

## О ЛУЧИСТОМ ПЕРЕНОСЕ ВНУТРИ ОПЛАВЛЯЮЩЕГО ТЕЛА

Э. З. АПШТЕЙН, Л. Г. ЕФИМОВА

(Москва)

Рассмотрено стационарное движение жидкой пленки разрушающегося тела с учетом переноса тепла излучением. Делается приближение, которое позволяет отделить уравнение движения от уравнений энергии и переноса излучения и решить его аналитически после того, как решены эти уравнения. С этой целью профили температур, посчитанные численно, аппроксимируются в виде экспоненты от квадратичной функции координаты. Приведены графики, иллюстрирующие влияние на профиль температур коэффициента поглощения, температуры в глубине покрытия, лучистого потока со стороны газа, температуры поверхности и коэффициента отражения. Обнаружены случаи с максимумом профиля температур внутри тела, который не может появиться без излучения. Показано, что пренебрежение лучистым переносом в теле может занижить скорость разрушения в несколько раз. Многие теплозащитные покрытия хорошо пропускают излучение, поэтому при расчете профиля температур нужно учитывать лучистый перенос внутри тела. Оценочные расчеты дают следующие порядки величин для покрытия с теплопроводностью  $\lambda = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$  (как у кварца), температурой поверхности  $2500^\circ$ , толщиной теплового пограничного слоя  $5 \text{ мм}$  и средней длиной свободного пробега излучения  $0.5 \text{ мм}$ : поток тепла за счет теплопроводности  $q_\lambda \sim 25 \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ , собственный радиационный поток  $q_R \sim 25 \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Ясно, что пренебрежение  $q_R$  недопустимо. Отметим здесь же, что недопустимо и пренебрежение радиационным потоком со стороны ударного слоя, который может достигать нескольких сот  $\text{кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  и значительная часть которого проникает через поверхность в тело. Учет излучения особенно важен для стекловидных материалов, разрушающихся с образованием жидкой пленки. Вследствие сильной зависимости вязкости от температуры даже небольшое изменение профиля температур вблизи поверхности может значительно увеличить унос в жидкой фазе. Расчеты, проведенные в приближении лучистой теплопроводности [1] для материала с теплофизическими параметрами, как у кварца (теплопроводность, теплоемкость, вязкость, плотность, теплота испарения) показывают, что при средних свободных пробегах излучения  $l_R = 0.1 \div 1 \text{ мм}$  скорость разрушения увеличивается в  $1.22 \div 2.84$  раза.

Приближенное аналитическое решение задачи о разрушении стекловидного материала без учета лучистого переноса дано в [2]. В работе [3] приводятся некоторые профили температур, иллюстрирующие влияние среднего свободного пробега излучения внутри тела, коэффициента отражения и температуры поверхности. Однако в этой работе не рассматривается уравнение движения жидкой пленки, принимается равным нулю излучение со стороны газового пограничного слоя на тело и температура в глубине покрытия. В работе [1] задача решена приближенно аналитически, но только для случая лучистой теплопроводности. Ниже задача рассмотрена с учетом перечисленных факторов.

1. Теплозащитное покрытие тела, обтекаемого горячими газами, испаряется, плавится и растекается под действием сил давления и трения. Задача о разрушении сводится к совместному решению уравнений многокомпонентного пограничного слоя и уравнений жидкой пленки и склеиванию их на фронте разрушения [4]. Уравнения стационарного пограничного слоя в окрестности критической точки и линии с учетом излучения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{n-1}u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(x^{n-1}v_1) = 0$$

$$\rho_1 \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0, \quad \rho_1 c_1^* \left( u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial N_y}{\partial y} \quad (1.1)$$

Здесь  $n = 1$  относится к плоскому случаю,  $n = 2$  — к осесимметричному, координаты  $x$  и  $y$  связаны с твердой фазой; ось  $x$  направлена вдоль поверхности тела; ось  $y$  — по нормали;  $u_1, v_1$  — компоненты вектора скорости по осям  $x$  и  $y$ ;  $\rho_1 = \text{const}$  — плотность;  $c_1^* = \text{const}$  — теплоемкость;  $\lambda_1 = \text{const}$  — коэффициент теплопроводности;  $\mu_1(T)$  — коэффициент вязкости;  $p_1$  — давление;  $T_1$  — температура;  $H_y$  — поток тепла за счет излучения

$$H_y = 2\pi \int_0^\pi I(y, \psi) \cos \psi \sin \psi d\psi \quad (1.2)$$

Здесь  $I$  — проинтегрированная по частоте интенсивность излучения в направлении, составляющем угол  $\psi$  с осью  $y$ . Для интенсивности  $I$  имеем уравнение переноса излучения [5]

$$\cos \psi \frac{\partial I}{\partial y} = -\rho_1 k_A (I - n_R^2 B) - \rho_1 k_S \left[ I - \frac{1}{2} \int_0^\pi I(y, \psi') \sin \psi' d\psi' \right] \quad (1.3)$$

В этом уравнении  $k_A$  и  $k_S$  — осредненные по частоте коэффициенты поглощения и рассеяния,  $n_R$  — показатель преломления среды,  $B = \sigma_R T^4 / \pi$ ,  $\sigma_R$  — постоянная Стефана — Больцмана. Интегрируя (1.3) по полному телесному углу, получаем

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} = -\rho_1 k_A (c \epsilon_R - 4n_R^2 \sigma_R T^4), \quad \epsilon_R = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi I \sin \psi d\psi \quad (1.4)$$

Здесь  $\epsilon_R$  — плотность радиационной энергии,  $c$  — скорость света. Используя приближение «вперед — назад», т. е. полагая  $I = I^+$  для  $0 < \psi < \pi/2$  и  $I = I^-$  для  $\pi/2 < \psi < \pi$ , можно написать

$$\begin{aligned} c\epsilon_R &= 2\pi(I^+ + I^-), & H_y &= \pi(I^+ - I^-) \\ I^+ &= \frac{c\epsilon_R}{4\pi} + \frac{H_y}{2\pi}, & I^- &= \frac{c\epsilon_R}{4\pi} - \frac{H_y}{2\pi} \\ H^+ &= \pi I^+, & H^- &= \pi I^- \end{aligned} \quad (1.5)$$

Умножим (1.3) на  $\cos \psi$  и проинтегрируем, учитывая (1.5). Имеем

$$c \partial \epsilon_R / \partial y = -3(\rho_1 k_A + \rho_1 k_S) H_y \quad (1.6)$$

Уравнения переноса излучения (1.4) и (1.6), присоединенные к (1.1), составляют замкнутую систему, решение которой должно сопрягаться на фронте разрушения с решением в газовой фазе. Запишем условия сопряжения, считая, что величины без индекса относятся к газовому пограничному слою, а с индексом 1 — к жидкой пленке

$$\begin{aligned} u &= u_1, & T &= T_1, & p &= p_1, & \rho(v - \dot{s}) &= \rho_1(v_1 - \dot{s}) \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} &= \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}, & \rho(v - \dot{s})(h - h_1) - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} - q_D &= -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $h$  — энтальпия газа,  $h_1$  — энтальпия вещества в жидком состоянии,  $q_D$  — поток энергии, связанный с диффузией,  $\dot{s}$  — скорость разрушения. К (1.7) надо добавить условия сохранения химических элементов, условия равновесного (или неравновесного) испарения и условия для про-

текания химических реакций [4]. Направим ось  $y_1$  в глубь тела. Введем коэффициенты отражения  $r$  и  $r_1$  и пропускания  $1-r$  и  $1-r_1$  для потока лучистой энергии, приходящего к поверхности со стороны газа и со стороны тела. Тогда можно написать

$$\begin{aligned} H_1^+ &= H_1^- r_1 + H^+ (1-r) \\ H^- &= H^+ r + H_1^- (1-r_1) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Так как в теле вблизи поверхности

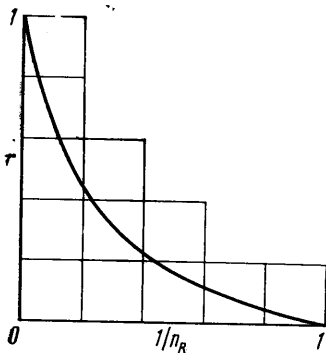
$$c\epsilon_R = 2(H_1^+ + H_1^-)$$

то

$$H_1^- = [c\epsilon_R/2 - H^+(1-r)] / (1+r_1) \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) получаем граничное условие для уравнений (1.4) и (1.6) на поверхности разрушения

$$\begin{aligned} H_{y_1} &= H_1^+ - H_1^- = -\frac{1}{2} \frac{1-r_1}{1+r_1} c\epsilon_R + \\ &+ \frac{1-r_1}{1+r_1} (1-r) H^+ \end{aligned} \quad (1.10)$$



Фиг. 1

Коэффициенты отражения  $r$  и  $r_1$  зависят в общем случае от распределения интенсивности излучения по углу. Однако для равновесного излучения их можно вычислить и применять, если интенсивность излучения близка к изотропной. Опуская выкладки, имеем

$$\begin{aligned} r &= \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\sin^2(\psi - \chi)}{\sin^2(\psi + \chi)} + \frac{\text{tg}^2(\psi - \chi)}{\text{tg}^2(\psi + \chi)} \right] \cos \psi \sin \psi d\psi \\ \frac{1-r_1}{1-r} &= \frac{1}{n_R^2} \quad \left( n_R = \frac{\sin \psi}{\sin \chi} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

График функции  $r(1/n_R)$  показан на фиг. 1.

Зависимость вязкости аморфных тел от температуры дается зависимостью

$$\mu_1 = \mu_1^* \exp(T^*/T_1) \quad (\mu_1^*, T^* = \text{const}) \quad (1.12)$$

Эту зависимость будем считать справедливой при  $T_1 > T^{**}$ , где  $T^{**}$  — некоторая достаточно низкая температура. При  $T_1 \leq T^{**}$  будем полагать  $\mu_1 = \infty$ , как в твердом теле. Такое ограничение связано с тем, что использование (1.12) в стационарных уравнениях при температуре, в глубине покрытия не равной нулю, дает физически неверный результат. Запишем граничные условия для системы (1.1), (1.4), (1.6) в глубине тела в системе координат, связанной с телом

$$u_1 = v_1 = 0, \quad T_1 = T_r, \quad H_y = 0 \quad (1.13)$$

Таким образом, движение жидкой пленки с учетом излучения в окрестности критической точки описывается системой уравнений (1.1), (1.4), (1.6) с граничными условиями (1.7), (1.10), (1.13).

2. Решение этой системы будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\beta_1 x}{\sqrt{\sigma_1 n}} \frac{d\varphi_1}{d\eta}, \quad v_1 = \sqrt{\sigma_1 v_1} \left[ \frac{n\varphi_1 d}{(\sigma_1 n)^{3/4}} + \frac{s}{\sqrt{\beta_1 v_1}} \right] \\ p_1 &= p_s - 1/2 \rho_1 \beta_1^2 x^2, \quad T_1 = T_{0\theta} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\eta = (\sigma_1 n)^{1/4} (\beta_1 / \nu_1)^{1/2} (\delta - y) d, \quad H_y = -h \lambda_1 T_0 (\sigma_1 n)^{1/4} (\beta_1 / \nu_1)^{1/2}$$

$$c_{ER} = j (k / k_A) \lambda_1 T_0 (\sigma_1 n)^{1/4} (\beta_1 / \nu_1)^{1/2}$$

$$(\beta_1 = (r_1^*)^{1/2} \beta, \quad \beta = (du_e / dx)_0, \quad r_1^* = \rho_e / \rho_1, \quad \nu_1 = \mu_1^* / \rho_1)$$

$$\sigma_1 = \mu_1^* c_1^* / \lambda_1, \quad d = -\delta (\sigma_1 n)^{3/4} / n \sqrt{\beta_1 \nu_1}, \quad k = \sqrt{3} k_A (k_A + k_S)$$

Здесь  $\beta$  — градиент скорости вязкого течения в критической точке,  $\rho_e$  — плотность газа на внешней границе газового пограничного слоя,  $p_e$  — давление в набегающем потоке,  $T_0$  — температура на поверхности,  $\varphi_1$  — функция тока для жидкой пленки,  $\theta$  — безразмерная температура,  $\eta$  — безразмерная координата в системе, связанной с фронтом разрушения,  $h$  — безразмерный поток лучистой энергии,  $j$  — безразмерная плотность лучистой энергии.

После подстановки (2.1) в исходную систему получим безразмерные уравнения движения жидкой пленки. Оценки различных членов этих уравнений [4] показывают, что вблизи критической точки можно пренебречь инерциальными членами по сравнению с членами, обусловленными силами вязкости и давления.

Выпишем уравнения в окончательном виде

$$\frac{d^2 \varphi_1}{d\eta^2} = - \left( \frac{\tau_0}{d^3} + \frac{\eta}{d^4} \right) \exp \frac{-T^*}{\theta T_0} \quad \frac{d}{d\eta} \left( \frac{d\theta}{d\eta} - h \right) + \varphi_1 \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{dh}{d\eta} = \kappa (j - 2f^* \theta^4), \quad \frac{dj}{d\eta} = -\kappa h$$

Безразмерные граничные условия будут следующие:

$$\varphi_1(0) = \alpha_1 / d, \quad \theta(0) = 1, \quad \varphi_1(\infty) = 1, \quad \theta(\infty) = \theta_T$$

$$h(0) = h_g - f(0) (1 - R) / (1 + R), \quad h(\infty) = 0 \quad (2.3)$$

$$(\tau_0 = \varphi''(0) r_1^* n_1^{1/2} (\sigma_1 n)^{3/4} l_e^{1/2}, \quad n_1 = \nu_e / \nu_1, \quad \nu_e = \mu_e / \rho_e)$$

$$l_e = \mu_e \rho_e / \mu_w \rho_w, \quad \alpha_1 = -\varphi(0) r_1^* n_1^{1/2} (\sigma_1 n)^{3/4}$$

$$\kappa = \rho_1 k / (\sigma_1 n)^{1/4} (\beta_1 / \nu_1)^{1/2} d, \quad \kappa_A = \rho_1 k_A / (\sigma_1 n)^{1/4} (\beta_1 / \nu_1)^{1/2}$$

$$f^* = {}^2/3 n_R^2 \sigma_R T_0^3 \kappa / \rho_1 (k_A + k_S) d$$

$$(1 - R) / (1 + R) = \kappa (1 - r_1) / 2 \kappa_A (1 + r_1)$$

Здесь  $\tau_0$  — безразмерное трение на поверхности,  $\varphi$  — функция тока в газовом пограничном слое,  $\alpha_1$  — безразмерный унос в газовой фазе,  $h_g$  — безразмерный поток энергии, обусловленный излучением со стороны газового слоя.

Из численных решений уравнений движения жидкой пленки без излучения и с лучистой теплопроводностью [1], а также из рассмотрения структуры уравнений [2] видно, что динамический пограничный слой на порядок меньше теплового. Это значит, что  $\varphi_1$  отлична от 1 только в тонком слое вблизи поверхности, и не будет большой ошибки, если заменить в уравнении энергии  $\varphi_1$  на 1. Тогда можно три последних уравнения системы (2.2) решить отдельно, а затем уже решать уравнение движения с известной температурой. Это уравнение можно решить приближенно [1], если аппроксимировать профиль температуры в виде

$$\theta - \theta_T = (1 - \theta_T) \exp(-q_1 \eta - q_2 \eta^2) \quad (2.4)$$

а вязкость — степенной функцией [2]

$$\exp \frac{-T^*}{\theta T_0} \approx \exp \frac{-T^*}{T_0} \left( \frac{\theta - \theta_T}{1 - \theta_T} \right)^{(1-\theta_T)T^*/T_0} \quad (2.5)$$

Заменяя встречающуюся при интегрировании функцию ошибок первыми членами асимптотического разложения, получаем связь между параметрами задачи

$$d = a_1 + \exp \left( -\frac{T^*}{T_0} \right) \frac{1}{m_1^2} \left[ \tau_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{z^2} \right) + \frac{2}{m_1} \left( 1 - \frac{3}{z^2} \right) \right] \quad (2.6)$$

Здесь

$$z = \frac{m_1}{2\sqrt{m_2}} \quad m_1 = q_1(1 - \theta_T) \frac{T^*}{T_0} d$$

$$m_2 = q_2(1 - \theta_T) \frac{T^*}{T_0} d^2$$

3. Положим в уравнении энергии  $\varphi_1 = 1$ . Проинтегрировав один раз это уравнение, запишем систему, которая решалась численно

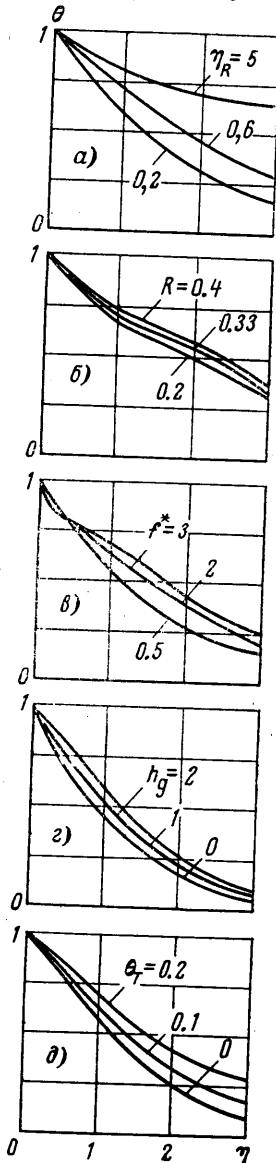
$$\frac{d\theta}{d\eta} = h - (\theta - \theta_T)$$

$$\frac{dh}{d\eta} = -\kappa(j - 2f^*\theta^4), \quad \frac{dj}{d\eta} = -\kappa h \quad (3.1)$$

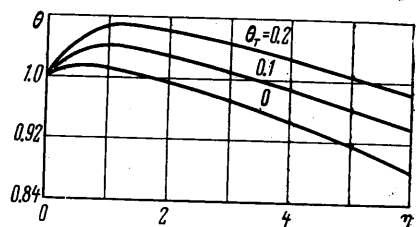
$$\theta(0) = 1, \quad h(0) = h_g - \frac{1-R}{1+R} j(0)$$

$$\theta(\infty) = \theta_T$$

Счет велся от  $\eta = 0$  на асимптотику методом стрельбы. Фиг. 2 иллюстрирует влияние параметров  $\eta_R = 1/\kappa$ ,  $R$ ,  $f^*$ ,  $h_g$ ,  $\theta_T$  на распределение температуры в теле. Значения изменяющихся параметров указаны на графиках.



Фиг. 2



Фиг. 3

Постоянные параметры почти для всех вариантов имели следующие значения:  $\eta_R = 0.2$ ,  $R = 0.33$ ,  $f^* = 1$ ,  $h_g = 1$ ,  $\theta_T = 0.1$ . Исключение составляют случаи

$$\eta_R = 0.6; \quad f^* = 1.67 \text{ (б)} \quad \text{и} \quad R = 0.7 \text{ (д)}$$

Отметим, что при учете излучения внутри тела может наблюдаться максимум температуры, который не появляется в теле без излучения или с лучистой тепло-

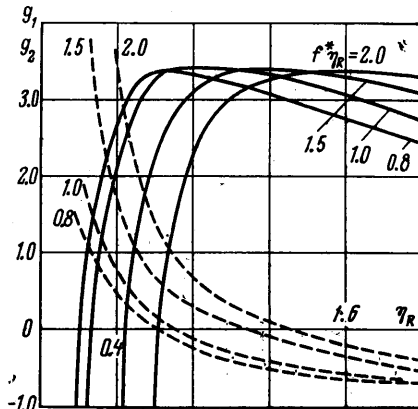
проводностью. Это связано с тем, что поток излучения от ударной волны проникает в глубь тела, где выделяется много тепла, а приповерхностные слои интенсивно охлаждаются за счет испарения. На фиг. 3 приведено несколько случаев с максимумом температуры в жидкой пленке. Они посчитаны при  $\eta_R = 5$ ,  $R = 0.7$ ,  $f^* = 1$ ,  $h_g = 1.5$ .

Полученные профили температуры использовались для определения коэффициентов  $q_1$  и  $q_2$  в аппроксимационной формуле (2.4). Расчет велся по двум значениям  $\theta = 0.95$  и  $\theta = 0.85$ . Таким образом, в зоне течения аппроксимирующий профиль очень близок к действительному. Введем величины  $g_1$  и  $g_2$ , которые определяются соотношениями

$$q_1 = q_1^\circ g_1, \quad q_2 = q_2^\circ g_2$$

$$q_1^\circ = 1 / (1 + 8f^*\eta_R)$$

$$q_2^\circ = q_1^\circ 12(1 - \theta_T) f^* \eta_R$$



Фиг. 4

Здесь коэффициенты в (2.4), полученные в приближении лучистой теплопроводности [3]. Фиг. 4 показывает изменение величин  $g_1$  и  $g_2$  при меняющемся  $\eta_R$  и фиксированных параметрах

$$R = 0.8, \quad h_g = 1.5, \quad \theta_T = 0.1$$

Наличие достаточно частой сетки таких кривых позволяет рассчитать скорость разрушения, пользуясь (2.6) и сопрягая решение с решением в газовой фазе.

НИИ механики МГУ

Поступило 13 II 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Апштейн Э. В. Разрушение стекловидного тела в гиперзвуковом потоке газа с учетом лучистой теплопроводности внутри тела. Инж. физ. ж., 1969, т. 17, № 1.
2. Бете, Адамс. Теория абляции стекловидных материалов. Вопр. ракетн. техн., 1960, № 2 (62).
3. Kadanoﬀ L. Radiative transport within an ablating body. Trans. ASME. Ser. C., J. Heat Transfer, 1961, vol. 83, No. 2.
4. Тирский Г. А. Разрушение передней кромки стекловидного крыла в гиперзвуковом потоке. ПМТФ, 1961, № 6.
5. Бай Ш и-и. Динамика излучающего газа. М., «Мир», 1968.