

обтекаемыми телами, считая течение вне вязкого ядра следа эквивалентным течению в ударном слое длинного притупленного цилиндра. Влияние параметра  $I_0$  в этом случае будет невелико. В качестве  $c_x$  в этом случае необходимо использовать коэффициент сопротивления тела в целом  $c_{xT}$ . Принимая за характерный размер радиус мицеля тела  $R$ , получаем для эффективного коэффициента сопротивления и координаты подобия в случае следа следующие выражения:

$$c_{x^*} = c_{xT} \left[ 1 - \frac{2E_1}{c_{xT}} \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 \right] \quad x_1 = \frac{x}{R \gamma c_{x^*}} \quad (3.1)$$

где функция  $E_1$  определяется соотношением (2.4).

В заключение автор выражает глубокую признательность В. В. Луневу за постоянное внимание к работе и Г. Н. Степанову за проведение ряда расчетов.

Поступило 26 V 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. О движении в атмосфере тонкого затупленного тела с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, № 4.
2. Лунев В. В. Гиперзвуковое обтекание тонких притупленных тел с физико-химическими превращениями газа в высокоэнтропийном слое. ПМТФ, 1964, № 5.
3. Лунев В. В. О форме головной ударной волны при гиперзвуковом обтекании тупых тел. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
4. Лунев В. В., Павлов В. Г. О видоизменении взрывной аналогии при обтекании тонких притупленных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
5. Душин В. К. Применение метода характеристик для расчета сверхзвуковых внешних течений газа при наличии неравновесных процессов. В сб.: «Численные методы решения задач математической физики», М., «Наука», 1966.
6. Северинов Л. И. Расчет сверхзвуковой части возмущенной области у затупленного тела при сверхзвуковом неравновесном обтекании. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, № 3.
7. Лебедев М. Г., Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тияков Г. П. Приближенный метод учета влияния реальности газа при гиперзвуковом обтекании сегментальных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
8. Вальо-Лаурин Р., Блум М. Химические эффекты во внешних гиперзвуковых течениях. В кн.: «Исследование гиперзвуковых течений», М., «Мир», 1964.
9. Чушкин П. И. Исследование обтекания затупленных тел вращения при гиперзвуковой скорости. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, № 2.

#### О ПОЛОЖЕНИИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ СЕГМЕНТАЛЬНЫХ ТЕЛ

В. А. ЗЕМЛЯНСКИЙ

(Москва)

При гиперзвуковом обтекании сферического сегмента с углом полураствора  $\theta$ , под углом атаки  $\alpha$ , близким к  $\theta_0$ , положение критической точки сильно зависит от термодинамического состояния газа за отошедшей ударной волной. Ниже показано, что для равновесного газа при  $k \ll 1$  расстояние  $r_0$  от критической точки до ближайшей точки кромки сегмента пропорционально  $k^{1/2}R$ , где  $k$  — отношение плотности газа в набегающем потоке к плотности за прямым скачком,  $R$  — радиус кривизны сегмента.

Эффект смещения критической точки к кромке при уменьшении  $k$  нужно учитывать при экстраполяции экспериментальных результатов по силовому и тепловому воздействию потока на тело, полученных в аэродинамических установках, не моделирующих реальные свойства воздуха, на условия обтекания, соответствующие полету в атмосфере с большой скоростью, когда за скачком имеют место физико-химические превращения. В частности, он представляет интерес для спускаемых аппаратов «Союз» [1] и «Аполлон», имеющих сегментальную форму.

1. При гиперзвуковом обтекании сильно затупленного тела в условиях равновесного протекания физико-химических процессов за скачком основным характерным параметром течения в трансзвуковой области является уклонение газа в прямом скачке или обратная к нему величина  $k$ . Если для совершенного двухатомного газа предельное (при числе Маха  $M_\infty \gg 1$ ) значение  $k = (\gamma - 1) / (\gamma + 1) = 1/6$  ( $\gamma$  — по-

казатель адиабаты), то в равновесных условиях при полете в атмосфере, которые типичны для лобовой части аппарата на значительном участке траектории, включая области наибольших перегрузок и тепловых потоков, значение  $k$  может уменьшаться до  $\sim 0.05$ . Для пояснения связанных с этим особенностей отметим, что в ньютоновском пределе ( $k \rightarrow 0$ ) толщина ударного слоя стремится к нулю, и критическая точка будет там, где нормаль к телу совпадает с направлением набегающего потока. В условиях экспериментов в аэродинамических установках холодного воздуха, где энтальпия торможения  $i_0$  сравнительно невелика и реальные свойства газа практически не проявляются ( $k \geq 0.2$ ), положение критической точки значительно отстает от предельного [2]. В связи с этим требуется количественная оценка влияния  $k$  на  $r_0$  — характерный размер для течения в окрестности критической точки. В строгой постановке эта задача является частью более общей и сложной задачи расчета трехмерной трансзвуковой области течения около тупого тела, для решения которой разработаны численные методы [3, 4]. Ввиду их трудоемкости рассмотрим исходную задачу приближенно.

Будем считать, что  $M_\infty \gg 1$ ,  $k \ll 1$ . Примем вначале, что  $\alpha = \theta_0$ . При этих условиях критическая точка располагается близко к угловой кромке (фиг. 1), так что кривизна тела не будет играть существенной роли, и естественно ожидать, что течение вблизи этой точки качественно сходно с симметричным течением около сильно затупленного тела типа диска с радиусом  $r_0$ . Поэтому можно предположить, что в рассматриваемой задаче, как и для диска, в плоскости угла атаки радиус кривизны ударной волны  $R_s$  в критической точке будет величиной порядка  $k^{-1/2}r_0$ .

С другой стороны, при  $k \ll 1$  ударная волна близко прилегает к телу (если угол  $\theta_0 + \theta_k > \theta^*$ , где  $\theta^* \approx 40^\circ$  — центральный угол до звуковой точки на сфере,  $\theta_k$  — центральный угол до критической точки на сегменте (фиг. 1)), поэтому ее кривизна в основном определяется кривизной сегмента, т. е.  $R_s \sim R$ . Тогда, очевидно,  $r_0 \sim k^{1/2}R$ .

Эти интуитивные соображения могут быть подкреплены. Действительно, поскольку при  $\alpha = \theta_0$  звуковая точка  $B'$  на волне (фиг. 1) находится вблизи угловой точки  $B$  на теле (это подтверждается экспериментальными данными и результатами имеющихся численных расчетов [5, 6]), то отрезок  $OB = r_0$  имеет порядок расстояния  $O'B'$  на ударной волне, т. е.  $r_0 \sim \epsilon R_s$ , где  $\epsilon$  — угол между нормалью к скачку в звуковой точке и направлением набегающего потока. При  $k \ll 1$  для реального газа, как и для совершенного,  $\epsilon \approx k^{1/2}$  с точностью  $\sim 5\%$  вплоть до  $k = 0.25$ . Отсюда с учетом  $R_s \sim R$  снова имеем  $r_0 \sim k^{1/2}R$ .

Кроме того, отметим, что для плоского аналога рассматриваемой задачи — обтекание выпуклой дуги окружности длиной  $2\theta_0 R$  под углом атаки  $\alpha = \theta_0$  к биссектрисе центрального угла  $2\theta_0$  — по аналогичным соображениям также  $r_0 \sim k^{1/2}R$ . Для этого случая, однако, оценку для  $r_0$  нетрудно получить другим путем. Рассмотрим эту задачу в приближении «мелкой воды» (например, [7]), которое хотя и является слишком грубым для расчета скорости на теле, приводит к удовлетворительным результатам по форме ударной волны, что достаточно для наших целей. Интегрируя уравнения неразрывности и импульса, которые в рамках этой схемы можно представить в виде

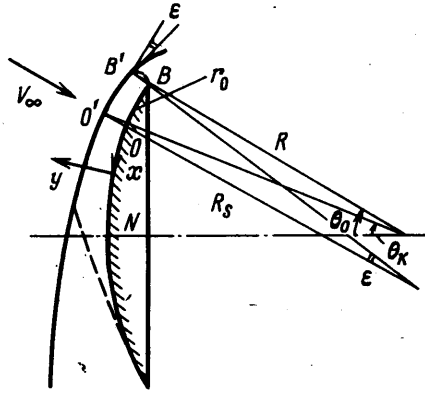
$$\frac{d}{dx} \rho u \delta + U_n = 0, \quad \frac{d}{dx} (\rho u^2 + p) \delta + u_\infty U_n = 0$$

$$\left( U_n \approx -u_\infty \delta' + v_\infty, \quad u_\infty = V_\infty \sin \frac{x}{R}, \quad v_\infty = -V_\infty \cos \frac{x}{R}, \quad \delta' = \frac{d\delta}{dx} \right) \quad (1.1)$$

и ограничиваясь областью  $x \sim r_0 \ll R$ , найдем

$$\rho u \delta \approx x - r_0, \quad (\rho u^2 + p) \delta \approx p_0 \delta_0 + \frac{1}{2R} (x^2 - r_0^2) \quad (1.2)$$

Здесь  $x, y$  — система координат с центром в точке  $B$ , показанная на фиг. 1;  $y = \delta(x)$  — толщина ударного слоя;  $u, p, \rho$  — скорость газа вдоль тела, плотность и давление;  $V_\infty$  — скорость набегающего потока; индекс 0 относится к параметрам



Фиг. 1

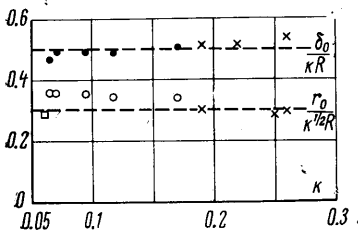
в критической точке ( $x = r_0$ ). При  $x = 0$  имеем звуковую точку ( $u = -u_* \approx -V_\infty k^{1/2}$ )<sup>1</sup>. Для замыкания задачи используем соотношение  $\delta(0) \approx \delta_0 - \delta_0' r_0$ . Из условия, что в критической точке  $u = u_\infty - (1-k)U_n n_x = 0$ , где  $n_x \approx -\delta_0'$ , найдем  $\delta_0' \approx r_0/R$ . С учетом этого имеем из (1.2)  $r_0 \sim k^{1/2}R$ .

Приведенные соображения свидетельствуют о том, что в случае пространственного обтекания сегмента при  $\alpha = \theta_0$  и  $k \ll 1$  для расстояния  $r_0$  от критической точки до кромки должна иметь место простая зависимость

$$r_0 = Ak^{1/2}R \quad (1.3)$$

где коэффициент  $A$  практически не зависит от условий обтекания и определяется лишь геометрией течения.

Имеющиеся экспериментальные данные (крестики) и результаты численных расчетов А. Н. Минайлоса (точки) для сферического сегмента при  $\alpha = \theta_0 = 30^\circ$ , частично представленные в работе [5], показывают (фиг. 2), что в представляющем интерес диапазоне значений  $k$  (0.05–0.30) величина  $A$ , действительно, примерно постоянна и по данным эксперимента при  $M_\infty = 6$  ( $k = 0.19$ ) может быть взятой  $A \approx 0.3$  (при этом ошибки в  $r_0$  не превышают 15–20%). Там же для  $k = 0.06$  приведен результат приближенного метода трубок тока в форме, предложенной в работе [2] (квадрат).



Фиг. 2

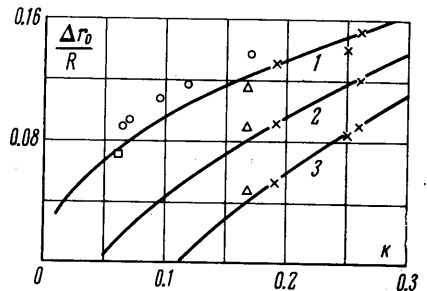
Заметим, наконец, имея в виду аналогию с диском, что отход скачка  $\delta_0$  в критической точке должен иметь порядок  $k^{1/2}r_0$ , откуда  $\delta_0 \sim kR$ . Как видно из фиг. 2, где приведены экспериментальные и упомянутые расчетные значения  $\delta_0/kR$  для  $\alpha = \theta_0 = 30^\circ$ , это действительно имеет место, что также косвенно подтверждает основную оценку (1.3).

Рассмотрим теперь случай  $\alpha < \theta_0$ . Здесь при  $\theta_0 - \alpha \ll \varepsilon$  ситуация аналогична рассмотренной, справедлива прежняя схема (фиг. 1) и оценка для  $r_0$ . При этом коэффициент  $A$  в (1.3) будет зависеть от  $\alpha$  и  $\theta_0$ . Согласно экспериментальным данным при  $M_\infty = 6$  ( $k = 0.19$ ) для  $25 \leq \theta_0 \leq 30$ ,  $20 \leq \alpha \leq 30$  можно принять ( $\alpha, \theta_0$  — в градусах)<sup>2</sup>.

$$r_0 = Ak^{1/2}R, \quad A = 0.3 + 0.022(\theta_0 - \alpha) \quad (1.4)$$

При  $\theta_0 - \alpha \geq \varepsilon$  с уменьшением  $k$  прежняя схема нарушается, звуковая точка  $B'$  на ударной волне будет смещаться к  $O'$  (фиг. 1), поскольку угол  $\varepsilon$  в точке  $R'$  на волне уменьшается ( $\varepsilon \approx k^{1/2}$ ), а расстояние  $OB$  ограничено снизу ньютоновским пределом  $r_{0н} = (\theta_0 - \alpha)R$ . Течение качественно будет ближе к течению около сферического сегмента с фиксированной звуковой точкой. Естественно предположить, что положение критической точки здесь стабилизируется по достижении ньютоновского предела, т. е.  $r_0 = r_{0н}$ .

На фиг. 3 для  $\theta_0 - \alpha = 0, 5, 10$  (кривые 1, 2, 3) приведены полученные указанным путем расстояния  $\Delta r = r_0 - r_{0н}$  от критической точки до точки ньютоновского предела, а также иллюстрирующие точность основной оценки (1.4) экспериментальные (крестики) и описанные выше расчетные результаты (точки, квадрат). Треугольником помечены результаты работы [6], в которой сферический сегмент аппроксимировался поверхностью с непрерывно возрастающей к кромке кривизной.



Фиг. 3

Эти сравнения показывают, что для рассматриваемого класса тел при  $\alpha \leq \theta_0$  реальные равновесные процессы за ударной волной, сопровождающиеся снижением  $k$ , приводят к смещению критической точки к кромке при фиксированном  $\alpha$  по закону (1.4), где множитель  $A$  может быть найден из эксперимента.

2. С использованием этих результатов можно предложить полумэмпирический метод, позволяющий получить оценки основных параметров, характеризующих тече-

<sup>1</sup> При  $M_\infty \gg 1$  точность этого соотношения не хуже  $\sim 5\%$ . С уменьшением  $M_\infty$  его погрешность возрастает и при  $M_\infty = 4$ ,  $\gamma = 1.4$  ( $k \approx 0.22$ ) составляет около 15%.

<sup>2</sup> Отметим, что при небольших  $\alpha - \theta_0 > 0$  снова справедлива та же схема, что и при  $\alpha = \theta_0$ , требуется лишь проверить и, возможно, уточнить аппроксимацию (1.4) для  $A$ .

ние в окрестности рассматриваемой пространственной критической точки, — градиентов скорости  $\beta_1, \beta_2$  по двум взаимноортогональным направлениям и отхода скачка  $\delta_0$ , необходимых для расчета аэродинамического нагрева.

Рассмотрим обтекание без угла атаки эллиптического диска, малая полуось которого  $d$  пропорциональна  $r_0$ , а отношение полуосей  $\lambda < 1$  пропорционально отношению  $r_0$  к расстоянию от критической точки до кромки сегмента по дуге большого круга в направлении, ортогональном к плоскости симметрии (последнее с учетом (1.3) при  $k \ll 1$  имеет порядок  $k^{1/4}R$ )

$$d = v_1 r_0, \quad \lambda = v_2 k^{1/4} \quad (2.1)$$

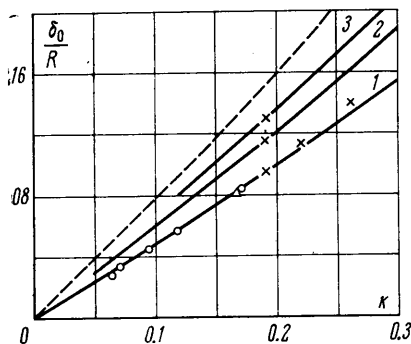
Гиперзвуковое обтекание таких притуплений в приближенной постановке [8] рассматривалось В. В. Луневым и К. М. Магомедовым. Ими получено

$$\frac{\delta_0}{d} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta^*}{d} + \left( \left( \frac{\delta^*}{d} \right)^2 + 2\Phi \right)^{1/2} \right], \quad \frac{\delta^*}{d} = \frac{1.25k^{1/2}}{1 + \lambda} (1 + 1.25k) \quad (2.2)$$

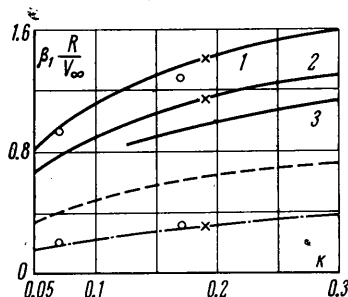
$$\beta_1 = \frac{\Phi}{\delta_0} \left( k \frac{3 + \lambda}{1 + \lambda} \right)^{1/2} V_\infty, \quad \Phi(\lambda, k) \approx \frac{1.52k}{1 + \lambda}$$

Здесь  $\delta^*$  — среднемассовый отход скачка в звуковом горле.

Подберем теперь  $v_1, v_2$  в (2.1) так, чтобы рассчитанные по этой схеме  $\delta_0$  и  $\beta_1$  для некоторого значения  $k$  совпали с истинными. Принимая за основу эксперимен-



Фиг. 4



Фиг. 5

тальные данные при  $M_\infty = 6$  ( $k = 0.19$ ), можно получить в диапазоне справедливости (1.4) (углы  $\alpha, \theta_0$  — в градусах)

$$v_1 = 1.17 - 0.022(\theta_0 - \alpha), \quad v_2 = 0.7 + 0.01(\theta_0 - \alpha) \quad (2.3)$$

Результаты расчетов  $\delta_0, \beta_1$  при  $0.05 \leq k \leq 0.30$  с погрешностью не выше 5% аппроксимируются простыми соотношениями

$$\delta_0 = 1.4k^{1/2}d, \quad \beta_1 d = 1.32k(1 - {}^3/4 k) V_\infty \quad (2.4)$$

С учетом (2.2) — (2.4) в области справедливости (1.4) получаем для  $\theta_0 - \alpha = 0, 5, 10$  соответственно

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0.49kR, & \beta_1 R &= 3.76k^{1/2}(1 - {}^3/4 k) V_\infty \\ \delta_0 &= 0.61kR, & \beta_1 R &= 3.04k^{1/2}(1 - {}^3/4 k) V_\infty \\ \delta_0 &= 0.69kR, & \beta_1 R &= 2.67k^{1/2}(1 - {}^3/4 k) V_\infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

На Фиг. 4, 5 приведены полученные зависимости для  $\delta_0/R, \beta_1 R/V_\infty$  (кривые 1, 2, 3 относятся соответственно к  $\theta_0 - \alpha = 0, 5, 10$ ). Пунктиром приведены соответствующие зависимости для сферы [9]. Для иллюстрации точности этих оценок там же показаны экспериментальные данные и результаты численных расчетов.

Интуитивно ясно (и это действительно так), что эта схема слишком груба в отношении градиента скорости  $\beta_2$  в ортогональном к плоскости симметрии направлении, так как расход газа в этом направлении заведомо занижен. Однако для оценки  $\beta_2$  имеется другой путь, основанный на известном для широкого класса пространственно обтекаемых тупых тел факте слабого изменения параметра растекания

на теле вдоль плоскости угла атаки [5, 10]. Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial s} + \frac{\partial \rho v r}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.6)$$

записанного в системе координат  $s, y, \varphi$  (соответствующие компоненты скорости  $u, v, w$ ), где  $s$  — расстояние по дуге большого круга от вершины сегмента  $N$ ,  $y$  — расстояние от тела,  $\varphi$  — окружной угол, отсчитываемый от наветренной плоскости ( $r$  — расстояние от оси тела), в точке  $N$  на теле получим, что параметр растекания  $g$ , определяемый соотношением  $w = g \sin \varphi$ , равен модулю местной скорости ( $g = U$ ), который можно найти из уравнения Бернулли. Давление в точке  $N$  достаточно хорошо описывается формулой Ньютона  $p = p_0 \sin^2 \alpha$  ( $p_0$  — давление в критической точке). Параметр  $g$  меняется вдоль тела слабо, поэтому при малых  $k$  можно получить простую оценку  $g$  в критической точке

$$g / 2 \sin \alpha \approx 0.7k^{1/2} \quad (2.7)$$

Сравнение этой зависимости (штрих-пунктир) с экспериментом и расчетами показано на фиг. 5. Градиент  $\beta_2 = g / r_k$ , где  $r_k$  — расстояние от критической точки до оси тела, определяется с учетом (1.4).

Приведенные сравнения показывают, что наибольшие ошибки предлагаемой простой схемы не превышают 10%.

В заключение отметим влияние смещения критической точки на теплообмен. Тепловой поток  $q_0$  в критической точке пропорционален  $(0.75 + 0.25c)\sqrt{\beta_1}$  [11]. Здесь  $c = \beta_2 / \beta_1 < 1$ , а  $\beta_1 R \sim k^{1/2} V_\infty$  согласно (2.5), поэтому  $q_0 \sim k^{1/4} R^{-1/2}$ , как и на сфере. Из (2.5) при  $0.05 \leq k \leq 0.2$  можно найти, что  $q_0 \approx 1.4q_R$  ( $q_R$  — тепловой поток в критической точке сферы радиуса  $R$ ), т. е. на  $q_0$  отмеченный эффект не влияет. Для угловой точки тела  $B$ , где достигается местная скорость звука  $u_* \approx k^{1/2} V_\infty$ , положение иное. При ламинарном течении здесь тепловой поток  $q_* \sim u_*^{1/2} x_{eff}^{-1/2}$ , где эффективная длина  $x_{eff}$  пропорциональна  $r_0$ . Если бы величина  $r_0$  была постоянной при изменении  $k$ , то имели бы  $q_* \sim k^{1/4} R^{-1/2}$ , так что отношение  $q_* / q_0$  не зависело бы от  $k$ . Однако  $r_0 \sim k^{1/2} R$ , поэтому  $q_*$  практически не зависит от  $k$ , так что отношение  $q_* / q_0 \sim k^{-1/4}$  (как на диске) и с уменьшением  $k$  при фиксированном угле атаки может заметно возрастать по сравнению с экспериментальными значениями при  $M_\infty = 6$  (примерно на 40% при  $\theta_0 - \alpha \leq 5$ ).

Автор благодарит В. В. Лунева за обсуждение работы.

Поступило 30 V 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. От космических кораблей — к орбитальным станциям. М., «Машиностроение», 1969.
2. Katzen E. D., Kaattari G. E. Inviscid hypersonic flow around blunt bodies. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 7.
3. Минайлос А. Н. О расчете течения у затупленного тела вращения под углом атаки в сверхзвуковом потоке газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 1.
4. Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета пространственного обтекания тел с отошедшей ударной волной. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 5.
5. Козлова И. Г., Минайлос А. Н. Несимметричное обтекание лобовой части тела вращения сверхзвуковым потоком совершенного или реального газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 3.
6. Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Исследование картины сверхзвукового пространственного обтекания тела сегментальной формы. Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 2.
7. Черный Г. Г. Гиперзвуковое обтекание крыльев при больших углах атаки. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 2.
8. Лунев В. В., Мурзинов И. Н. Влияние излучения на течение в окрестности критической точки тупого тела. ПМТФ, 1961, № 2.
9. Лунев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равновесно диссоциирующим воздухом. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1.
10. Тиняков Г. П. Исследование трехмерного сверхзвукового обтекания эллипсоидов вращения. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6.
11. Ермак Ю. Н., Нейланд В. Я. К теории трехмерного ламинарного пограничного слоя. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 5.