3 и 4 значениям p и ρ в узлах сетки, максимумы давления p_{\max} и плотности ρ_{\max} на поверхности параболоидов в плоскости $\theta = 0 \div \pi$, причем



Фиг. 4

ки показывает, что при $0 \leq r \leq 0.2$ энтропия с точностью не менее 0.1% равна значениям, приведенным в табл. 4. При больших значениях r отклонение энтропии от максимально возможной на поверхности параболоидов увеличивается. При $M_\infty = 10$, $r > 0.7$ оно, например, достигает 0.8%. Увеличение отклонения энтропии от S_0 не отражает какие-либо закономерности ее количества узлов конечно-разностной сетки, на которой получено численное решение.

В плоскости $\theta = 0 \div \pi$ при помощи интерполяционных многочленов найдены координаты линии тока, проходящей в критическую точку и координаты линий с постоянными значениями энтропии.

Координаты линии тока, проходящей в критическую точку, определены численным интегрированием дифференциальных уравнений для линий тока. Интегрирование уравнений проведено от критической точки методом Рунге — Кутты.

Линии постоянных значений энтропии построены на известном численном решении с помощью интерполяционных многочленов четвертой степени.

Линия постоянного максимального значения энтропии совпадает с критической линией тока с точностью, указанной в п. 2. На фиг. 4 приведены эти совпадающие друг с другом линии для случая обтекания эллиптического параболоида ($a_1 = 3$, $a_2 = 5$) при углах атаки $\alpha = 5, 10, 15^\circ$. $M_\infty = 4$. На фиг. 4 не нанесена ударная волна при $\alpha = 5^\circ$.

В заключение автор благодарит В. В. Русанова за ценные советы и обсуждения и Э. И. Нажесткину за проведение расчетов на ЭВМ и активное участие в анализе результатов расчетов.

В верхней части табл. 3 выписаны значения для кругового, а в нижней части — для эллиптического параболоида при $b/a = 1.6667$. В табл. 3 приведены также значения энтропии, вычисленные по этим максимумам, $S = p_{\max} / \rho_{\max}^k$. В табл. 4 приведены точные критические значения давления p_0 и плотности ρ_0 в полностью заторможенном потоке за прямой ударной волной и значения энтропии за прямой ударной волной S_0 .

Из сравнения данных табл. 3 и табл. 4 (и аналогичных результатов для других вариантов) вытекает, что значения p_{\max} и ρ_{\max} совпадают с точностью не менее 0.1% со значениями p_0 и ρ_0 , а значения S с такой же точностью совпадают с максимально возможным значением энтропии S_0 . Таким образом численно найдена критическая точка и установлено, что значение энтропии в ней с указанной точностью максимально.

Вычисление значений энтропии на поверхности параболоидов в узлах сетки

Таблица 4

M_∞	p_0	ρ_0	S_0
4	21.068	5.0162	2.2034
6	46.815	5.7092	4.0849
10	129.22	6.1532	10.153

Поступило 28 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Русанов В. В. Пространственное обтекание затупленного тела сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 3.
2. Vaglio-Laurin R., Ferri A. Theoretical investigation of the flow field about blunt-nosed bodies in supersonic flight. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, No. 12.
3. Mangler K. L. The calculation of the flow field between a blunt body and the bow wave. Hypersonic Flow. Butterworths, London, 1960.
4. Ладыженский М. Д. Пространственные гиперзвуковые течения газа. М., «Машиностроение», 1968.
5. Hayes W., Probstein R. Hypersonic Flow Theory. New York — London, Acad. Press, 1956, vol. 1.
6. Swigart R. I. A theory of asymmetric hypersonic blunt-body flows. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 5.
7. Swigart R. J. Hypersonic blunt-body flow fields at angle of attack. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 1. (Рус. перев.: Свигарт. Гиперзвуковое обтекание затупленного тела под углом атаки. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 1.)
8. Bohachevsky I. O., Mates R. E. A direct method for calculation of the flow about an axisymmetric blunt body at angle attack. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 5. (Рус. перев.: Богачевский, Мейтс. Прямой метод расчета течения около затупленного осесимметричного тела при угле атаки. Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 5.)
9. Webb H. Y., Dresser H. S., Adler B. K., Waiter S. A. Inverse solution of blunt-body flowfields at large angle of attack. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 6. (Рус. перев.: Уэбб мл., Дрессер, Адлер, Уэйтер. Расчет обратным методом поля скоростей около затупленного тела при больших углах атаки. Ракетная техника и космонавтика, 1967, № 6.)
10. Минайло А. Н. О расчете течения у затупленного тела вращения под углом атаки в сверхзвуковом потоке газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, № 1.
11. Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета пространственного обтекания тел с отходящей ударной волной. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 5.
12. Moretti J., Bleich J. Three-dimensional flow around blunt boddies. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 9. (Рус. перев.: Моретти, Блейх. Трехмерное обтекание затупленных тел. Ракетная техника и космонавтика, 1967, № 9.)
13. Глаголев А. И., Зубков А. И. Экспериментальное исследование энтропии на критической линии тока при сверхзвуковом обтекании тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.

О КОЛЕБАНИЯХ ДИСКА В ЖИДКОСТИ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ВНУТРЕННИМ МОМЕНТОМ ИМПУЛЬСА

А. С. ПОПЕЛЬ

(Москва)

В работе [1] исследовалась задача о затухании колебаний диска во вращающейся вязкой жидкости; было показано, что зависимость логарифмического декремента затухания колебаний от скорости вращения Ω_0 характеризуется резким минимумом, лежащим на частоте колебаний $\omega = 2\Omega_0$. Эта зависимость подтверждена экспериментальными данными [2], полученными при колебаниях диска во вращающейся воде. Дальнейшее исследование показало [2, 3], что при частоте $\omega \approx 2\Omega_0$ в жидкости возникают вязкие волны, распространяющиеся от диска, глубина проникновения которых может намного превышать длину волны. Наличие таких волн может быть использовано для наблюдения резонансных явлений, связанных с интерференцией волн, распространяющихся от диска и отраженных от твердой или свободной поверхности, параллельной поверхности диска.

Подобные опыты могут быть поставлены для проведения вискозиметрических измерений.

В данной заметке рассмотрена задача о колебаниях диска во вращающейся жидкости, обладающей внутренним моментом импульса. Обнаружено, что наряду с перечисленными эффектами, характерными для обычной вязкой жидкости, в этом случае могут возникать глубокопроникающие вязкие волны на частоте $\omega \approx \Omega_0$; на той же частоте возникает экстремум зависимости логарифмического декремента затухания от скорости вращения.

1. Уравнения движения жидкости, обладающей внутренним моментом импульса. Следуя работам [4-6], запишем уравнения неразрывности, импульсов и моментов