

На фиг. 4 и 5 даны фотографии теневого картин осесимметричных течений около цилиндра с плоским торцом и цилиндра с полусферической головкой ( $M_\infty = 4.1$ ). В точках, где рвется геометрическая ось, имеет место разрыв плотности 1, в точках излома оси — разрыв производной плотности 2. На фиг. 6 и 7 даны фотографии интерференционных картин, полученные при исследовании течений около тех же тел

Течение	Разрыв	Особенности геометрической оси	Особенности хода интерференционных полос
Пространственное	Плотности	Разрыв геометрической оси	Излом интерференционных полос
	первой производной	Излом геометрической оси	Разрыв кривизны интерференционных полос
Плоское	плотности	Геометрическая ось не меняется	Интерференционные полосы сдвигаются как жесткое целое
	первой производной	Разрыв геометрической оси	Излом интерференционных полос
	второй производной	Излом геометрической оси	Разрыв кривизны интерференционных полос

при  $M_\infty = 4.1$  и угле атаки  $15^\circ$ ; поверхности сильного и слабого разрыва отмечены соответственно цифрами 1 и 2. На фиг. 8 и 9 даны фотографии теневой и интерференционной картин осесимметричного течения около диска ( $M_\infty = 3.4$ ). Разрыв геометрической оси (фиг. 9) и излом интерференционных полос (фиг. 8) свидетельствуют о разрыве плотности 1. Излом геометрической оси (фиг. 9) и разрыв кривизны интерференционных полос (фиг. 8) на границе срывной области свидетельствуют о непрерывности плотности и разрыве ее первой производной 2.

Поступило 19 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Л. А., Теневые методы, М., «Наука», 1968.
2. Абруков С. А. Теневые и интерференционные методы исследования оптических неоднородностей. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1962.

#### ПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТОНКОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Л. М. КОЛЕСНИКОВА, Л. Г. ФРОЛОВ, В. Н. ШМАНЕНКОВ

(Москва)

Рассматриваются подобные решения уравнений несжимаемого ламинарного пограничного слоя на тонком теле вращения при наличии положительного градиента давления. Предполагается, что влияние поперечной кривизны тела на течение в слое не является пренебрежимо малым. Находятся два семейства профилей скорости, одно из которых характеризуется наличием возвратных токов вблизи стенки. Исследуется влияние поперечной кривизны тела на отрыв и интегральные характеристики пограничного слоя.

Уравнения плоского ламинарного пограничного слоя при степенном распределении скорости на внешней границе  $U(x) = cx^m$  допускают в области  $m < 0$  два семейства подобных решений [1]. Второе семейство профилей скорости в отличие от известного решения Фолкнера — Скэн [2] характеризуется наличием возвратных токов вблизи стенки. Интегральные свойства этого семейства профилей широко используются в приближенных методах расчета плоского пограничного слоя для описания течения в области отрыва (см., например, [3, 4]).

Ниже рассматриваются аналогичные два семейства профилей скорости в пограничном слое на тонком теле вращения. Предполагается, что тело расположено вдоль оси осесимметричного дозвукового диффузора, обеспечивающего необходимый положительный градиент давления. Толщина пограничного слоя может быть соизмерима с характерным поперечным размером тела.

1. Уравнения осесимметричного несжимаемого пограничного слоя на тонком теле вращения в прямоугольной системе координат, связанной с контуром тела, имеют вид

$$ru \frac{\partial u}{\partial x} + rv \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( r \frac{\partial u}{\partial y} \right) + rU \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v$  — составляющие вектора скорости по осям  $x, y$ ;  $x$  — координата, отсчитываемая вдоль образующей тела;  $y$  — по нормали к телу;  $r$  — расстояние от оси тела до произвольной точки в пограничном слое;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $U(x)$  — скорость на внешней границе пограничного слоя.

Граничные условия

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u \rightarrow U \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

Преобразуем систему (1.1), (1.2), используя модифицированное преобразование Степанова — Манглера в сочетании с преобразованием подобия

$$\eta = \frac{\rho U}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y r dy, \quad \xi = \mu \rho \int_0^x U r_w^2 dx, \quad \psi(x, y) = \sqrt{2\xi} f(\eta) \quad (1.3)$$

$$r = r_w + y \cos \alpha, \quad \mu = \rho \nu$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $\psi(x, y)$  — функция тока,  $r_w(x)$  — уравнение контура тела,  $\alpha$  — угол между касательной к контуру тела и осью тела.

После преобразования имеем

$$f'''(1 + K\eta) + f''(f + K) + \beta(1 - f^2) = 0 \quad (1.4)$$

$$K = 2\sqrt{2\xi} \cos \alpha / \rho U r_w^2, \quad \beta = 2d(\ln U) / d(\ln \xi)$$

$$f = f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad f' \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

Величины  $K$  и  $\beta$  должны быть постоянными из условий подобия. Параметр кривизны  $K$  характеризует отношение толщины пограничного слоя  $\delta$  на тонком теле вращения к радиусу поперечного сечения. Действительно, из соотношений (1.3) вытекает

$$\delta^0 + 1 = \sqrt{1 + \eta_0 K}, \quad \delta^0 = \delta \cos \alpha / r_w$$

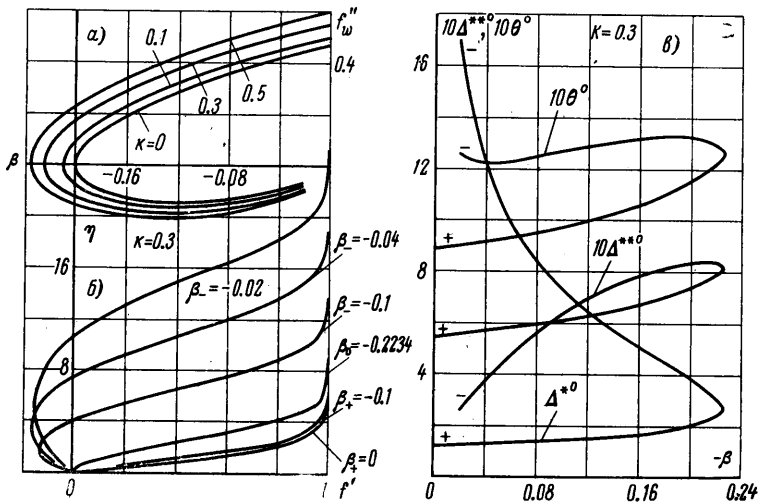
где  $\eta_0$  — безразмерная координата верхней границы пограничного слоя. Если принять тело очень тонким ( $r_w/x$  мало,  $\cos \alpha \sim 1$ ), то имеем  $\delta/r_w + 1 \approx \sqrt{\eta_0 K}$ , так как произведение  $\eta_0 K \gg 1$ . Из условия постоянства параметра  $\beta$  следует, что подобные решения уравнений пограничного слоя на тонком теле вращения имеют место при степенной зависимости  $U = c\xi^{1/2}$  скорости  $U$  от координаты  $\xi$ .

2. Уравнение (1.4) было проинтегрировано численно на ЭВМ М-20 при  $K = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  и  $\beta < 0$  (положительный градиент давления). Решение при заданных  $K$  и  $\beta$  находилось следующим образом. При  $\eta = 0$  задавалось условие  $f''(0) = f_w''$ , при этом параметр  $f_w''$  подбирался таким образом, чтобы при достаточно больших  $\eta$  по крайней мере в трех точках подряд выполнялось условие  $|f' - 1| < \epsilon$ , где  $\epsilon$  — заранее заданная величина. Интегрирование осуществлялось методом Рунге — Кутты с постоянным шагом  $h$  по  $\eta$ . Величины  $h$  и  $\epsilon$  равнялись соответственно 0.05, 0.1 и  $10^{-4}$ .

Для каждого значения  $\beta$  ( $\Delta\beta = -0.02$ ) находились два значения  $f_w''$  ( $f_w'' > 0$ ,  $f_w'' < 0$ ), при которых удовлетворялись все граничные условия. На фигуре, а даны зависимости  $f_w'' = f_w''(\beta)$  для различных  $K$ . Для случая  $K = 0$  результаты совпадают с данными работы [1]. На фигуре, б в качестве примера показаны профили скорости в пограничном слое при различных  $\beta$  для  $K = 0.3$ . Индексом плюс отмечены решения, относящиеся к верхней ветви кривой  $f_w'' = f_w''(\beta)$ , индексом минус — к нижней. Решение уравнения (1.4), соответствующее отрывному профилю ( $f_w'' = 0$ ,  $\beta = \beta_0$ ) для заданного  $K$ , находилось пристрелкой по параметру  $\beta$ .

Рассмотрение представленных зависимостей показывает, что влияние поперечной кривизны сказывается в том, что профили скорости вблизи стенки становятся более полными. Вследствие увеличения напряжения трения на стенке возрастает

градиент давления, необходимый для отрыва пограничного слоя. Из вида уравнения (1.4) следует также, что при больших значениях параметра  $K$  (очень тонкое тело) роль градиента давления становится пренебрежимо малой.



Представляют интерес интегральные характеристики пограничного слоя на тонких телах. Численным интегрированием были получены следующие безразмерные величины:

$$\Delta^{*0} = \frac{\Delta^* \rho U}{2 \sqrt{2\xi} \pi} = \int_0^{\eta_0} (1-f') d\eta, \quad \Delta^{**0} = \frac{\Delta^{**} \rho U}{2 \sqrt{2\xi} \pi} = \int_0^{\eta_0} f'(1-f') d\eta$$

$$\theta^0 = \frac{\theta \rho U}{2 \sqrt{2\xi} \pi} = \int_0^{\eta_0} f'(1-f'^2) d\eta$$

где  $\Delta^*$ ,  $\Delta^{**}$ ,  $\theta$  — соответственно толщина вытеснения, толщина потери импульса и толщина потери энергии. В качестве примера на фигуре,  $\epsilon$  указанные толщины представлены для случая  $K = 0.3$ .

Поступило 4 VII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Stewartson K. Further solutions of the Falkner — Skan equation. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, vol. 50, pt. 3.
2. Falkner V. M., Skan S. W. Some approximate solutions of the boundary layer equations. Aeronaut. Res. Council Rept 1930, No. 1314.
3. Lees L., Reeves B. L. Supersonic separated and reattaching laminar flows. 1. General theory and application to adiabatic boundary layer/shock — wave interactions. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 11. (Рус. перев.: Сверхзвуковые отрывные и присоединяющиеся ламинарные течения, ч. 1. Общая теория и применение ее для анализа взаимодействия скачка уплотнения с адиабатическим пограничным слоем. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 11.)
4. Бондарев Е. Н. Приближенный расчет взаимодействия сверхзвукового потока с ламинарным пограничным слоем в области отрывного течения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
5. Wei H. The asymptotic boundary layer slender of revolution in axial compressible flow. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 5, pp. 809—816.