

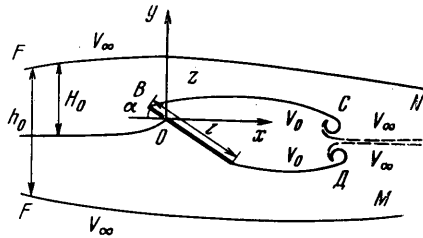
КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ СТРУЕЙ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

В. А. ЛАЗАРЕВ

(Казань)

Задача обтекания суперкавитирующей пластинки безграничным потоком довольно подробно изучена при помощи классических кавитационных схем [1-2]. Если же набегающий поток имеет свободную поверхность, то решение значительно усложняется. В известных работах [3] эта задача исследована в основном в линейной постановке. Схема двойных спиральных вихрей [3] дает возможность получить одинаковые граничные условия для функции $\chi'(u)$ на свободной поверхности жидкости, границах каверны и в следе за каверной. Это позволяет решить задачу о суперкавитирующей пластинке в струе и сравнить результаты с ранее известными [4] для безграничного потока.

1. Рассмотрим нелинейную задачу обтекания суперкавитирующей пластинки струей идеальной невесомой жидкости конечной ширины (фиг. 1). Угол атаки α , длину пластинки l , ширину струи вверх по потоку $h = h_0/l$, глубину погружения пластинки $H = H_0/l$, а также число кавитаций $\sigma = V_0^2/V_\infty^2 - 1$ считаем известными. Здесь H_0 — расстояние между свободной поверхностью FN и линией тока, проходящей через критическую точку O .



Фиг. 1

В качестве расчетной примем схему двойных спиральных вихрей [3], согласно которой за пластинкой образуется каверна, заканчивающаяся двойными спиральными вихрями в точках C и D . При переходе через эти точки модуль скорости изменяется скачком от V_0 (скорости на границах каверны) до V_∞ (скорости на границах следа CN и DM). На свободных границах FN и FM величина скорости предполагается постоянной и равной V_∞ .

Заметим, что двойной спиральный вихрь представляет собой единственную математическую возможность соединения в одной точке двух свободных линий тока с различными скоростями [2].

Введем в рассмотрение производную комплексного потенциала dW/du и безразмерную комплексную скорость $V_0^{-1}dW/dz$.

2. Области течения в плоскости $z = x + iy$ ставится в соответствие полубесконечная полоса $0 \leq \xi \leq \pi$, $0 \leq \eta < \infty$ параметрической плоскости $U = \xi + i\eta$ таким образом, что пластинке AB соответствует отрезок действительной оси $0 \leq \xi \leq \pi$, а свободным границам — вертикальные прямые $\xi = 0$ и $\xi = \pi$ (фиг. 2). Соответственные точки в плоскостях z и U обозначены одинаковыми буквами.

Определим функцию dW/du . Внутри полосы $FABF$ и на ее границах функция dW/du аналитична за исключением точек $M(u = im)$ и $N(u = \pi + in)$, где она имеет полюсы первого порядка. В критической точке $O(u = a)$ и угловых точках полуполосы $A(u = 0)$, $B(u = \pi)$ функция dW/du обращается в нуль первого порядка. Кроме того, dW/du

принимает чисто мнимые значения на вертикальных сторонах FA и FB и вещественные значения на отрезке AB . Продолжив dW/du по принципу симметрии на всю параметрическую плоскость, можно убедиться, что функция dW/du будет периодической в плоскости U с периодом 2π и может быть построена по нулям и полюсам внутри полосы периодов. В результате получим

$$\frac{dW}{du} = \frac{K \sin u \sin^{1/2}(u-a) \sin^{1/2}(u+a)}{\sin^{1/2}(u-im) \sin^{1/2}(u+im)} \times \frac{1}{\times \cos^{1/2}(u-in) \cos^{1/2}(u+in)} \quad (2.1)$$

где K — некоторая вещественная постоянная.

Определим безразмерную комплексную скорость $V_0^{-1}dW/dz$ — функцию, аналитическую внутри полосы и имеющую на ее границах, в точках соответствующих двойным спиральным вихрям, особенности вида

$$(u-id)^{-ik}, \quad (u-\pi-ic)^{ik} \quad (k = \frac{1}{\pi} \ln \frac{V_0}{V_\infty}) \quad (2.2)$$

В точке $O(u=a)$ комплексная скорость обращается в нуль первого порядка.

Рассмотрим логарифмическую производную безразмерной комплексной скорости — функцию

$$\chi'(u) = \frac{d}{du} \left[\ln \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} \right]$$

аналитическую внутри полуполосы и на границах за исключением точек $D(u=id)$, $O(u=a)$ и $C(u=\pi+ic)$.

Так как функция $\chi'(u)$ принимает вещественные значения на границах полуполосы $FABF$, то, продолжив ее по принципу симметрии, методом особых точек построим

периодическую функцию в плоскости U с периодом 2π . В полосе периодов, в точках

$$O(u=a), \quad O'(u=-a), \quad D(u=id), \quad D'(u=-id), \\ C(u=\pi+ic), \quad C'(u=\pi-ic)$$

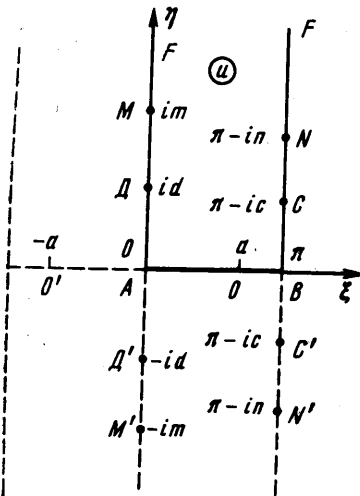
Функция $\chi'(u)$ имеет полюсы первого порядка с вычетами $1, -1, ik, -ik, -ik, ik$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция $\chi'(u)$ будет иметь вид

$$\chi'(u) = A_1 + \frac{1}{2} [\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(u-a) - \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(u+a)] + \frac{1}{2} ik [\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(u-id) - \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(u+id) + \operatorname{tg} \frac{1}{2}(u-ic) - \operatorname{tg} \frac{1}{2}(u+ic)] \quad (2.3)$$

Отсюда

$$\chi(u) = A_1 u + A_2 + \ln \frac{\sin^{1/2}(u-a)}{\sin^{1/2}(u+a)} + ik \ln \frac{\sin^{1/2}(u-id) \cos^{1/2}(u+ic)}{\sin^{1/2}(u+id) \cos^{1/2}(u-ic)} \quad (2.4)$$



Фиг. 2

Из условий $\chi(0) = ia$, $\chi(\pi) = -i(\pi - a)$ определяются постоянные

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \ln \frac{V_\infty}{V_0} + i(\pi + a)$$

Подставляя A_1 и A_2 в (2.4) и потенцируя, получаем формулу для комплексной безразмерной скорости

$$\frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} = -e^{ia} \frac{V_\infty}{V_0} \frac{\sin^{1/2}(u-a)}{\sin^{1/2}(u+a)} \left[\frac{\sin^{1/2}(u+id) \cos^{1/2}(u-ic)}{\sin^{1/2}(u-id) \cos^{1/2}(u+ic)} \right]^{-ik} \quad (2.5)$$

Здесь k — определяется согласно (2.2). Выпишем выражение для $z(u)$. Предварительно из (2.1) и (2.5) находим dz/du и, учитывая, что $z=0$ при $u=a$, будем иметь

$$z(u) = \frac{-Ke^{-ia}}{V_\infty} \int_a^u \frac{4 \sin u \sin^{2 \cdot 1/2}(u+a)}{(\operatorname{ch} m - \cos u)(\operatorname{ch} n + \cos u)} \times \left[\frac{\sin^{1/2}(u-id) \cos^{1/2}(u+ic)}{\sin^{1/2}(u+id) \cos^{1/2}(u-ic)} \right]^{-ik} du \quad (2.6)$$

3. Общее решение задачи (2.1), (2.5) содержит шесть неизвестных параметров K , a , d , c , n , m . Для их определения используем известные геометрические параметры. Угол атаки

$$\alpha = \pi - a + k \ln s/r \quad \left(\arg \left[\frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz}(F) \right] = 0 \right) \quad (3.1)$$

определяется из условия, приведенного в скобках.

Длина пластинки

$$l = \int_0^\pi \frac{dz}{du} du = \frac{KL^+}{V_\infty} \quad (3.2)$$

Относительное погружение пластинки

$$H = \frac{i}{2V_\infty l} \oint_N \frac{dW}{du} du = \frac{\pi}{L^+} \frac{2p(1+t^2+2t \cos a)}{(1+tp)(t+p)} \quad (3.3)$$

Относительная ширина струи вверх по потоку

$$h = \frac{i}{2V_\infty l} \oint_M \frac{dW}{du} du + H = \frac{2\pi}{L^+} \quad (3.4)$$

Здесь и в дальнейшем $s = e^{-c}$, $r = e^{-d}$, $t = e^{-n}$, $p = e^{-m}$

$$L^\pm = \int_0^\pi \frac{4 \sin \xi \sin^{2 \cdot 1/2}(\xi \pm a)}{(\operatorname{ch} m - \cos \xi)(\operatorname{ch} n + \cos \xi)} \times \exp \left[\pm 2k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(r-s) \cos \xi + rs - 1}{(r+s) \sin \xi} \right] d\xi \quad (3.5)$$

Для однозначности общего решения (2.1), (2.5) необходимы еще два условия. Одно из них получается из предположения, что углы наклона вектора скорости в бесконечно удаленных точках N и M равны, т. е. $\theta_N = \theta_M$.

Это условие преобразуется к виду

$$\frac{(p+t)\sin a}{1-tp+(t-p)\cos a} + \operatorname{tg} \left[\frac{k}{2} \ln \frac{(1+tr)(s-t)(1+ps)(r-p)}{(1-ts)(r+t)(1-pr)(s+p)} \right] = 0 \quad (3.6)$$

Второе условие получится, если предположить, что циркуляция скорости по контуру S , ограничивающему каверну, считается заданной. Для определенности положим

$$\Gamma = \frac{1}{lV_\infty} \int_S \frac{dW}{du} du = 0$$

или

$$\frac{1}{L^+} \left[\frac{t(2p \cos a - 1 - p^2)}{(t+p)(1+tp)} \ln \frac{(s-t)(1-ts)(r-p)(1-pr)}{(s+p)(1+ps)(r+t)(1+tr)} + \right. \\ \left. + \ln \frac{r(s-t)(1-ts)}{s(t+r)(1+tr)} \right] = 0 \quad (3.7)$$

Таким образом, получена полная система уравнений (3.1)–(3.4), (3.6), (3.7) для определения шести неизвестных параметров K , a , s , r , t , p . Однако можно рассматривать систему пяти уравнений (3.1), (3.3), (3.4), (3.6) и (3.7), так как параметр K исключается после деления на l . При числовых расчетах целесообразно задавать два параметра, например s и p , а из уравнений (3.1), (3.6), (3.7) находить неизвестные a , r , t и по формулам (3.3), (3.4) определить относительное погружение H и относительную ширину струи h .

4. Главный вектор сил давлений, действующих на пластинку, равен

$$R = -i \int_A^B (P - P_0) dz. \quad (4.1)$$

Подставим в (4.1) вместо $(P - P_0)$ выражение $1/2 \rho (V_0^2 - V^2)$ из уравнения Бернулли, и, используя формулы (2.1), (2.5), коэффициент нормального давления пластинки $C_n = 2|R| / \rho V_\infty^2 l$ приведем к виду

$$C_n = 1 + \sigma - L^+ / L^- \quad (4.2)$$

Здесь L^\pm определяются согласно (3.5).

Координаты точек нижней и верхней границ каверны находим из выражения (2.6) для $z(u)$ соответственно при $u = i\eta$ ($0 \leq \eta < d$), $u = \pi + i\eta$ ($0 \leq \eta < C$).

Анализируя при этом (2.6), можно показать, что при $\eta = d$ и $\eta = c$ существует особенность и линии тока сворачиваются в спираль бесконечно малого радиуса. Это явление указывает на некоторую искусственность замены действительной каверны схемой с двойными спиральными вихрями. При числовых расчетах необходимо учитывать это обстоятельство и ограничивать расчетные значения η величинами, близкими к d и c , но не равными им.

5. Получим решение задачи о симметричном обтекании пластинки струей невесомой жидкости. Ранее подобная задача была рассмотрена в работах [5] по схеме с зеркалом и [6] по схеме с возвратной струйкой, однако полученные в них формулы достаточно сложны как для аналитического исследования, так и для числовых расчетов.

Положим $n = m$, $c = d$, $\alpha = 1/2\pi$, тогда из (2.1) и (2.5) следует:

$$\frac{dW}{du} = K_1 \frac{\sin u \cos u}{\sin(u - im) \sin(u + im)} \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} = e^{i\alpha} \frac{V_\infty}{V_0} \frac{\cos u}{1 + \sin u} \left[\operatorname{tg} \frac{u + id}{2} \operatorname{ctg} \frac{u - id}{2} \right]^{-ih} \quad (5.2)$$

Неизвестные параметры K_1 , $r = e^{-d}$, $p = e^{-m}$ определяются из системы уравнений (3.1)–(3.4), (3.6), (3.7), которая существенно упрощается. Действительно, из (3.1)–(3.4), (3.7) следует, что $a = 1/2\pi$, $l = K_1 L_1^+ / V_\infty$, $H = h/2 = \pi / L_1^+$, $\Gamma \equiv 0$, где

$$L_1^\pm = 2 \int_0^\pi \frac{\sin \xi (1 \pm \sin \xi)}{\operatorname{ch}^2 m - \cos^2 \xi} \exp \left[\pm 2k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r^2 - 1}{2r \sin \xi} \right] d\xi \quad (5.3)$$

Уравнение (3.6) также принимает более простой вид

$$\frac{2p}{1 - p^2} + \operatorname{tg} \left[k \ln \frac{(1 + rp)(r - p)}{(1 - pr)(r + p)} \right] = 0 \quad (5.4)$$

Масштабный коэффициент K_1 после деления на l сокращается, поэтому для определения r и p нужно использовать выражение для H и уравнение (5.4). Причем для числовых расчетов (5.4) удобно преобразовать к виду (6.1).

Выпишем формулу для коэффициента сопротивления пластинки в случае симметрии, которая с учетом (5.3) преобразуется к виду

$$C_x = 1 + \sigma - L_1^+ / L_1^- \quad (5.5)$$

Форма каверны за пластинкой, симметрично расположенной в струе, находится интегрированием dz/du по одной из прямых $u = i\eta$ или $u = \pi + i\eta$ ($0 \leq \eta < d$).

Заметим, что из общего решения (2.1), (2.4) и уравнений (3.1)–(3.7) можно получить решение задачи об обтекании пластинки струей жидкости по схеме Кирхгофа ($\sigma = 0$). Другой частный случай получается при $p \rightarrow 0$, тогда приходим к задаче обтекания суперкавитирующей пластинки под свободной поверхностью [7, 8].

Кроме того, при $p \rightarrow 0$ и $t \rightarrow 0$ задача сводится к исследованию обтекания пластинки в безграничном потоке [7].

6. Приведем вывод асимптотической формулы для коэффициента сопротивления суперкавитирующей пластинки, перпендикулярной к направлению невозмущенной скорости при малых числах кавитации, в безграничном потоке. Решая уравнение (5.4) относительно r , находим

$$r = 1/2 p^{-1} (1 + e^{-\gamma})^{-1} \left[\sqrt{(1 - p^2)^2 (1 - e^{-\gamma})^2 + 4p^2 (1 + e^{-\gamma})^2} - (1 - p^2)(1 - e^{-\gamma}) \right] \quad (6.1)$$

$$\gamma = \frac{2\pi}{\ln(1 + \sigma)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2p}{1 - p^2}$$

При $p \rightarrow 0$

$$e^{-\gamma} \approx 1 - \frac{4p\pi}{\ln(1 + \sigma)} + \frac{1}{2} \left(\frac{4p\pi}{\ln(1 + \sigma)} \right)^2 + O(p^3) \quad (6.2)$$

Подставляя это выражение в (6.1) и устремляя p к нулю, получаем

$$r \approx 0.25 \left\{ \left[16 + \left(\frac{4\pi}{\ln(1 + \sigma)} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{4\pi}{\ln(1 + \sigma)} \right\} \quad (6.3)$$

Подставляя в (6.3) разложение $\ln(1 + \sigma)$, при $\sigma \rightarrow 0$ будем иметь

$$r \approx \frac{\sigma}{2\pi} - \frac{\sigma^2}{4\pi} + O(\sigma^3) \quad (6.4)$$

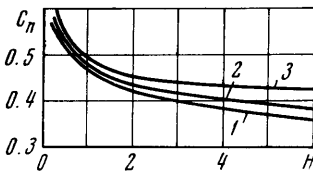
Если выражение (6.4) для r подставить в (5.3) и (5.5), то после преобразований можно получить асимптотическую формулу для C_x

$$C_x \approx \frac{2\pi}{4 + \pi} (1 + \sigma) \left(1 + \frac{4}{3\pi^2} \frac{\sigma^2}{4 + \pi} + \dots \right) \quad (6.5)$$

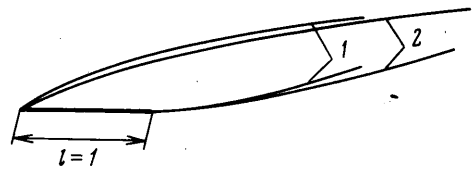
Приведем ряд значений C_x , вычисленных по формуле (6.5) и по формулам для других схем кавитационного обтекания [4].

σ	0.2	0.3	0.4	0.5	
C_x	1.0564	1.1454	1.2351	1.3255	(схема Рябушинского)
C_x	1.0564	1.1456	1.2353	1.3258	(схема спиральных вихрей)
C_x	1.0566	1.1461	1.2362	1.3273	(схема Жуковского)

Таким образом, эти расчеты подтверждают в известной мере гипотезу о несущественности влияния течения в конце каверны на течение вблизи обтекаемого тела.

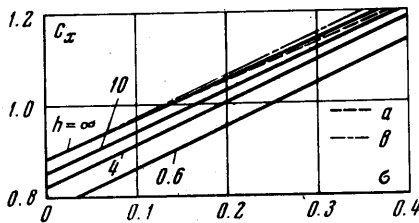


Фиг. 3



Фиг. 4

7. Числовые расчеты приведены на фиг. 3—6. Кривые зависимости коэффициента нормального давления пластинки C_n от относительной глубины погружения H и относительной ширины струи h даны на фиг. 3 при $\sigma = 0.3$, $\alpha = 10^\circ$. Для кривых 1 и 2 ширина струи h имеет соответственно значения $h = 7$, $h = 15$, 3 — соответствует



Фиг. 5

случаю бесконечно глубокой жидкости. Нетрудно заключить, что с приближением ведущей кромки пластинки к свободной поверхности C_n возрастает; при одинаковых погружениях пластинки большее C_n соответствует большей ширине струи. Эти выводы согласуются с экспериментальными результатами Е. Зильбермана [9]. На фиг. 4 дана форма каверны 1 за пластинкой в струе при $\sigma = 0.3$, $\alpha = 10^\circ$, $h = 7$, $H = 1.5$. Каверна 2 соответствует случаю безграничной жидкости при тех же значениях σ и α .

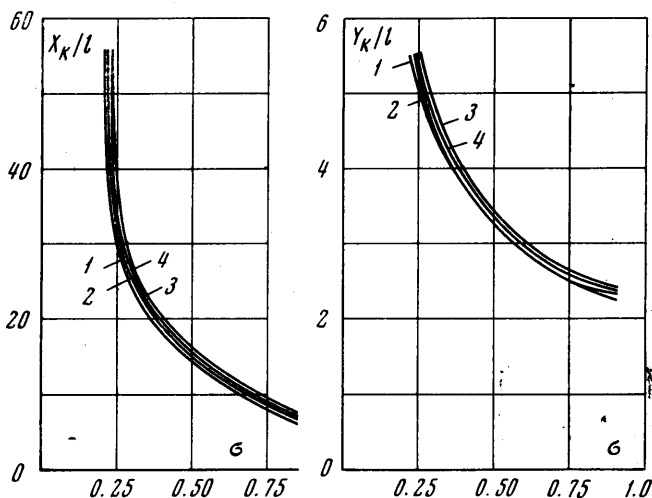
Таким образом, ширина каверны в струе увеличивается по сравнению с безграничным потоком, а длина ее уменьшается. Этот факт также согласуется с экспериментальными данными работы [9]. Зависимость C_x от σ для случая симметричного обтекания пластинки при разных значениях ширины струи представлена на фиг. 5, которая сравнивается с результатами расчета по другим схемам для безграничного потока [4] (a — схема Бетца, b — схема Рябушинского).

На фиг. 6 дается сравнение размеров каверны за пластинкой в струе шириной $h = 5$ (кривые 3) и в безграничном потоке (кривые 4), рассчитанных по схеме двойных спиральных вихрей при симметричном обтекании с размерами каверны для схем с зеркалом (кривые 1) и с возвратной струей (кривые 2), позаимствованными из монографии М. И. Гуревича [4].

Приведем для ряда значений σ соответствующие значения размеров каверны x_k/l и y_k/l , вычисленные по схеме двойных спиральных вихрей

σ	0.3	0.4	0.6	0.7
x_k/l	26.661	20.340	13.321	10.592
	26.094	19.742	12.594	10.026
y_k/l	4.8591	3.8701	3.0925	2.7831
	4.9326	3.9652	3.0197	2.7293

Размеры каверны в схеме спиральных вихрей определяются следующим образом: длина (сплошные линии) x_k/l — расстояние от пластинки до точки, соответствующей спиральному вихрю, ширина (пунктирные линии) y_k/l — расстояние между



Фиг. 6

горизонтальными касательными. При расчете кривых 3 и 4 была допущена погрешность $\delta = 0.001$, соответствующая разности между точным значением параметра d и \bar{d} расчетным, так как координаты точек, в которых расположены центры спиральных вихрей, не определены (см. п. 4).

Поступило 30 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
3. Tulin M. P. Supercavitating flows — small perturbation theory. В кн.: «Приложение теории функций в механике сплошной среды», М., «Наука», 1965, т. 2.
4. Кузнецов А. В. Струйные и кавитационные течения жидкости. Тр. семинара по крайевым задачам, Казань, 1966, вып. 3.
5. Birkhoff G., Plesset M., Simons N. Wall effect in cavity flow. *Quart. Appl. Math.*, 1950, pt. 1, vol. 8, No. 2, 1952, pt. 2, vol. 9, No. 4. (Рус. перев.: В сб.: «Механика», 1951, № 1, 1953, № 2).
6. Кузнецов А. В. Обтекание с кавитацией пластинки струей конечной ширины. *Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение*, 1962, № 1.
7. Терентьев А. Г., Лазарев В. А. Кавитационное обтекание пластинки под свободной поверхностью. *Л., НТО судпром-ти* 1968, вып. 106.
8. Lagock B., Street R. A non-linear solution for a fully cavitating hydrofoil beneath a free surface. *J. Ship Res.*, 1967, vol. 11, No. 2.
9. Silberman E. Experimental studies of supercavitating flow about simple two-dimensional bodies in a jet. *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 5, p. 3.