О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ВОЛЬТЕРРА К РЕШЕНИЮ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. Н. МИХАЙЛОВ, А. И. УТКИН

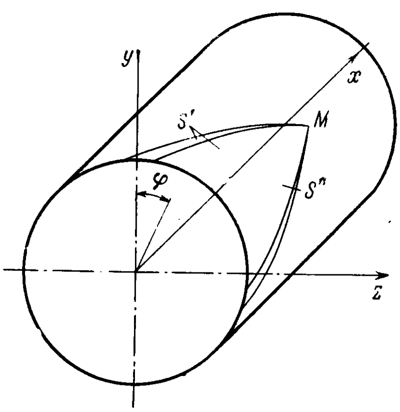
(*Москва*)

Решение задачи Коши для волнового уравнения с тремя независимыми переменными дается формулой Вольтерра [1]. Однако многие задачи аэродинамики (обтекание крыльев, интерференция между крыльями и телами вращения и др.) приводят к смешанной задаче для волнового уравнения, когда граничные условия заданы на характеристической поверхности Σ и на поверхности временного типа S. Формальное применение формулы Вольтерра дает возможность свести трехмерные задачи для волнового уравнения к двумерным интегро-дифференциальным уравнениям на поверхности S. В случае, когда поверхность S имеет излом, например прямую пересечения крыла с телом вращения, формула Вольтерра неверна и должна быть уточнена, что и делается в данной работе. Рассмотрен также вопрос о несовпадении действительной области влияния волнового уравнения и области, используемой в методе Вольтерра.

1. Рассмотрим волновое уравнение

$$L(\Phi)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{1.1}$$

Здесь x, y, z — прямоугольные координаты.



Фиг. 1

Пусть задана цилиндрическая поверхность S с образующей, параллельной оси x, и ограниченная кривой L «сверхзвукового типа» — конуса Маха с вершинами в точках этой кривой лежат по одну сторону от нее. Через эту кривую можно провести характеристическую поверхность Σ.

Часто граничные условия имеют вид

$$\partial\Phi/\partial n=f \quad \text{на } S, \qquad \Phi=0 \quad \text{на } \Sigma$$

Тогда решение в некоторой точке M (x_0, y_0, z_0) на поверхности S можно записать, используя формулу Вольтерра [1], в виде

$$\Phi(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_0}\iint\limits_{S'}\left(\Phi\frac{\partial v}{\partial N}-v\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right)d\sigma \tag{1.2}$$

Здесь S' — часть поверхности S, лежащая внутри конуса Маха с вершиной в точке M.

Так как на поверхности S функция Φ неизвестна, то соотношение (1.2) можно рассматривать как уравнение, и решение этого интегрального уравнения считать решением исходной задачи, что и делается во многих работах [3–5]. Однако такое формальное применение формулы Вольтера приводит к некоторым результатам, которые кажутся парадоксальными и вызывают сомнение в правильности метода. Покажем это на примере.

Рассмотрим обтекание кольцевого крыла (фиг. 1) сверхзвуковым потоком. При выполнении некоторых условий, потенциал Ф скоростей возмущенного течения должен удовлетворять волновому уравнению (1.1). Возьмем точку M на внешней стороне цилиндра. Область S' в формуле (1.2) будет ограничена кривыми

$$\varphi = \varphi_0 \pm 2 \arcsin \frac{x_0 - x}{2r_0} \tag{1.3}$$

Здесь x, r, φ — цилиндрическая система координат, x_0, r_0, φ_0 — координаты точки M в этой системе.

Анализируя формулу (1.2), можно сделать вывод, что все точки, лежащие в области S', оказывают влияние на точку M. В действительности же область, влияющая на точку M, лежит внутри характеристического коноида, построенного из точки M. В рассматриваемом примере коноид находится внутри конуса Маха и пересекается с цилиндром S по кривым

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{x_0 - x}{r} \tag{1.4}$$

которые ограничивают область S'', лежащую внутри области S'. Если изменить граничное условие в области $S' - S''$, то значение потенциала в точке M не должно измениться. Но из уравнения (1.2) можно сделать скорее обратный вывод. Чтобы избежать таких недоразумений, выведем уравнение (1.2) непосредственно для смешанной задачи, используя основные идеи Вольтерра.

2. Вывод формулы Вольтерра основывается, прежде всего, на теореме Грина [1], утверждающей, что для двух непрерывных вместе со своими частными производными до второго порядка решений u и v уравнения (1.1) имеет место равенство:

$$\iiint_D [vL(u) - uL(v)]\, d\tau = \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial v}{\partial N} \right) d\sigma = 0 \tag{2.1}$$

Здесь D — некоторая замкнутая область трехмерного пространства, ограниченная поверхностью S; $d\tau$ — элемент объема; $d\sigma$ — элемент площади; N обозначает направление конормали к поверхности S. Если n_x, n_y, n_z — координаты единичного вектора нормали, то $-n_x$, n_y, n_z — компоненты единичного вектора конормали.

В области задания уравнения (1.1) в каждой точке M (x_0, y_0, z_0) можно построить характеристический конус, уравнение которого будет

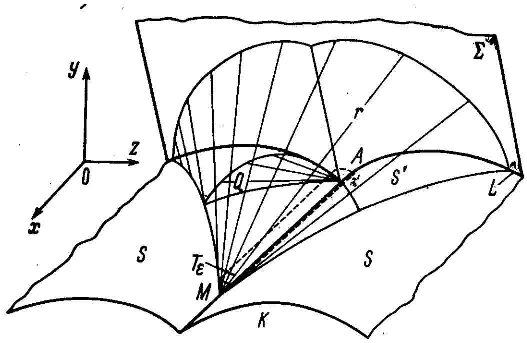
$$(x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2 - (z_0 - z)^2 = 0 \tag{2.2}$$

Рассмотрим в пространстве x, y, z непрерывную кусочно-гладкую кривую L «сверхзвукового типа». Обозначим характеристическую поверхность, проходящую через L в сторону увеличивающихся значений x посредством Σ и цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси x и проходящей также через L, посредством S. Возьмем на поверхности S точку M, причем ради общности будем считать, что в этой точке кривая K пересечения плоскости $x = x_0$ с поверхностью S терпит излом. Характеристический конус с вершиной в точке M, идущий в сторону $x < x_0$, вырежет на поверхностях S и Σ области S' и Σ', которые вместе с боковой поверхностью Γ характеристического конуса образуют замкнутую область D (фиг. 2). Суть метода Вольтерра заключается в том, что в области D применяется формула Грина к искомому решению Ф и фундаментальному решению волнового уравнения $v(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$

$$v = \lg\left[x_0 - x + \sqrt{(x_0 - x)^2 - R^2}\right] - \lg R \qquad R = \sqrt{(y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} \tag{2.3}$$

В области D применить формулу Грина нельзя, так как функция v и ее производная

$$\frac{\partial v}{\partial N} = \frac{\partial v}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial N} = -\frac{x_0 - x}{R\sqrt{(x_0 - x)^2 - R^2}}\frac{\partial R}{\partial N}$$



Фиг. 2

имеют особенность на оси характеристического конуса, $z = z_0$, $y = y_0$ или $R = 0$. Значение производной $\partial v / \partial N$ становится бесконечным также на поверхности S при $R = x_0 - x$. Выделим особые точки при $R = 0$ круговым цилиндром T_ε радиуса ε, а при $R = x_0 - x$ — конической поверхностью Γ_δ

$$(x_0 - x - \delta)^2 - (y_0 - y)^2 - (z_0 - z)^2 = 0 \tag{2.4}$$

Обозначим части областей Σ' и S', лежащие вне цилиндра T_ε и внутри конуса Γ_δ, через $\Sigma_{\varepsilon\delta}'$ и $S_{\varepsilon\delta}'$. Внутри области $D_{\varepsilon\delta}$, ограниченной поверхностями $\Sigma_{\varepsilon\delta}'$, $S_{\varepsilon\delta}'$, Γ_δ и T_ε, функции v и $\partial\Phi / \partial N$ удовлетворяют условиям теоремы Грина. Потенциал Φ является непрерывной функцией, но его производные могут быть разрывными функциями. Как известно [2], решения гиперболических уравнений могут иметь слабые разрывы только на характеристических поверхностях. В рассматриваемом случае разрывы производных могут быть на характеристическом коноиде Q с вершиной в точке A, в которой прямая $z = z_0$, $y = y_0$ пересекается с кривой L. Разрыв производных на этой поверхности обусловлен изломом цилиндрической поверхности S. Ради общности предположим также, что разрыв производных имеется на некоторой произвольной характеристической поверхности G_1. Таких поверхностей может быть конечное число (доказательство от этого не изменится). Разделим область $D_{\varepsilon\delta}$ на три части: область $D_{\varepsilon\delta}'$, ограниченную поверхностями $S_{\varepsilon\delta}'$, Γ_δ, Q, T_ε; $D_{\varepsilon\delta}^2$, ограниченную поверхностями $S_{\varepsilon\delta}$, Γ_δ, $\Sigma_{\varepsilon\delta}$, G_1, и $D_{\varepsilon\delta}^3$, ограниченную поверхностями $S_{\varepsilon\delta}$, G_1, Γ_δ. Внутри каждой из этих областей к функциям Φ и v можно применить формулу Грина (1.2), в результате получим

$$\iint\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial N} - \Phi\frac{\partial v}{\partial N}\right)d\sigma = 0 \qquad (S_{\varepsilon\delta}' + \Gamma_\delta' + Q + T_\varepsilon) \tag{2.5}$$

$$\iint\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial N} - \Phi\frac{\partial v}{\partial N}\right)d\sigma = 0 \qquad (S_{\varepsilon\delta}^2 + \Gamma_\delta^2 + \Sigma_{\varepsilon\delta} + G_1 + Q) \tag{2.6}$$

$$\iint\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial N} - \Phi\frac{\partial v}{\partial N}\right)d\sigma = 0 \qquad (S_{\varepsilon\delta}^3 + \Gamma_\delta^3 + G_1) \tag{2.7}$$

Здесь в скобках указаны области интегрирования. В равенства (2.6) и (2.7) входят интегралы по одной и той же поверхности G_1. На этой поверхности потенциал Φ не терпит разрыва. Исследуем поведение производной $\partial\Phi / \partial N$ при переходе с одной стороны этой поверхности на другую. Если $x = x(y, z)$ — уравнение характеристической поверхности, то оно должно удовлетворять уравнению [1]

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 - 1 = 0$$

Вектор нормали к поверхности $x = x(y, z)$ имеет координаты

$$n_x = \frac{1}{m}, \quad n_y = \frac{1}{m}\frac{\partial x}{\partial y}, \quad n_z = \frac{1}{m}\frac{\partial x}{\partial z}, \quad m = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}$$

Координаты вектора конормали тогда будут

$$N_x = -\frac{1}{m}, \qquad N_y = \frac{1}{m}\frac{\partial x}{\partial y}, \qquad N_z = \frac{1}{m}\frac{\partial x}{\partial z}$$

Поэтому

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{N} = -\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = 0$$

Следовательно, конормаль лежит в плоскости, касательной к характеристической поверхности. Отсюда следует, что производная $\partial\Phi / \partial N$ не терпит разрыва на характеристической поверхности, в том числе и на G_1. В уравнениях (2.6) и (2.7) направления конормалей противоположно, поэтому, сложив (2.6) и (2.7), получим

$$\iint\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial N} - \Phi\frac{\partial v}{dN}\right)d\sigma = 0, \qquad e = S_{\varepsilon\delta}^2 + S_{\varepsilon\delta}^3 + \Gamma_\delta^2 + \Gamma_\delta^3 + Q \quad (2.8)$$

В уравнениях (2.5) и (2.8) также имеются интегралы по одной и той же характеристической поверхности Q, от которых можно избавиться, сложив соотношения (2.5) и (2.8)

$$\iint\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial N} - \Phi\frac{\partial v}{\partial N}\right)d\sigma = 0 \qquad (S_{\varepsilon\delta}' + \Gamma_\delta + \Sigma_{\varepsilon\delta}' + T_\varepsilon) \qquad (2.9)$$

Таким образом, доказано, что теорему Грина можно применять в областях, внутри которых решение волнового уравнения имеет слабые разрывы вдоль характеристических поверхностей.

Совершим теперь в (2.9) предельные переходы $\delta \to 0$ и $\varepsilon \to 0$. На боковой поверхности характеристического конуса Γ имеем $v = 0$, $\partial v / \partial N = 0$, поэтому интеграл по поверхности Γ_δ при $\delta \to 0$ исчезает. Нетрудно показать, что интегралы по поверхностям $S_{\varepsilon\delta}'$ и $\Sigma_{\varepsilon\delta}'$ сходятся при $\delta \to 0$ и $\varepsilon \to 0$. Найдем предел интеграла по поверхности T_ε при $\varepsilon \to 0$. Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат

$$z - z_0 = R\cos\theta, \qquad y - y_0 = R\sin\theta$$

На поверхности T_ε направление N совпадает с направлением внешней нормали, т. е. противоположно направлению R. При $R = \varepsilon$ имеем

$$v = \lg\left[\sqrt{(x_0 - x)^2 - \varepsilon^2} + x_0 - x\right] - \lg\varepsilon$$

и так как $\varepsilon \lg \varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$\iint_T v\frac{\partial\Phi}{\partial N}\varepsilon\, d\theta\, dx \to 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

На поверхности T_ε

$$\frac{\partial v}{\partial N} = -\frac{\partial v}{\partial R} = \frac{x_0 - x}{\varepsilon\sqrt{(x_0-x)^2-\varepsilon^2}}$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{T_\varepsilon} \Phi\frac{\partial v}{\partial N}\varepsilon\, d\theta\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_A}^{x_0-\varepsilon}\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{(x_0-x)\Phi}{\sqrt{(x_0-x)^2-\varepsilon^2}}d\theta\right]dx =$$

$$= (\theta_2-\theta_1)\int_{x_A}^{x_0}\Phi(x, y_0, z_0)\,dx$$

Здесь θ_2 и θ_1 — углы, при которых пересекается поверхность T_ε с поверхностью S. В пределе разность $(\theta_2 - \theta_1)$ дает абсолютное значение угла между левосторонней и правосторонней производными к кривой K в точке M. Если поверхность гладкая, то $\theta_2 - \theta_1 = \pi$. Теперь уравнение (2.9) можно записать в виде

$$-(\theta_2-\theta_1)\int_{x_A}^{x_0}\Phi(x, y_0, z_0)\,dx + \iint_{\Sigma'+S'}\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial N} - \Phi\frac{\partial v}{\partial N}\right)d\sigma = 0 \quad (2.10)$$

Дифференцируя (2.10) по x_0, получаем

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\frac{\partial}{\partial x_0}\iint_{\Sigma'+S'}\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial N} - \Phi\frac{\partial v}{\partial N}\right)d\sigma \quad (2.11)$$

Следовательно, если потенциал Φ является решением смешанной задачи для волнового уравнения и имеет слабые разрывы только на конечном числе характеристических поверхностей, то он удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению **(2.11)**.

Становится ясным и парадокс в рассмотренной задаче об обтекании цилиндрического крыла. Если в области $S'' - S'$ изменяется граничное условие $\partial\Phi / \partial n$, то потенциал Φ изменяется в этой области таким образом, что выполняется условие

$$\iint_{S'-S''}\left(\Phi_1\frac{\partial v}{\partial N} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial N}v\right)d\sigma = \iint_{S'-S''}\left(\Phi_2\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}v\right)d\sigma$$

для двух значений производной $\partial\Phi / \partial n$. Поэтому значение потенциала в точке (x_0, y_0, z_0) не изменится.

Авторы выражают благодарность В. М. Шурыгину за полезное обсуждение результатов.

Поступило 24 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 3. М., Гостехиздат, 1933.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными, ч. 2. М., «Мир», 1964.
3. Уткин А. И. Применение интеграла Вольтерра к задаче обтекания цилиндрической поверхности со сверхзвуковыми кромками. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 5.
4. Уткин А. И. Исследование сверхзвуковых течений. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 3.
5. Михайлов В. Н. Применение метода Вольтерра к расчету интерференции между телами вращения и крыльями в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.