ИЗЛУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРА, ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Л. П. БЛИНОВА, В. Н. КОЖИН

(*Ленинград*)

Выведены выражения для скалярного и векторного потенциалов цилиндра, осциллирующего в вязкой среде. Показано, что звуковое поле цилиндра уже на расстояниях, равных сравнительно небольшому кратному толщины вязкого пограничного слоя, потенциально. Подробно рассмотрено влияние вязкости на сопротивление излучения цилиндра в случае длинных и коротких волн.

Пусть колеблющийся цилиндр бесконечной длины радиуса a является источником звуковых волн в безграничной однородной вязкой среде с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν. Зафиксируем положение цилиндра в цилидрической системе координат r, θ, z; для этого ось z совместим с осью цилиндра.

Предположим, что цилиндр совершает малые осциллирующие колебания вдоль направления оси r (при $\theta = 0$) со скоростью $\mathbf{V} = V_0 \exp(i\omega t)$, где V_0 — постоянная величина.

Звуковое поле, создаваемое колеблющимся цилиндром, описывается волновыми уравнениями скалярного потенциала скоростей φ и векторного потенциала вихрей $\mathbf{\Phi}$

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0, \qquad (\Delta + h^2)\mathbf{\Phi} = 0 \tag{1}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2[1 + {}^4/_3(i\omega\nu/c^2)]}, \qquad h^2 = -\frac{i\omega}{\nu}$$

$$h = (1-i)\beta, \qquad \beta = (\omega / 2\nu)^{1/2} \tag{2}$$

Здесь $k = \omega / c$ — волное число продольных волн, ω — круговая частота, c — скорость звука в отсутствии вязкости, h — волновое число поперечных (вязких) волн, β^{-1} — толщина вязкого пограничного слоя.

Гидродинамические элементы — колебательная скорость и давление — соответственно равны

$$\mathbf{V} = -\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{\Phi}, \qquad p = p_0 + i\rho\omega\varphi - {}^4/_3\nu\rho\Delta\varphi \tag{3}$$

причем p_0 есть давление в невозмущенном состоянии.

В силу симметрии функции φ и $\mathbf{\Phi} \equiv \Phi_z = \Phi$ не будут зависеть от z и z — составляющая колебательной скорости — всюду будет равна нулю.

Согласно гипотезе прилипания частиц вязкой среды к поверхности колеблющегося цилиндра граничные условия примут вид (здесь и далее временной множитель подразумевается)

$$v_r(a) = V_0 \cos\theta, \qquad v_\theta(a) = -V_0 \sin\theta$$

где v_r и v_θ — соответственно радиальная и тангенциальная компоненты колебательной скорости, которые согласно (3) известным образом выражаются через скалярный и векторный потенциалы

$$v_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \qquad v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

Решая уравнения (1) и преобразуя найденные из граничных условий значения постоянных интегрирования с помощью рекуррентных соотношений, известных в теории бесселевых функций, для скалярного и векторного потенциалов цилиндра, осциллирующего в вязкой среде, получаем

$$\varphi = -\frac{2k^{-1}V_0H_2(ha)H_1(kr)\cos\theta}{H_0(ha)H_2(ka)+H_0(ka)H_2(ha)}$$

$$\Phi = \frac{2h^{-1}V_0H_2(ka)H_1(hr)\sin\theta}{H_0(ha)H_2(ka)+H_0(ka)H_2(ha)}$$

Здесь $H_n(u)$ — функция Ханкеля второго рода порядка n. Далее, для давления и скорости имеем из (3)

$$p = p_0 - \frac{2k^{-1}V_0\cos\theta[i\rho\omega + {}^4/_3(\nu\rho k^2)]H_2(ha)H_1(kr)}{H_0(ha)H_2(ka)+H_0(ka)H_2(ha)}$$

$$v_r = \frac{2V_0\cos\theta}{H_0(ha)H_2(ka)+H_0(ka)H_2(ha)}\times$$
$$\times\left\{H_2(ha)\left(\frac{H_1(kr)}{kr} - H_2(kr)\right) + H_2(ka)\frac{H_1(hr)}{hr}\right\}$$
$$v_\theta = -\frac{2V_0\sin\theta}{H_0(ha)H_2(ka)+H_0(ka)H_2(ha)}\times \tag{4}$$
$$\times\left\{H_2(ka)\left(\frac{H_1(hr)}{hr} - H_2(hr)\right) + H_2(ha)\frac{H_1(kr)}{kr}\right\}$$

Во всех приведенных выше формулах встречаются функции Ханкеля не выше второго порядка. Для удобства ниже приведены их асимптотические представления [1].

При $|u| \gg 1$ и $-2\pi < \arg u < \pi$

$$H_0(u) = \left(\frac{2}{\pi u}\right)^{1/2} e^{-i(u-{}^1/_4\pi)}\left(1+\frac{i}{8u}\right), \quad H_1(u) = i\left(\frac{2}{\pi u}\right)^{1/2} e^{-i(u-{}^1/_4\pi)}\left(1-\frac{3i}{8u}\right)$$
$$H_2(u) = -\left(\frac{2}{\pi u}\right)^{1/2} e^{-i(u-{}^1/_4\pi)}\left(1-\frac{15i}{8u}\right) \tag{5}$$

При $|u| \ll 1$ и $-2\pi < \arg u < \pi$

$$H_0(u) = -\frac{2i}{\pi}(\ln {}^1/_2u + \gamma + {}^1/_2 i\pi), \quad H_n(u) = i\frac{2^n(n-1)!}{\pi u^n} \quad \text{при } n > 0 \tag{6}$$

где $\gamma = 0.577$ (постоянная Эйлера).

На расстояниях r, больших по сравнению с линейной величиной β^{-1}, члены в выражениях (4), содержащие $H_n(hr)$, будут заключать в себе множитель $\exp(-\beta r)$ и, следовательно, будут очень малы. Это значит, что уже на расстояниях, равных сравнительно небольшому кратному толщины вязкого пограничного слоя, движение вязкой среды практически свободно от вихрей, т. е. потенциально.

Учитывая сказанное выше, для давления и скорости на больших расстояниях от цилиндра, т. е. при $|kr| \gg 1$, получим из (4)

$$p = p_0 + \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \frac{2k^{-1}V_0 \cos\theta H_2(ha)}{H_0(ha)H_2(ka) + H_0(ka)H_2(ha)} (l\rho\omega + {}^4/_3\, \nu\rho k^2)\, e^{-i(kr + {}^1/_4\pi)}$$

$$v_r = \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \frac{2V_0 \cos\theta H_2(ha)}{H_0(ha)H_2(ka) + H_0(ka)H_2(ha)}\, e^{-i(kr - {}^1/_4\pi)} \qquad (7)$$

$$v_\theta = \left(\frac{2}{\pi kr^3}\right)^{1/2} \frac{2V_0 \sin\theta H_2(ha)}{H_0(ha)H_2(ka) + H_0(ka)H_2(ha)}\, e^{-i(kr + {}^1/_4\pi)}$$

Отсюда видно, что тангенциальная компонента колебательной скорости уменьшается с расстоянием, как $r^{-3/2}$, и на больших расстояниях становится весьма малой по сравнению с радиальной компонентой скорости.

Дальнейший расчет звукового поля, т. е. отделение действительных частей в выражениях (7), не представляет особого интереса и в случае необходимости выполняется без затруднений.

Обратимся поэтому к определению обеих составляющих полного сопротивления излучения.

По определению, сопротивление излучения z_R есть отношение полной реакции звукового поля $\mathbf{X}$, взятой с обратным знаком, к скорости движения цилиндра $\mathbf{V}$, т. е.

$$z_R = -\mathbf{X} / \mathbf{V} \qquad (8)$$

Полная реакция звукового поля, которая равна силе, действующей на единицу длины цилиндра со стороны упругой среды в направлении оси x (ось x совпадает с осью r при $\theta = 0$), найдется суммированием составляющих напряжений на поверхности цилиндра, параллельных оси x, т. е. выразится интегралом

$$\mathbf{X} = a \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \cos\theta - \sigma_{r\theta} \sin\theta)_{r=a}\, d\theta \qquad (9)$$

где компоненты напряжений σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$ даются формулами [2]

$$\sigma_{rr} = -p + \frac{4}{3}\nu\rho \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\nu\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\sigma_{r\theta} = \nu\rho \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

Выполнив интегрирование (9), получим

$$\mathbf{X} = 2\pi a^2 \rho i\omega V_0 \frac{(ka)^{-1} H_2(ha) H_1(ka) + (ha)^{-1} H_2(ka) H_1(ha)}{H_0(ha)H_2(ka) + H_0(ka)H_2(ha)} \qquad (10)$$

Если последнее выражение, взятое с обратным знаком, домножить на скорость колебаний цилиндра вдоль оси x, то получим энергию, которую нужно приложить на единицу длины цилиндра, чтобы поддерживать его колебания. При этом, очевидно, часть этой энергии будет попеременно переходить от цилиндра в среду и наоборот (эта энергия называется связанной); остальная часть энергии необратимо расходуется на создание акустического возмущения, распространяющегося от поверхности цилиндра в виде энергии продольных и поперечных волн. При этом следует заметить, что поперечные волны возникают в результате трения вязкой среды о поверхность колеблющегося цилиндра, так что в энергетическом смысле энергия вязких волн равна работе, затрачиваемой на преодоление сил трения.

В случае распространения звуковых волн в вязкой жидкости отношение $\omega\nu / c^2$ чрезвычайно мало вплоть до частот порядка сотен килогерц, так что с большим приближением можно написать из (2), что $k = \omega / c \times \times (1 - {}^2/_3 i\omega\nu / c^2)$, и даже по этой же причине считать k действительной величиной, равной ω / c.

Для акустики наиболее интересен случай, когда радиус цилиндра велик по сравнению с толщиной вязкого пограничного слоя, т. е. когда $\beta a \gg \gg 1$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $ka \ll 1$, т. е. радиус цилиндра меньше длины волны звука (длинноволновое излучение). Если, воспользовавшись формулами (5) и (6), удержим только наивысшую степень βa в выражении (10), то сопротивление излучения из (8) будет иметь вид

$$z_R = {}^1/_4 \pi^2 k^2 a^4 \omega + i\omega\pi a^2 \rho$$

т. е. точно такой, как если бы пренебречь вязкостью с самого начала [3].

Следующее приближение дает

$$z_R = \pi a^2 \rho\omega \left\{ \frac{\pi (ka)^2}{2} \left(1 + \frac{2}{\beta a}\right) + \frac{1}{\beta a} + \left(1 + \frac{1}{\beta a}\right) i \right\} \tag{11}$$

Первый член в (11) определяет активное сопротивление излучения продольных волн, которое в вязкой жидкости оказывается в $(1 + 2 / \beta a)$ раз больше, чем в идеальной жидкости. Физически это можно объяснить тем, что некоторое число частиц вязкой жидкости надежно удерживаются на поверхности цилиндра силами вязкого трения, что эквивалентно возрастанию радиуса цилиндра. Так как сопротивление излучения продольных волн пропорционально a^4, то нетрудно видеть, что практически надежно прилипают к цилиндру только те частицы вязкой жидкости, которые расположены вблизи поверхности цилиндра в пределах половины толщины вязкого пограничного слоя, т. е. эффективный радиус цилиндра в случае длинноволнового излучения равен

$$a_{eff} = a + {}^1/_2 \beta^{-1}$$

Второй член в (11), отсутствующий при излучении в невязкую жидкость, представляет собой активное сопротивление излучения поперечных волн, но его можно понимать и как сопротивление трения. В акустике обычно говорят о сопротивлении излучения, в механике несжимаемой жидкости ($k = 0$) — о сопротивлении трения.

Комплексная скорость распространения вязких волн c_t, определяемая из равенства $(\omega / c_t)^2 = h^2$, связана с фазовой скоростью c_p и амплитудным коэффициентом затухания α вязких волн соотношением

$$\frac{1}{c_t} = \frac{1}{c_p} - \frac{i\alpha}{\omega}$$

откуда следует:

$$c_p = (2\nu\omega)^{1/2} = \frac{\omega}{\beta}, \qquad \alpha = (\omega / 2\nu)^{1/2} = \beta$$

Таким образом, видим, что амплитуда поперечной волны, распространяющейся от поверхности цилиндра со скоростью ω / β, очень быстро убывает, уменьшаясь на протяжении одной длины волны в отношении

$e^{-2\pi}$, т. е. $^1/_{535}$. Это подтверждает ранее сделанные выводы о потенциальности звукового поля цилиндра за пределами вязкого пограничного слоя.

Нетрудно показать, что сопротивление излучения вязких волн равно $2\sqrt{2}\pi a\rho c_\phi$, т. е. прямо пропорционально волновому удельному сопротивлению среды для поперечных волн и радиусу цилиндра.

Наконец, третий член в (11) представляет собой соколеблющуюся массу, которая при излучении в вязкую жидкость по величине составляет $(1 + 1 / \beta a)$ часть вытесненной цилиндром жидкости вместо 1, как это имело место в случае идеальной жидкости. Физически это объясняется тем, что прилипшие к поверхности цилиндра частицы вязкой жидкости (в пределах половины толщины вязкого пограничного слоя) будут ускоряться синфазно с ускорением цилиндра; инерциальная реакция этих частиц проявляется как дополнительная соколеблющаяся масса.

Отношение третьего члена к первому порядка величины $(ka)^2$, а ко второму — порядка величины $(\beta a)^{-1}$. Отсюда следует, что при длинноволновом излучении вся энергия, приложенная к цилиндру, в основном расходуется на перемещение жидкости, вытесняемой цилиндром, с одной его стороны на другую.

2. Пусть теперь $ka \gg 1$, т. е. радиус цилиндра больше длины волны звука (случай коротковолнового излучения). Удерживая в формуле (11) только высшие степени ka и βa, получаем для сопротивления излучения на единицу длины цилиндра из (8)

$$z_R = \pi a \rho c \left(1 + \frac{1}{4\beta a}\right) + \frac{\pi a^2 \rho \omega}{2\beta a} + i\omega \frac{\pi a^2 \rho}{2\beta a} \tag{12}$$

При излучении в идеальную среду $\nu = 0$ и, следовательно, $\beta a = \infty$. В этом случае верхняя формула перепишется в виде

$$z_R = \pi a \rho c \tag{13}$$

что совпадает с сопротивлением излучения цилиндра, осциллирующего в идеальной среде [3].

Из сравнения (12) и (13) видно, что сопротивление излучения продольных волн в вязкой жидкости по сравнению с идеальной увеличивается в $(1 + 1 / 4\beta a)$ раза, что эквивалентно увеличению радиуса цилиндра на четверть толщины вязкого пограничного слоя, т. е. эффективный радиус цилиндра в случае коротковолнового излучения равен

$$a_{eff} = a + {}^1/_4\beta^{-1}$$

Второй член определяет величину сопротивления излучения поперечных волн. Третий член, отсутствующий при излучении в идеальную жидкость, представляет собой соколеблющуюся массу жидкости, присоединенную к цилиндру вследствии вязкого трения и колеблющуюся вместе с ним.

Отношение третьего и второго членов к первому порядка величины $ka / \beta a = (\nu\omega / 2c^2)^{1/2}$, т. е. много меньше единицы. Отсюда следует, что в случае коротковолнового излучения вся энергия, приложенная к цилиндру, расходуется в основном на излучение продольных волн.

Остается рассмотреть случай, когда радиус цилиндра мал по сравнению с толщиной вязкого пограничного слоя, т. е. когда $\beta a \ll 1$. При этом значение ka необходимо должно быть малым, поскольку отношение $ka/\beta a$, приблизительно равное $(\nu\omega / 2c^2)^{1/2}$, предполагается малым.

В этом случае имеем из (10), полагая для простоты среду несжимаемой ($k = 0$)

$$X = \frac{i\omega\pi a^2\rho V_0}{\vartheta(\beta a)} - \frac{4\pi a^2\rho\omega}{\vartheta(\beta a)}\left(\ln\frac{\beta a}{\sqrt{2}} + \gamma\right) V_0 \tag{14}$$

$$\vartheta(\beta a) = (\beta a)^2\left[\left(\ln\frac{\beta a}{\sqrt{2}} + \gamma\right)^2 + \frac{1}{16}\pi^2\right]$$

$$\frac{1}{2}ha = \frac{\beta a}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}$$

Если принять во внимание множитель, зависящий от времени, то это выражение будет равносильно следующему:

$$\mathbf{X} = \frac{\pi a^2\rho}{\vartheta(\beta a)}\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \frac{4\pi a^2\rho\omega}{\vartheta(\beta a)}\left(\ln\frac{\beta a}{\sqrt{2}} + \gamma\right)\mathbf{V} \tag{15}$$

Первый член в (15) дает поправку на инерцию цилиндра и представляет собой массу жидкости, перемещаемую при колебаниях цилиндра. Второй член представляет собой результирующую силу трения, пропорциональную скорости колебаний.

Так как при $\beta a \ll 1 \ln \beta a$ много больше единицы и отрицателен, то, пренебрегая в формуле (14) первым членом по сравнению со вторым, будем иметь

$$X = \frac{8\pi\nu\rho V_0}{{}^1/_2 \ln 2 - \gamma - \ln \beta a}$$

Эта формула дает величину силы сопротивления (трения) на единицу длины цилиндра, который осциллирует в вязкой жидкости со скоростью V_0, полученную при учете в уравнении движения вязкой несжимаемой среды инерционального члена $\partial \mathbf{V} / \partial t$.

Полезно сравнить последнее выражение с силой сопротивления на единицу длины цилиндра, двигающегося поступательно в вязкой среде с постоянной скоростью V_0, которая получена в осееновском приближении, т. е. при частичном учете в уравнении движения вязкой несжимаемой среды инерционального члена $(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}$ и в предположении, что $aV_0 / 2\nu$ мало [4]

$$X = \frac{4\pi\nu\rho V_0}{{}^1/_2 - \gamma - \ln(aV_0/2\nu)}$$

При очень высоких частотах отношение $\omega\nu / c^2$ уже нельзя считать малым и волновое число продольных волн будет комплексным. В этом случае все предыдущие выводы в основном остаются в силе, а комплексность волнового числа больше всего скажется в том, что давление и колебательная скорость на больших расстояниях от цилиндра будут изменяться по законам затухающих колебаний.

В случае, когда длина волны почти одинакова с радиусом цилиндра, возникают сложные явления интерференции, и анализ волнового движения становится затруднительным.

Поступило 13 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
3. Ржевкин С. И. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.