

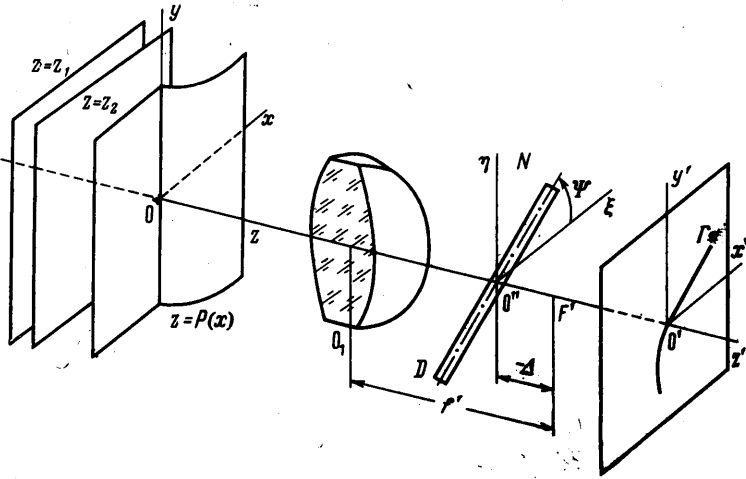
**О ВЫЯВЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ СИЛЬНОГО И СЛАБОГО РАЗРЫВА  
В ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ ПО ДАННЫМ ОПТИЧЕСКОГО  
ЭКСПЕРИМЕНТА**

А. А. ГУБЧИК, Э. П. КАЗАНДЖАН, В. С. СУХОРУКИЧ

(Москва)

Постоянным объектом газодинамических исследований являются течения с разрывами плотности (сильными разрывами) и ее производных (слабыми разрывами). Судить о наличии или об отсутствии таких разрывов, определять форму и положение поверхностей разрыва можно с помощью оптического эксперимента по теневым и интерференционным картинам.

Первым звеном данной работы является установление связи порядка разрыва плотности с порядком разрыва фронта световой волны, прошедшей через исследуемый поток. Второе звено — рассмотрение обусловленных разрывами фронта световой



Фиг. 1

волны особенностей теневых и интерференционных картин. В итоге получены правила, позволяющие экспериментатору определять форму и положение поверхностей разрыва плотности и ее производных. Теоретические результаты проиллюстрированы экспериментальными материалами — теневыми и интерференционными картинками, полученными при исследовании сверхзвуковых пространственных течений.

1. Принята прямоугольная система координат  $Oxyz$  (Фиг. 1). Исследуемый газовый поток, в котором имеются поверхности сильного или слабого разрыва, расположен между плоскостями  $z = z_1$  и  $z = z_2$ . Простоты и наглядности ради будем полагать, что распределение плотности в потоке не зависит от координаты  $y$  (это не ограничивает общности рассмотрения). В направлении оси  $z$  распространяется плоская световая волна, которая, пройдя через поток, также терпит разрыв.

Установим связь порядков разрывов плотности и фронта световой волны. (Будем, как обычно, говорить, что функция имеет в некоторой точке разрыв  $q$ -го порядка, если рвется  $q$ -я производная, а все производные меньших порядков непрерывны.) При некоторых допущениях распределение плотности  $\rho$  связано с формой  $P$  фронта световой волны соотношением (с точностью до постоянных)

$$P(x) = \int_{z_1}^{z_2} \rho(x, z) dz \tag{1.1}$$

Связь порядков разрывов функций  $P$  и  $\rho$  существенно зависит от вида поверхности разрыва. Возможны два характерных случая (Фиг. 2). В случае  $a$  геометрическая длина пути светового луча внутри области  $G$ , ограниченной поверхностью разрыва  $L$  (длина хорды  $l$ ), есть непрерывная функция координаты  $x$ , причем непрерывность функции  $l(x)$  имеет место и в точке  $A$  касания луча к контуру  $L$  (при  $x = 0$ ). В случае  $b$ , когда контур  $L$  имеет «площадку»  $AB$  вдоль направления просвечивания  $z$ , непрерывность функции  $l(x)$  при  $x = 0$  нарушается. Случай  $a$  со-

ответствует пространственному течению (осесимметричному или трехмерному), случай *b* — плоскому (например, образуемому при обтекании профиля, закрепленного между защитными стеклами аэродинамической трубы; при этом  $m = z_1$ ,  $n = z_2$ ).

Пусть контур  $L$  поверхности разрыва (фиг. 2, *a*) образован кривыми  $z = u_1(x)$  и  $z = u_2(x)$ , смыкающимися в точке  $A$ , т. е.  $u_1(0) = u_2(0)$ . Вне контура  $L$   $\rho = \rho_0 = \text{const}$ , внутри —  $\rho = \rho(x, z)$ . Для луча, прошедшего через область  $G$ , имеет место равенство

$$P(x \geq 0) = \int_{z_1}^{u_1(x)} \rho_0 dz + \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \rho(x, z) dz + \int_{u_2(x)}^{z_2} \rho_0 dz = \quad (1.2)$$

$$= \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \rho(x, z) dz + \rho_0 [u_1(x) - u_2(x)] + \rho_0 (z_2 - z_1)$$

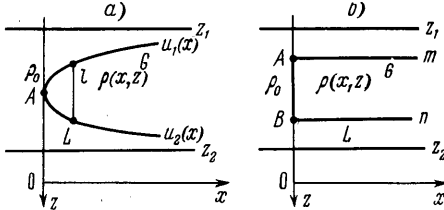
Дифференцируя (1.2) по  $x$ , получаем

$$P_x(x \geq 0) = \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \rho_x(x, z) dz + [\rho(x, u_2) - \rho_0] u_2'(x) - [\rho(x, u_1) - \rho_0] u_1'(x) \quad (1.3)$$

Если функция  $P_x$  имеет в 0 разрыв, т. е.  $P_x(+0) \neq P_x(-0)$ , то согласно (1.3) должен быть и разрыв  $\rho$ , иначе в правой части (1.3) останется только первый член, обращающийся в нуль при  $x = +0$ . Следовательно, в случае *a* разрыву  $P$  первого порядка соответствует разрыв  $\rho$  нулевого порядка.

Для контура, имеющего «площадку» вдоль оси  $z$  (фиг. 2, *b*), связь порядков разрывов  $P$  и  $\rho$  будет иной. Рассматривая для наглядности простейший контур такого типа, когда  $u_1(x) = m = \text{const}$ ,  $u_2(x) = n = \text{const}$ , будем иметь равенство (3) в виде

$$P_x(x \geq 0) = \int_m^n \rho_x(x, z) dz \quad (1.4)$$



Фиг. 2

порядков разрывов функций  $P$  и  $\rho$  сохраняется и при разрыве  $P$  второго порядка, т. е. для контуров типа *a* порядок разрыва  $P$  на единицу больше порядка разрыва  $\rho$ , а для контуров типа *b* порядки разрывов совпадают.

2. Рассмотрим особенности теневых и интерференционных картин, обусловленные разрывом фронта световой волны. Рассмотрение проведем применительно к теневому методу щели и расфокусированной нити [1] и к интерференционному методу с плоской волной сравнения и с полосами конечной ширины [2].

Схема теневого метода щели и расфокусированной нити показана на фиг. 1. Плоскость  $xOy$  — плоскость предмета оптической системы  $O_1$  приемной части теневого прибора; второе фокусное расстояние  $O_1$  равно  $f'$ . Плоскость  $N$ , где находится нить  $D$ , смещена на отрезок  $\Delta$  от второй фокальной плоскости. Ось нити составляет угол  $\psi$  с плоскостью  $xOz$ , так что уравнение оси нити в плоскости  $N$  имеет вид

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \psi \quad (2.1)$$

Плоскость  $x'O'y'$  — плоскость изображения. Линейное увеличение в пространстве изображений полагаем равным минус единице. Между точками плоскостей  $xOy$ ,  $\xi O'\eta$  и  $x'O'y'$  геометрическая оптика устанавливает соответствие, выражаемое следующими формулами:

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad \xi = -V_x(f' - \Delta), \quad \eta = -V_y(f' - \Delta) \quad (2.2)$$

где  $V_x$  и  $V_y$  — производные функции

$$V(x, y) = P(x) + \frac{\Delta}{2f'(f' - \Delta)}(x^2 + y^2) \quad (2.3)$$

Точки плоскости изображения  $x'O'y'$ , которым геометрическая оптика приводит в соответствие лучи, задифрагмированные серединой нити, образуют так называемую геометрическую ось  $\Gamma$  дифракционной картины.

Выясним особенности хода геометрической оси, вызванные разрывом фронта световой волны. В соответствии с п. 1 линия разрыва совпадает с осью  $y$ . Вблизи плоскости предмета

$$P = 0 \quad \text{при } x \leq 0, \quad P = P(x) \quad \text{при } x \geq 0 \quad (2.4)$$

Комбинируя соотношения (2.1) — (2.4), получаем уравнение геометрической оси:

$$\begin{aligned} y' &= x' \operatorname{tg} \psi && \text{при } x' \geq 0 \\ y' &= x' \operatorname{tg} \psi - \Delta^{-1} f' (f' - \Delta) \operatorname{tg} \psi P_x && \text{при } x' \leq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если функция  $P$  имеет в 0 разрыв первого порядка, т. е.

$$P(+0) = P(-0), \quad P_x(+0) \neq P_x(-0),$$

то, как видно из (2.5), происходит разрыв в ходе геометрической оси. Если функция  $P$  имеет в 0 разрыв второго порядка, т. е.

$$P(+0) = P(-0), \quad P_x(+0) = P_x(-0), \quad P_{xx}(+0) \neq P_{xx}(-0),$$

то разрыва в ходе геометрической оси нет, но происходит излом геометрической оси (скачкообразное изменение наклона). Действительно, дифференцируя (2.5), имеем

$$\frac{dy'}{dx'} = \begin{cases} \operatorname{tg} \psi & \text{при } x' \geq 0 \\ \operatorname{tg} \psi + \Delta^{-1} f' (f' - \Delta) \operatorname{tg} \psi P_{xx} & \text{при } x' \leq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{dy'}{dx'} \right|_{x'=+0} \neq \left. \frac{dy'}{dx'} \right|_{x'=-0}$$

Выясним теперь влияние разрыва фронта световой волны на ход интерференционных полос конечной ширины. В плоскости изображения  $x'O'y'$  интерферируют две световые волны: исследуемая волна  $z' = f_1$  и плоская волна сравнения  $z' = f_2$ , повернутая вокруг оси  $x'$  на угол  $\operatorname{arctg} k$  (фиг. 3).

Вдоль интерференционной полосы, образующейся в плоскости изображения, выполняется равенство

$$\begin{aligned} f_1(x') - f_2(y') &= c = \operatorname{const}, & f_2(y') &= ky' \\ f_1(x') &= 0 \quad \text{при } x' \geq 0, & f_1(x') &= P(-x') \quad \text{при } x' \leq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Комбинируя соотношения (2.7), можно получить уравнение интерференционной полосы

$$y' = -c/k \quad \text{при } x' \geq 0, \quad y' = -c/k + P \quad \text{при } x' \leq 0 \quad (2.8)$$

Дифференцируя (2.8), найдем

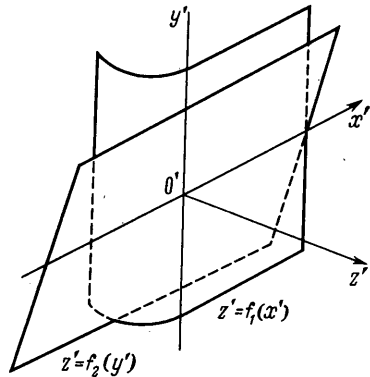
$$\frac{dy'}{dx'} = \begin{cases} 0 & \text{при } x' \geq 0, \\ -P_x & \text{при } x' \leq 0, \end{cases} \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \begin{cases} 0 & \text{при } x' \geq 0 \\ P_{xx} & \text{при } x' \leq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Из соотношений (2.8), (2.9) следует, что разрыва интерференционной полосы не происходит, если фронт световой волны непрерывен (нет разрыва нулевого порядка); при разрыве фронта световой волны первого порядка интерференционная полоса изламывается; при разрыве второго порядка искривляется плавно (без излома), но с разрывом кривизны.

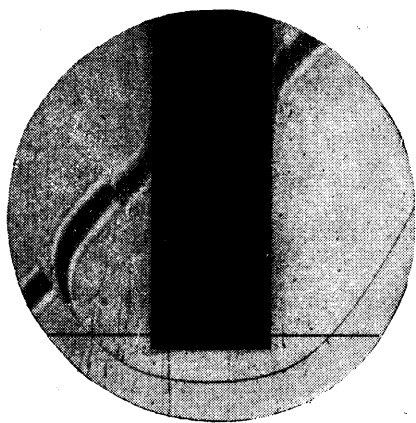
В проведенном анализе фигурируют разрывы фронта световой волны лишь первого и второго порядков. Рассмотрение разрывов других порядков нецелесообразно: разрыв волнового фронта нулевого порядка не меняет хода геометрической оси и приводит лишь к жесткому сдвигу всей системы интерференционных полос. Изменения же, вызываемые разрывами третьего и более высоких порядков, в реальных условиях не улавливаются.

Подытоживая полученные результаты, можно получить следующую сводку о разрывах плотности и ее производных (см. таблицу).

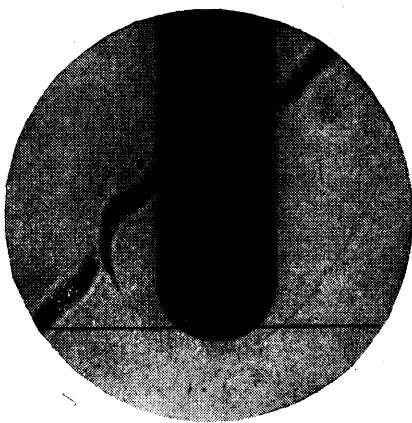
Форму и положение поверхностей разрыва определяют по серии фотографий теневых картин, полученных при различных положениях нити, или по совокупности интерференционных полос на фотографии интерференционной картины.



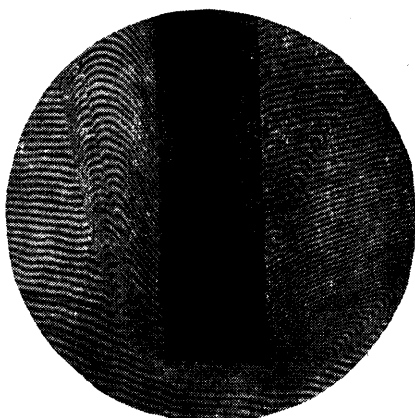
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



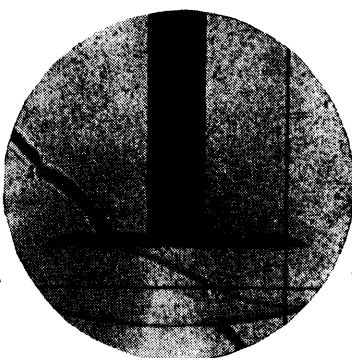
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

3. На фиг. 4—9 приведены фотографии теневых и интерференционных картин, полученные при исследовании пространственных течений с помощью серийного теневого прибора ИАВ-451 и интерферометра Маха — Цендера (темные горизонтальные и вертикальные линии на фотографиях представляют собой изображения координатных проволочек, закрепленных вблизи защитных стекол аэродинамической трубы).

На фиг. 4 и 5 даны фотографии теневого картин осесимметричных течений около цилиндра с плоским торцом и цилиндра с полусферической головкой ( $M_\infty = 4.1$ ). В точках, где рвется геометрическая ось, имеет место разрыв плотности 1, в точках излома оси — разрыв производной плотности 2. На фиг. 6 и 7 даны фотографии интерференционных картин, полученные при исследовании течений около тех же тел

Течение	Разрыв	Особенности геометрической оси	Особенности хода интерференционных полос
Пространственное	Плотности	Разрыв геометрической оси	Излом интерференционных полос
	первой производной	Излом геометрической оси	Разрыв кривизны интерференционных полос
Плоское	плотности	Геометрическая ось не меняется	Интерференционные полосы сдвигаются как жесткое целое
	первой производной	Разрыв геометрической оси	Излом интерференционных полос
	второй производной	Излом геометрической оси	Разрыв кривизны интерференционных полос

при  $M_\infty = 4.1$  и угле атаки  $15^\circ$ ; поверхности сильного и слабого разрыва отмечены соответственно цифрами 1 и 2. На фиг. 8 и 9 даны фотографии теневой и интерференционной картин осесимметричного течения около диска ( $M_\infty = 3.4$ ). Разрыв геометрической оси (фиг. 9) и излом интерференционных полос (фиг. 8) свидетельствуют о разрыве плотности 1. Излом геометрической оси (фиг. 9) и разрыв кривизны интерференционных полос (фиг. 8) на границе срывной области свидетельствуют о непрерывности плотности и разрыве ее первой производной 2.

Поступило 19 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Л. А. Теневые методы. М., «Наука», 1968.
2. Абруков С. А. Теневые и интерференционные методы исследования оптических неоднородностей. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1962.

#### ПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТОНКОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Л. М. КОЛЕСНИКОВА, Л. Г. ФРОЛОВ, В. Н. ШМАНЕНКОВ

(Москва)

Рассматриваются подобные решения уравнений несжимаемого ламинарного пограничного слоя на тонком теле вращения при наличии положительного градиента давления. Предполагается, что влияние поперечной кривизны тела на течение в слое не является пренебрежимо малым. Находятся два семейства профилей скорости, одно из которых характеризуется наличием возвратных токов вблизи стенки. Исследуется влияние поперечной кривизны тела на отрыв и интегральные характеристики пограничного слоя.

Уравнения плоского ламинарного пограничного слоя при степенном распределении скорости на внешней границе  $U(x) = cx^m$  допускают в области  $m < 0$  два семейства подобных решений [1]. Второе семейство профилей скорости в отличие от известного решения Фолкнера — Скэн [2] характеризуется наличием возвратных токов вблизи стенки. Интегральные свойства этого семейства профилей широко используются в приближенных методах расчета плоского пограничного слоя для описания течения в области отрыва (см., например, [3, 4]).