

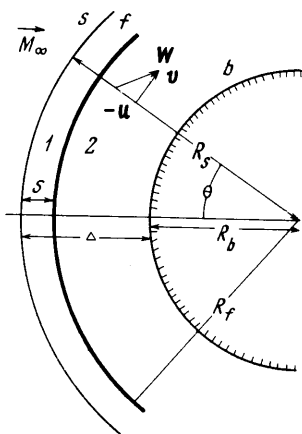
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СФЕРЫ В ГОРЮЧЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ

С. М. ГИЛИНСКИЙ

(Москва)

В работе [1] получено численное решение задачи о движении сферы в горючих смесях газов и исследовано влияние основных газодинамических и кинетических параметров на геометрическую картину течения и распределение функций за детонационной волной. В данной работе для двухфронтной модели детонационной волны получено приближенное решение с постоянной плотностью, аналогичное решению Лайтхилла [2] для обычного адиабатического течения.

Рассматривается движение сферы с большой сверхзвуковой скоростью в горючей смеси газов с давлением p_∞ и температурой T_∞ . В обращенном движении смесь обтекает сферу со скоростью V_∞ . Полагаем, что за отошедшей ударной волной создаются условия, благоприятные для воспламенения и сгорания смеси. Будем рассматривать зону горения, состоящую из области индукции 1, где происходит адиабатическое движение газа, и области течения продуктов сгорания 2, разделенных фронтом горения, на котором происходит мгновенное сгорание с выделением заданного количества тепла Q (фиг. 1).



Фиг. 1

Численные расчеты, выполненные в работе [1], показывают, что в диапазоне чисел M_∞ набегающего потока при $M_\infty \geq 4$ плотность в каждой из областей в окрестности линии торможения меняется незначительно.

Предположим, что плотности в зоне индукции и зоне течения продуктов сгорания постоянны и равны соответственно ρ_1 и ρ_2 , и пусть в меридиональной плоскости ударная волна и фронт горения имеют форму концентрических окружностей радиусов R_s и R_f . Ширина зоны индукции $s = S/R_s$ в этом случае может быть определена как функция параметров течения лишь на линии торможения.

Воспользуемся сферическими координатами R, θ ; полярный угол θ будем отсчитывать от оси, направленной вверх по потоку (фиг. 1). Составляющие вектора скорости на радиальное и тангенциальное направления, отнесенные к V_∞ , обозначим u, v , давление, отнесенное к $\rho_\infty V_\infty^2 = p$.

Уравнения неразрывности и количества движения в этих переменных в осесимметричном случае имеют вид

$$\frac{\partial(\rho u R^2 \sin \theta)}{\partial R} + \frac{\partial(\rho v R \sin \theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R}, \quad u \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{R} = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (1)$$

Введем функцию тока ψ соотношением

$$\rho V_{\infty} u = -(R^2 \sin \theta)^{-1} \psi_{\theta}, \quad \rho V_{\infty} v = (R \sin \theta)^{-1} \psi_R \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что для течения с постоянной плотностью функция тока ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi_{RR} + \frac{\sin \theta}{R^2} \left(\frac{\psi_{\theta}}{\sin \theta} \right)_{\theta} = -\rho R \sin \theta \Omega \quad (3)$$

где Ω — величина вихря, которая для осесимметричного течения с постоянной плотностью пропорциональна $R \sin \theta$ (см. [3])

$$\Omega = -\frac{1}{R} \left[\frac{\partial(Rv)}{\partial R} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] = \varphi(\psi) R \sin \theta \quad (4)$$

$\varphi(\psi)$ — произвольная функция.

Решение для зоны индукции 1 известно

$$\psi_1 = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty} R_s^2 \sin^2 \theta}{30 \varepsilon_1^2} F_1(\varepsilon_1, R), \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho_{\infty}}{\rho_1} \quad (5)$$

$$F_1(\varepsilon_1, R) = C_1 \left(\frac{R}{R_s} \right)^4 + A_1 \left(\frac{R}{R_s} \right)^2 + B_1 \left(\frac{R_s}{R} \right) \quad (6)$$

$$C_1 = 3(1 - \varepsilon_1)^2, \quad A_1 = -5(1 - 4\varepsilon_1), \quad B_1 = 2(1 - \varepsilon_1)(1 - 6\varepsilon_1)$$

Чтобы найти решение в зоне 2, нужно выразить величину вихря за фронтом горения, т. е. функцию $\varphi(\psi)$, через параметры перед фронтом. Используя уравнения неразрывности на фронте горения

$$\varepsilon_2 u_1 = \varepsilon_1 u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho_{\infty}}{\rho_2} \quad (7)$$

и очевидные соотношения

$$\varepsilon_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} = \varepsilon_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \quad (8)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \theta} + 2\rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} = \frac{\partial p_2}{\partial \theta} + 2\rho_2 u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \theta}$$

из последнего уравнения (1), записанного для областей 1 и 2, получаем связь между величиной вихря до и после фронта горения

$$\Omega_{2f} = \Omega_{1f} + \frac{(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2)}{R_f u_1} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \quad (9)$$

Подставляя выражение для вихря в зоне 1

$$\Omega_{1f} = -\frac{V_{\infty}(1 - \varepsilon_1)^2}{R_s^2 \varepsilon_1} R_f \sin \theta \quad (10)$$

и компонент скорости и производных по θ из (2), (5), (6), будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega_{2f} = & \frac{V_{\infty} R_f \sin \theta}{R_s^2 \varepsilon_1} \left\{ -(1 - \varepsilon_1)^2 + \frac{(1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1)}{15} \left(\frac{R_s}{R_f} \right)^4 \times \right. \\ & \left. \times \left[F_1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{R_f^2 F_1'}{4F_1} \right]^2 \right\} = \frac{V_{\infty} R_f \sin \theta}{R_s^2 \varepsilon_1} \Phi_2 \end{aligned} \quad (11)$$

В зоне 2 функция тока ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi_{RR} + \frac{\sin \theta}{R^2} \left(\frac{\psi_\theta}{\sin \theta} \right)_\theta = - \frac{\rho_\infty V_\infty R^2 \sin \theta}{R_s^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \Phi_2 \quad (12)$$

Решение уравнения (12) получается разделением переменных и имеет вид, аналогичный (5)

$$\psi_2 = \frac{\rho_\infty V_\infty R_s^2 \sin^2 \theta}{30 \varepsilon_1^2} \left[C_2 \left(\frac{R}{R_s} \right)^4 + A_2 \left(\frac{R}{R_s} \right)^2 + B_2 \left(\frac{R_s}{R} \right) \right] \quad (13)$$

Коэффициент C_2 определяется из решения (12), A_2 и B_2 — из граничных условий на фронте горения

$$\psi_2 = \psi_1, \quad \varepsilon_2 \psi_{2R}' = \varepsilon_1 \psi_{1R}' \quad \text{при } R = R_f \quad (14)$$

Выражения для коэффициентов следующие:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left\{ 3(1 - \varepsilon_1)^2 - \frac{1}{5} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \left[\frac{F_1}{(1-s)^4} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{R_s^2 F_1'^2}{4(1-s)^2 F_1} \right] \right\} \quad (15)$$

$$A_2 = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{(1-s)^2} \left[F_1 + (1-s) R_s F_1' \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right] - 5(1-s)^2 C_2 \right\}$$

$$B_2 = F_1(1-s) - \frac{1}{3}(1-s) \left[F_1 + (1-s) R_s F_1' \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right] + \frac{2}{3}(1-s)^5 C_2$$

где

$$F_1(\varepsilon_1, s) = C_1(1-s)^4 + A_1(1-s)^2 + B_1(1-s)^{-1}$$

$$R_s F_1'(\varepsilon_1, s) = 4C_1(1-s)^3 + 2A_1(1-s) - B_1(1-s)^{-2}$$

Положение тела определяется граничным условием $\psi = 0$. Это условие дает сферическое тело радиуса R_b , причем R_b находится из уравнения

$$C_2 \left(\frac{R_b}{R_s} \right)^4 + A_2 \left(\frac{R_b}{R_s} \right)^2 + B_2 \left(\frac{R_s}{R_b} \right) = 0 \quad (16)$$

Уравнение (16) пятой степени относительно R_b / R_s . Коэффициенты этого уравнения являются алгебраическими функциями от трех безразмерных параметров ε_1 , ε_2 , s .

Отсюда, в частности, следует закон подобия, который приближенно выполняется в окрестности линии торможения, а именно при сверхзвуковом движении тела в горючей смеси газов, когда сгорание происходит мгновенно во фронте, величина отхода ударной волны от тела вдоль линии торможения и распределение газодинамических функций в этой области зависят лишь от трех безразмерных параметров — отношения плотностей в прямом адиабатическом скачке, отношения плотностей на фронте горения и безразмерного параметра s , характеризующего относительную ширину зоны индукции.

Легко видеть, что при $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, уравнение (16) переходит в известное уравнение, полученное Лайтхиллом для адиабатического течения

$$3(1 - \varepsilon_1)^2 \left(\frac{R_b}{R_s} \right)^4 - 5(1 - 4\varepsilon_1) \left(\frac{R_b}{R_s} \right)^2 + 2(1 - \varepsilon_1)(1 - 6\varepsilon_1) \frac{R_s}{R_b} = 0 \quad (17)$$

а при $s=0$ — в уравнение, которое получается из (17) заменой индекса 1 у ε на 2, т. е. решение Лайтхилла справедливо для бесконечно тонкой детонационной волны.

Точное решение уравнения (16) так же, как и (17), в общем случае может быть получено лишь численно. Приближенное решение уравнения (17) при малом ε известно [4]

$$\Delta_1 = \frac{R_s - R_b}{R_s} = \varepsilon \left[1 - \sqrt{\frac{8\varepsilon}{3}} + 3\varepsilon + o(\varepsilon^{3/2}) \right] \quad (18)$$

Введем для удобства безразмерный параметр k соотношением

$$k = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

и представим коэффициенты уравнения (16) в виде ряда по малому параметру s

$$\begin{aligned} C_2 &= C_2^0 + C_2^1 s + o(s^2) = \\ &= C_1 - 3k(2 - k - 2\varepsilon_1) - 6k(3 - 3k - \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 k - 2\varepsilon_1^2) s \\ A_2 &= A_2^0 + A_2^1 s + o(s^2) = \\ &= A_1 + 5k(2 - k - 4\varepsilon_1) + 20k(1 - k - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 k) s \\ B_2 &= B_2^0 + B_2^1 s + o(s^2) = \\ &= B_1 - 2k(2 - k - 7\varepsilon_1) + 2k(1 - k + 8\varepsilon_1 + 4\varepsilon_1 k + 6\varepsilon_1^2) s \end{aligned} \quad (19)$$

Используя (18), (19), можно выписать решение уравнения (16) в виде ряда для двух случаев: течение близко к детонационному — параметр s мал, и течение близко к адиабатическому — параметр k мал. В обоих случаях порядок малости ε_1 ниже s .

Полученные таким образом приближенные аналитические решения ввиду медленной сходимости ряда (18) мало пригодны для данного анализа и лишь показывают асимптотическое поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Практический интерес при решении задач с горением представляет случай, когда величина отношения плотностей на адиабатическом скачке ε_1 , а тем более величина ε_2 , не является малой и имеет порядок 0.1–0.3. Для таких значений ε использование небольшого числа членов ряда (18) дает большую погрешность приближенного решения по сравнению с точным.

Уравнение (17) имеет точное решение при трех значениях $\varepsilon = 1, 1/4, 1/6$, при которых один из коэффициентов уравнения обращается в нуль. Будем искать решение уравнения (17) при произвольных ε в интересующем нас диапазоне в виде ряда в окрестности точек $\varepsilon_0 = 1/4$ и $\varepsilon_0 = 1/6$, причем в случае бесконечно тонкой детонационной волны предпочтительнее разложение в окрестности точки $\varepsilon_0 = 1/4$, а для адиабатической ударной волны $\varepsilon_0 = 1/6$. Производя необходимые выкладки, будем иметь для отхода адиабатической ударной волны от сферы Δ_1 и детонационной волны Δ_2 следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 - \frac{R_b}{R_{sa}} = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2^6 - \sqrt{5}^5}{40\sqrt{5}} \right) + \frac{3(2^6 - \sqrt{5}^5)}{20\sqrt{5}} \varepsilon_1 + \\ &+ o(\delta_1^2) \approx 0.0177 + 0.536\varepsilon_1 + o(\delta_1^2) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta_2 = 1 - \frac{R_b}{R_{s0}} = \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{2/5} + \frac{4 - 20(2/3)^{6/5}}{135(2/3)^{3/5}} \right] - \frac{16 - 90(2/3)^{6/5}}{135(2/3)^{3/5}} \frac{\varepsilon_1}{1 - k} + o(\delta_2^2) \approx 0.0275 + \frac{0.49\varepsilon_1}{1 - k} \quad (21)$$

$$\delta_1 = \varepsilon_1 - \frac{1}{6}, \quad \delta_2 = \frac{\varepsilon_1}{1 - k} - \frac{1}{4}$$

На фиг. 2 приведены кривые отхода ударной волны от сферы, отнесенного к радиусу ударной волны R_s , в зависимости от трех параметров — ε_1 , s и k , полученные путем численного решения уравнения (16) (сплошные линии). Прямые $\Delta = s$ ограничивают области определения функции $\Delta(s)$. Как следует из сравнения точного и приближенного решений, в двух предельных случаях погрешность формул (20) и (21) в интервале $0.1 < \varepsilon_1 < 0.3$, $0.15 < \varepsilon_2 < 0.5$ не превышает порядка $\sim 3\%$.

Из анализа результатов расчета обтекания сферы водородо-воздушной и водородо-кислородной смесью, учитывающего сложную кинетику химических реакций, следует, что рассмотренный диапазон изменения параметра k ($0 \leq k \leq 1/2$) будет с практической точки зрения наиболее интересным.

Из фиг. 2 видно, что зависимость отхода ударной волны от параметра s можно с удовлетворительной точностью аппроксимировать прямой или параболой.

Самую простую аппроксимацию с помощью прямой, проходящей через две крайние точки с ординатами Δ_2 и Δ_1 , можно записать в виде

$$\Delta = \Delta_2 - (\Delta_2 - \Delta_1) \left[\frac{s}{\Delta_1} + E \left(1 - \frac{s}{\Delta_1} \right) \right] \quad (22)$$

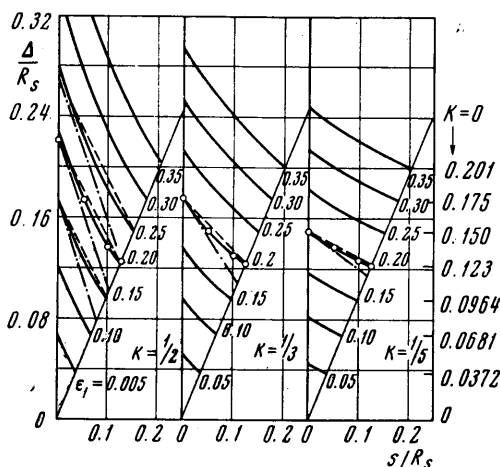
$$E(x) = 0 \quad \text{при } x \geq 0, \quad E(x) = x \quad \text{при } x < 0$$

Погрешность формулы (22) возрастает с ростом ε_1 , и k в рассмотренном случае при $0.35 > \varepsilon_1 > 0.1$ не превышает 7%.

Для течений, близких к детонационным, можно использовать более точную аппроксимацию с помощью прямой, касательной к кривой точного решения, в точке $(\Delta_2, 0)$. Аналитическое выражение такой аппроксимации следующее:

$$\Delta = \Delta_2 + x_1 s + o(s^2) = \Delta_2 - \frac{C_2^1(1 - \Delta_2)^5 + A_2^1(1 - \Delta_2)^3 + B_2^1}{5C_2^0(1 - \Delta_2)^4 + 3A_2^0(1 - \Delta_2)^2} + o(s^2) \quad (23)$$

где коэффициенты $C_2^0, C_2^1, \dots$ определены в (19). Подставляя (21) в (23), получаем явную зависимость от трех параметров, которая приближенно



Фиг. 2

дается формулой

$$\Delta = 0.0275 + \frac{0.49\epsilon_1}{1-k} - \frac{ks}{(1-k)^2} \times \\ \times \frac{(0.219 - 0.468k + 0.288k^2 - 0.04k^3) - (3.3 - 3.5k + 0.24k^2)\epsilon_1}{0.215 - 0.215k - 2.86\epsilon_1} \quad (24)$$

И наконец, аппроксимация параболой, которая проходит через крайние точки с ординатами Δ_2 и Δ_1 , имеющей в точке $(\Delta_2, 0)$ наклон, одинаковый с наклоном кривой точного решения, дается формулой

$$\Delta = \Delta_2 + \Delta_1 x_1 \left[\frac{s}{\Delta_1} + E \left(1 - \frac{s}{\Delta_1} \right) \right] + \\ + (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_1 x) \left[\frac{s^2}{\Delta_1^2} + E \left(1 - \frac{s^2}{\Delta_1^2} \right) \right] \quad (25)$$

где $E(x)$ определено в (22), а x — в (23).

На графике фиг. 2 пунктиром проведены прямые, построенные с помощью формулы (22), штрих-пунктиром — (23); точки параболы (25) обозначены черными кружочками. Наилучшее приближение к точному решению дают параболы (25), однако и более простой формулой (22) можно с успехом пользоваться при качественном, а также количественном анализе.

Представляет интерес получение кривых отходов ударной волны от сферы в функции параметров набегающего потока M_∞ , p_∞ , T_∞ и размера сферы R_b . Для этого необходимо конкретизировать вид зависимости длительности периода индукции от термодинамических условий и выразить отношение плотностей на фронте горения через величину выделенного при сгорании тепла Q .

Ширину зоны индукции можно определить, как и в работе [1], введя в функцию Φ соотношением

$$\frac{d\Phi}{dt} = f(p, T) \quad (26)$$

так что $\Phi = 0$ соответствует началу периода индукции, т. е. точке за адиабатической ударной волной, а $\Phi = 1$ — его окончанию непосредственно перед фронтом горения.

Применительно к водородо-воздушным смесям вид функции правой части (26) может быть заимствован из работы [5]

$$f(p, T) = \frac{p}{A \exp(B/T)} \quad (27)$$

где при измерении давления в *атм*, температуры в $^{\circ}\text{K}$, продолжительности периода индукции в *сек* значения констант равны $A = 45 \cdot 10^{-10}$, $B = 10^4$.

Величина безразмерного параметра s определяется из уравнения

$$- \frac{1}{A} \int_0^s \frac{p_1(\xi) d\xi}{u_1(\xi) \exp[B/T_1(\xi)]} = \int_0^1 d\Phi = 1 \quad (28)$$

В предположении постоянства плотности в зоне индукции давление и температура будут маломеняющимися функциями от ξ , и для упрощения интегрирования положим, что в подынтегральной функции $p_1(\xi)$ и $T_1(\xi)$ постоянны и равны их значениям за прямой ударной волной p_s и T_s .

Учитывая соотношения на скачке, уравнение (28) перепишем в виде

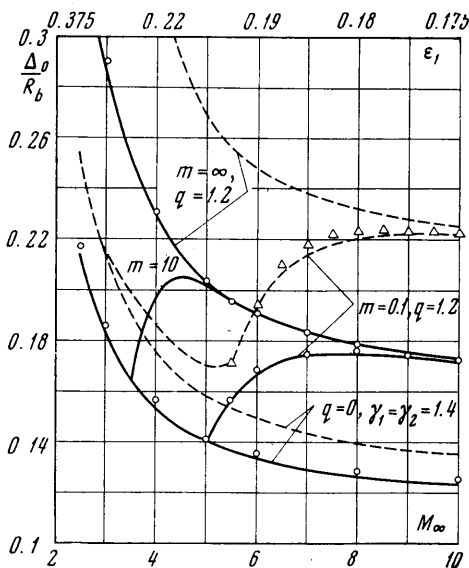
$$15\varepsilon_1 \int_0^s \frac{(1-\zeta)^2 d\zeta}{F_1(\varepsilon_1, \zeta)} = K_s \quad (29)$$

$$K_s = \frac{V_\infty}{p_\infty R_s} \frac{A}{L_\infty} \exp \frac{B}{T_\infty L_\infty \varepsilon_1}, \quad L_\infty = \frac{2\gamma_\infty}{\gamma_\infty + 1} M_\infty^2 - \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty + 1}$$

При $s \rightarrow \Delta_1$ ($F_1 \rightarrow 0$), т. е. когда течение стремится к адиабатическому, интеграл (28) становится расходящимся. Полагая $s < \Delta_1$, проинтегрируем приближенно (28), разлагая подынтегральную функцию в ряд по ζ . Ограничиваясь двумя первыми членами ряда, получаем для определения s квадратное уравнение, решая которое будем иметь

$$s = \frac{\gamma_1 + 4(1 - \varepsilon_1)K_s - 1}{2(1 - \varepsilon_1)} \varepsilon_1 \quad (30)$$

Если считать исходную смесь и продукты сгорания совершенным газом с различными показателями адиабаты $\gamma_1 = \gamma_\infty$ и γ_2 , то согласно [1] отношение плотностей на линии торможения перед и за фронтом горения выражается следующим образом:



Фиг. 3

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} + \frac{1}{\gamma_2 + 1} \times \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1 M_1^2} - \left\{ \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1 M_1^2} - 1 \right)^2 - B \right\}^{1/2} \right] B = (\gamma_2^2 - 1) \left[\frac{q\varepsilon_1(\gamma_1 + 1)}{(\gamma_1 - 1)u_1^2} - \left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 - 1} - \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \right) \frac{1}{\gamma_1 M_1^2} \right] \quad (31)$$

Здесь введен безразмерный параметр q , равный отношению подведенного к единице массы газа тепла к полному теплосодержанию того же количества несгоревшей смеси

$$q = \frac{2Q}{V_{\max}^2}$$

Скорость u_1 и число M_∞ вычисляются с помощью (2) и интеграла Бернулли

$$u_1 = - \frac{1}{15\varepsilon_1} \frac{F_1(\varepsilon_1, s)}{(1-s)^2} \quad (32)$$

$$M_1^{-2} = \frac{\gamma_1 + 1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1}{u_1^2} - \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \right)$$

Для сильно пересжатых волн формулу (31) можно упростить, разложив радикал в степенной ряд и ограничиваясь первыми двумя членами

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1 + \frac{B}{2(\gamma_2 + 1)} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1 M_1^2} - 1 \right)^{-1} \quad (33)$$

Если к тому же предположить, что $\gamma_1 = \gamma_2$, получим особенно простую связь параметра тепловыделения q с тремя основными параметрами ϵ_1 , k и s

$$k = 1 - \left(1 + \frac{q\epsilon_1}{\epsilon_1 - u_1^2} \right)^{-1} \quad (34)$$

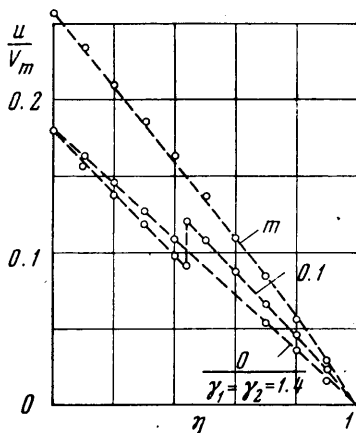
Отсюда следует слабая зависимость k от s при фиксированных q и ϵ_1 . Так, при увеличении s от 0 до Δ_1 u_1 уменьшается от ϵ_1 до 0, и, например, при $q = 1.2$, $\epsilon_1 = 0.2$ k уменьшается от 0.6 до 0.545.

На фиг. 3 построены кривые отхода ударной волны от сферы, отнесенного к радиусу сферы R_b в зависимости от числа M_∞ набегающего потока при фиксированной температуре $T_\infty = 300^\circ \text{K}$, показателях адиабаты $\gamma_1 = 1.4$ и $\gamma_2 = 1.2$. В используемой простейшей модели химической кинетики произведение $m = p_\infty R_s$ будет параметром подобия. Кривые построены для двух значений параметра $q = 1.2$ и 0 и различных значений m . Сплошные кривые соответствуют решению с постоянной плотностью, а пунктирные — точному численному решению, полученному в работе [1]. Решение с постоянной плотностью построено по результатам численного решения уравнения (16) с использованием соотношений (29) — (32). Черными кружочками отмечены точки, рассчитанные с помощью аналитических формул (20) — (22). Погрешность аналитической аппроксимации в данном примере, оказывается, не превышает 3% вплоть до $M_\infty \sim 3$.

Из сравнения приближенного и точного решения следует, что решение с постоянной плотностью дает заниженные результаты по отходу ударной волны, причем с увеличением толщины ударного слоя погрешность растет. Это связано с предположением о постоянстве плотности и концентрации ударной волны и фронта горения, которое для относительного толстого ударного слоя становится слишком сильным. Когда ширина зоны индукции составляет больше половины толщины ударного слоя, то точность приближенного решения того же порядка, что и для адиабатического течения.

Можно заметить, что решение с постоянной плотностью достаточно хорошо воспроизводит качественный характер зависимости величины отхода от числа M_∞ , в частности немонотонность этой зависимости. С уменьшением числа M_∞ при достаточно большом значении m вследствие пренебрежимой малости параметра s отход ударной волны увеличивается так же, как и в случае бесконечно тонкой детонационной волны. Затем из-за резкой экспоненциальной зависимости параметра s от числа M_∞ на узком отрезке изменения M_∞ происходит резкое уменьшение отхода до значения, соответствующего адиабатическому обтеканию, после чего снова с уменьшением числа M_∞ отход ударной волны увеличивается.

С помощью введения некоторого эффективного значения параметра тепловыделения $q = q_*$, которое компенсировало бы изменение плотности в ударном слое, можно значительно уменьшить погрешность приближенного решения. Практически это достигается следующим образом. Из численного решения, полученного для фиксированных значений $M_\infty = \infty$ и $m = \infty$, берется величина отхода детонационной волны Δ_2^∞ , и для этого



Фиг. 4

значения вычисляется с помощью (21) величина k_* , а затем из (31) или (34) — q_* . В рассмотренном примере $q_* = 1.6$, и решение с постоянной плотностью для этого q обозначено черными треугольничками.

На фиг. 4 для тех же условий, что и на фиг. 3, построено распределение скорости вдоль линии торможения по переменной η , определяемой соотношением

$$\eta = \frac{R_s - R}{R_s - R_b} \quad (35)$$

Пунктирные линии построены по результатам численного расчета в работе [1], черными кружочками обозначены точки, рассчитанные в приближении постоянной плотности с помощью формулы

$$u = -\frac{1}{15\varepsilon_1}[C_1(1 - \Delta\eta)^2 + A_1 + B_1(1 - \Delta\eta)^{-3}] \quad \text{при } \eta \leq \frac{s}{\Delta} \quad (36)$$

$$u = -\frac{\varepsilon_2}{15\varepsilon_1^2}[C_2(1 - \Delta\eta)^2 + A_2 + B_2(1 - \Delta\eta)^{-3}] \quad \text{при } \eta > \frac{s}{\Delta}$$

где Δ определялась из (22). Величина скорости на фронте горения имеет разрыв. Отличие точного численного решения от приближенного оказывается малым.

На фиг. 5 построена зависимость отхода ударной волны от сферы, отнесенного к радиусу сферы, от числа M_∞ , m и q при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.4$. Здесь использована для величины параметра k формула (34). Решение получено численно.

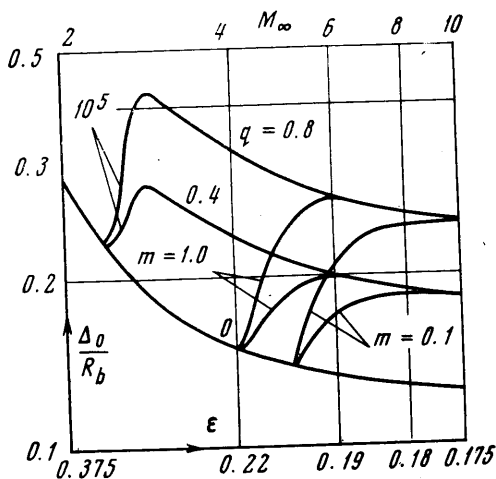
Заметим, что предложенное решение задачи обтекания сферы может быть так же, как и в случае адиабатического течения, обобщено на случай обтекания осесимметрических тел, имеющих в меридиональной плоскости вид конического сечения (эллипс, гипербола, парабола). Полученное аналитическое решение

стационарной задачи может быть в дальнейшем использовано при анализе нестационарных колебаний, возникающих при движении тел в горючих смесях газов.

Поступило 30 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилинский С. М., Черный Г. Г. Сверхзвуковое обтекание сферы горючей смесью газов с учетом времени задержки воспламенения. Изв. АН СССР, МЖТ, 1968, № 1.
2. Lighthill M. I. Dynamics of a dissociating gas, pt. 1. Equilibrium flow. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2.
3. Милн-Томсон. Теоретическая гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Хейз У. Д., Пробстиян Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Ferri A., Libby P. A., Zakkay V. Theoretical and experimental investigation of supersonic combustion. ICAS congress, Stockholm, Sweden, 1962.



Фиг. 5