

ОБ ИМПУЛЬСЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДАВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА ТЕЛА В ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗЕ

А. И. ГОЛУБИНСКИЙ, М. Н. КОГАН

(Москва)

Известно, что трудности решения дифференциальных уравнений резко возрастают с увеличением числа независимых переменных. Поэтому решение нестационарных задач значительно сложнее соответствующих стационарных задач.

В то же время иногда при расчете на прочность или расчете динамики можно ограничиться лишь знанием суммарных импульсов, давлений, сил или моментов за период или за все время нестационарного процесса, а не в каждый момент времени.

В данной работе показано, что в рамках линейной теории для этой цели можно избежать детального расчета нестационарной картины течения, сводя определение импульсов к задаче с меньшим числом измерений.

Идея уменьшения размерности задачи аналогична идее работы [1], являясь в то же время известным обобщением подхода, применяемого в классических задачах об импульсивном движении или об ударе о жидкость [2, 3].

1. Рассмотрим обтекание тела или группы тел потоком с невозмущенными параметрами $(U, 0, 0)$, ρ_∞ , p_∞ на бесконечности. Предполагается, что углы наклона поверхности тела к потоку и скорости перемещений или деформаций поверхности малы, так что течение можно считать слабовозмущенным и удовлетворяющим линеаризированным уравнениям газовой динамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_\infty \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (p - a_\infty^2 \rho) + U \frac{\partial}{\partial x} (p - a_\infty \rho) &= 0 \quad \left(a_\infty^2 = \frac{\kappa p_\infty}{\rho_\infty} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v, w — возмущения компонент скорости, p и ρ — возмущения давления и плотности. Число Маха до- или сверхзвуковое.

Обозначим через S неподвижную поверхность тела или близкую к ней поверхность, на которую с точностью до квадратов возмущенных величин могут быть снесены граничные условия на теле в любой момент времени t . В случае обтекания группы тел поверхность S многосвязна.

Условия непротекания на S в общем случае имеют вид

$$a(s)v + b(s)w = F(t, s) \quad (1.2)$$

где s — точка на поверхности S , a, b и F — заданные функции.

Функция $F(t, s)$ определяется либо заданным законом движения или деформацией тела, либо возмущениями, вызванными набегающим порывом или волной. В последнем случае возмущенное движение газа можно

представить в виде суммы

$$\Gamma = \Gamma_1(t, x) + \Gamma_2(t, x) \quad (1.3)$$

Здесь $\Gamma \equiv (u, v, w, \rho, p)$ для краткости заменяет совокупность указанных в скобках гидродинамических величин, а индексы 1 и 2 относятся соответственно к набегающему порыву и возмущенному им течению. В этой задаче функция

$$F(t, s) = -[a(s)v_1 + b(s)w_1]$$

определяется заданными параметрами порыва Γ_1 , а уравнения (1.1) при граничном условии (1.2) служат для определения возмущений Γ_2 . При этом предполагается, что скорости возмущенного порывом движения или деформации тела малы по сравнению со скоростями v_1 и w_1 порыва и ими можно пренебречь.

С задних кромок несущих поверхностей сходит вихревая пелена, которая в рамках линейной теории может быть снесена на поверхность, образованную линиями тока невозмущенного течения, проходящими через заднюю кромку. На пелене должно выполняться условие непрерывности давления $p^+ = p^-$. На дозвуковых задних кромках несущих поверхностей должно выполняться условие Жуковского, что в рамках линеаризованной теории эквивалентно выполнению равенства $p^+ = p^-$ на задней кромке.

2. Пусть до момента $t = 0$ и после момента $t = T$ граничные условия и условия в набегающем потоке стационарны и одинаковы, т. е.

$$F(t, s) = F^\circ(s) \quad \text{при } t < 0, t > T \quad (2.1)$$

а в интервале $0 \leq t \leq T$ имеется некоторое нестационарное движение

$$F(t, s) = F^*(t, s) \quad \text{при } 0 \leq t < T \quad (2.2)$$

Очевидно, что поток будет в течение некоторого времени возмущен и после прекращения возмущений граничных условий, т. е. при $t > T$.

Обозначим через Γ° решение стационарной задачи с граничным условием (2.1), а через Γ^* — решение нестационарной задачи с условиями (2.1) и (2.2). Разность этих решений (нестационарная часть возмущения)

$$\Delta\Gamma = \Gamma^* - \Gamma^\circ \quad (2.3)$$

удовлетворяет, очевидно, системе уравнений (1.1).

Рассмотрим теперь импульс нестационарной части давления, действующего на некоторую точку тела и определяемого величиной

$$p_i = \int_0^\infty \Delta p dt = \int_0^\infty (p^* - p^\circ) dt \quad (2.4)$$

Импульсы нестационарных возмущений всех остальных величин Γ_i образуются аналогично.

Проинтегрируем уравнения (1.1), записанные для величин $\Delta\Gamma$, по времени от 0 до ∞ . Учитывая, что $\Delta\Gamma = 0$ при $t \leq 0$ и $\Delta\Gamma \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, убеждаемся в том, что импульсы Γ_i удовлетворяют уравнениям стационарного течения при следующих граничных условиях:

$$a(s)v_i + b(s)w_i = \int_0^T (F^* - F^\circ) dt = F_i(s) \quad \text{на } S \quad (2.5)$$

$$p_i^+ = p_i^- \quad (\text{на пелене и дозвуковых задних кромках}) \quad (2.6)$$

Действительно, проинтегрируем уравнения для $\Delta\Gamma$ по t от 0 до некоторого достаточно большого $t = T_1$.

Тогда уравнения для Γ_i будут отличаться от соответствующих стационарных уравнений наличием правых частей, линейных относительно $\Delta\Gamma(T_1)$. Решение этих уравнений можно представить в виде суммы $\Gamma_{i1} + \Gamma_{i2}$, где Γ_{i1} удовлетворяет однородным уравнениям и граничным условиям (2.5) и (2.6), а Γ_{i2} — неоднородным уравнениям и нулевым граничным условиям. Так как $\Delta\Gamma(T_1) \rightarrow 0$ при $T_1 \rightarrow \infty$, то и $\Gamma_{i2} \rightarrow 0$.

Наличие слабых разрывов не изменяет рассуждений, так как в рамках линейной теории разрывы могут быть рассмотрены как пределы непрерывных течений.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: импульс возмущений давления в произвольной точке тела, создаваемый ограниченными во времени возмущениями граничных условий или условий в набегающем потоке, численно равен стационарному давлению в соответствующих точках тела, форма которого определяется формулой (2.5). Следствием этого утверждения является свойство квазистационарности импульсов сил и моментов, которые действуют на крыло при нестационарных возмущениях [4], заключающееся в том, что импульс нестационарных сил (моментов) численно равен импульсу сил (моментов), рассчитанному в предположении о квазистационарности обтекания в каждый момент времени.

Легко видеть, что аналогичное утверждение можно высказать и для любых периодических движений, рассматривая импульсы возмущений за период T . Интегрируя уравнения и граничные условия по времени в пределах от 0 до T , снова получаем для импульсов уравнения, соответствующие некоторому стационарному течению. Такое утверждение в этом случае легко получается и с помощью известных методов с использованием рядов Фурье, например, [5].

3. Рассмотрим нестационарное движение переходного типа, в результате которого первоначальное стационарное течение (1) переходит со временем в другое стационарное течение (2). Для таких движений в граничном условии (1.2) имеем

$$\begin{aligned} F(t, s) &= F_1^\circ(s) && \text{при } t \leq 0 \\ F(t, s) &= F^*(t, s) && \text{при } 0 \leq t \leq T \\ F(t, s) &= F_2^\circ(s) && \text{при } t \geq T \end{aligned} \quad (3.1)$$

В этих случаях представляет интерес определение импульса нестационарной части возмущения давления, выражаемого формулой

$$p_j(s) = \int_0^\infty [p^*(t, s) - p_2^\circ(s)] dt = \int_0^\infty \Delta p dt \quad (3.2)$$

где $p^*(t, s)$ — нестационарное возмущение давления, $p_2^\circ(s)$ — предельное установившееся давление при $t \rightarrow \infty$. Вводя аналогичные обозначения для компонент скорости, плотности и их импульсов, записывая уравнения (1.1) для величин $\Delta\Gamma$ и интегрируя их по t от 0 до ∞ , снова приходим к стационарным, но уже неоднородным уравнениям

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \rho_j}{\partial x} + \rho_\infty \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{\partial w_j}{\partial z} \right) &= \rho_1^\circ - \rho_2^\circ \\ U \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p_j}{\partial x} &= u_1^\circ - u_2^\circ, \quad U \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p_j}{\partial y} = v_1^\circ - v_2^\circ \end{aligned}$$

$$U \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p_j}{\partial z} = w_1^\circ - w_2^\circ \quad (3.3)$$

$$U \frac{\partial}{\partial x} (p_j - a_\infty^2 \rho_j) = (p - a_\infty^2 \rho)_1^\circ - (p - a_\infty^2 \rho)_2^\circ$$

при граничном условии

$$a(s) v_j + b(s) w_j = F_j(s) = \int_0^\infty [F^*(t, s) - F_2^\circ(s)] dt \quad (3.4)$$

и условиях на дозвуковых задних кромках и вихревой пелене

$$p_j^+ - p_j^- = 0 \quad (3.5)$$

Проведем дальнейшие упрощения для потенциального (всюду за исключением отдельных поверхностей) течения, которое в этом случае описывается уравнением

$$-\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2M_\infty^2}{U} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.6)$$

Напомним (см. п. 1), что в случае набегания порыва решение представляется в виде суммы $\Gamma_1 + \Gamma_2$, где Γ_1 — решение соответствующее самому порыву, и что здесь рассматривается лишь решение для Γ_2 . Очевидно, что решение Γ_2 безвихревое и в том случае, когда порыв Γ_1 вихревой. Давление выражается через потенциал

$$p^\circ = -\rho_\infty U \varphi_x, \quad p^* = -\rho_\infty (U \varphi_x + \varphi_t) \quad (3.7)$$

Вновь интересуемся величиной

$$p_j = \int_0^\infty (p^* - p_2^\circ) dt = -\rho_\infty (U \varphi_{jx} + \varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ) \quad (3.8)$$

где

$$\varphi_j = \int_0^\infty (\varphi^* - \varphi_2^\circ) dt \quad (3.9)$$

Беря разность уравнений (3.6) для φ^* и φ_2° и интегрируя ее по t от 0 до ∞ , получаем

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 2 \frac{M_\infty^2}{U} (\varphi_{2x}^\circ - \varphi_{1x}^\circ) \quad (3.10)$$

Граничным условием для φ_j будет

$$a \varphi_{jy} + b \varphi_{jz} = \int_0^\infty (F^* - F_2^\circ) dt = F_j(s) \quad (3.11)$$

при условии на дозвуковых задних кромках и вихревой пелене

$$v(\varphi_{jx}^+ - \varphi_{jx}^-) = -\varphi_2^\circ + \varphi_2^\circ + \varphi_1^\circ - \varphi_1^\circ \quad (3.12)$$

Легко видеть, что общее решение уравнения (3.10) можно представить в виде

$$\varphi_j = \varphi^* + \frac{M_\infty^2}{(1 - M_\infty^2)U} (\varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ) x \quad (3.13)$$

где φ^* удовлетворяет уравнению стационарного течения

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial z^2} = 0 \quad (3.14)$$

граничному условию на поверхности S

$$a\varphi_y^* + b\varphi_z^* = F_j(s) - \frac{M_\infty^2 x}{(1 - M_\infty^2)U} (F_2^\circ - F_1^\circ) \quad (3.15)$$

и условию на дозвуковых задних кромках и вихревой пелене

$$\varphi_x^{*+} - \varphi_x^{*-} = -\frac{1}{U(1 - M^2)} (\varphi_2^{\circ+} - \varphi_2^{\circ-} - \varphi_1^{\circ+} + \varphi_1^{\circ-}) \quad (3.16)$$

Искомый импульс равен

$$p_j = -\rho_\infty U \varphi^* + \frac{M_\infty^2}{(1 - M_\infty^2)U} (p_2^\circ - p_1^\circ) x - \frac{\rho_\infty}{1 - M_\infty^2} (\varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ) \quad (3.17)$$

Отметим, что во вспомогательной стационарной задаче для φ^* условие (3.16) на дозвуковых задних кромках и на пелене отлично от обычного: скорость $u^* = \varphi_x^*$ терпит разрыв, равносильный заданному распределению вихрей на пелене. Интенсивность этой дополнительной пелены пропорциональна разности подъемных сил в стационарных состояниях до и после переходного процесса. Ее появление обусловлено суммированием во времени вихрей, сбегавших с задней кромки при изменении подъемной силы.

Таким образом, нестационарная задача свелась к стационарной задаче об обтекании тела (3.15) в присутствии на пелене вихрей, интенсивность которых определяется условием (3.16). Для решения этой задачи при некоторой модификации могут быть применены имеющиеся эффективные методы расчета стационарных течений.

Приведем для иллюстрации примеры решения нестационарных задач описанным методом.

Пример 1. Внезапное изменение угла атаки двумерной пластины от 0 до 1 при сверхзвуковом обтекании. Этой задаче соответствует

$$F(t, s) = 0 \quad \text{при } t \leq 0 \\ F(t, s) = U \quad \text{при } t > 0$$

Граничное условие для φ^* имеет вид

$$\varphi_v^* = \frac{M_\infty^2}{(M_\infty^2 - 1)} x \quad (3.18)$$

Давления p_2° и φ_x^* вычисляются по формуле Аккерета. Тогда для импульса нестационарной части давления на пластине по (3.17) имеем

$$p_j = \mp \rho U x (M^2 - 1)^{-3/2} \quad (3.19)$$

Знак минус соответствует верхней поверхности, а плюс — нижней.

Этот же результат, естественно, получается, несколько более сложным образом и из полного нестационарного решения задачи (см., например, [2]).

Пример 2. Внезапное изменение угла атаки треугольного крыла с дозвуковыми передними и прямой задней кромками. Эта нестационарная задача весьма трудна для непосредственного решения и ее полного решения, по-видимому, до сих пор нет. Предлагаемым методом можно вычислить импульс нестационарных давлений на таком крыле, ибо вспомогательная задача для Φ^* приводится к задаче обтекания крыла с деформацией поверхности по линейному закону от координаты x , решение которой известно [6]. Вычисления потенциала Φ^* при соответствующих граничных условиях (3.15) дают

$$\Phi^* = \frac{N_1(M_\infty)x\sqrt{m^2x^2 - y^2}}{U}$$

$$N_1 = \frac{M_\infty^2(1 - m^2)}{(1 - M_\infty^2)\{m[K(m') - E(m')] + (1 - m^2)E(m')\}}$$

$$m = \sqrt{M_\infty^2 - 1} \operatorname{tg} \delta, \quad m' = \sqrt{1 - m^2}$$

где K, E — полные эллиптические интегралы, δ — угол полураствора крыла. Импульс p_j на треугольном крыле с дозвуковыми кромками вычисляется по формуле (3.17)

$$p_j = -\rho_\infty U \left(N_1 + \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \right) \left(\sqrt{m^2x^2 - y^2} + \frac{m^2x^2}{\sqrt{m^2x^2 - y^2}} \right) - \rho_\infty U \frac{\sqrt{m^2x^2 - y^2}}{E(m')}$$

4. В ряде случаев задача допускает дальнейшее сокращение размерности.

Пусть, например, на тело вращения, обтекаемое параллельным оси тела стационарным потоком со скоростью U , набегают произвольный порыв (волна), параметры которого заданы величинами Γ_1 . Задача определения возмущенного порывом движения газа Γ_2 четырехмерна.

В цилиндрической системе координат, ось x которой совпадает с осью тела, потенциал возмущенного движения φ_2 удовлетворяет уравнению (индекс 2 далее опускаем)

$$-a_\infty \varphi_{tt} - \frac{2M_\infty^2}{v} \varphi_{tx} + (1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \varphi_r = 0 \quad (4.1)$$

на теле

$$\varphi_r = \begin{cases} F_1^\circ(x, r(x), \theta) & \text{при } t < 0 \\ F^*(t, x, r(x), \theta) & \text{при } 0 \leq t \leq T \\ F_2^\circ(x, r(x), \theta) & \text{при } t > T \end{cases} \quad (4.2)$$

На бесконечности $\varphi = 0$. Вводя φ_j по формуле (3.9) и интегрируя (4.1) по t от 0 до ∞ , получаем

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{jxx} + \varphi_{jrr} + \frac{1}{r^2} \varphi_{j\theta\theta} + \frac{1}{r} \varphi_{jr} = 2 \frac{M_\infty^2}{U} (\varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ) \quad (4.3)$$

На теле имеем граничные условия

$$\varphi_{jr} = \int_0^\infty (F^* - F_2^\circ) dt = F_j \quad (4.4)$$

Решения уравнения (4.3) можно представить в виде (3.13). Тогда для Φ^*

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx}^* + \varphi_{rr}^* + \frac{1}{rr} \varphi_{\theta\theta}^* + \frac{1}{r} \varphi_r^* = 0 \quad (4.5)$$

и граничное условие аналогично (3.15).

Таким образом, задача сведена к стационарной задаче обтекания тела. Аналогичную трехмерную задачу в общем случае имеем и для определения φ_1° и φ_2° .

Импульс давления определяется формулой (3.16). Для определения импульсов всех сил и моментов, действующих на тело, достаточно знать три интеграла

$$\int_0^{2\pi} p_j d\theta, \quad \int_0^{2\pi} p_j \cos \theta d\theta, \quad \int_0^{2\pi} p_j \sin \theta d\theta$$

Согласно (3.17) для нахождения этих интегралов нужно вычислить интегралы

$$\varphi^{\sigma} = \int_0^{2\pi} \varphi^* d\Theta, \quad \varphi^{\cos \Theta} = \int_0^{2\pi} \varphi^* \cos \Theta d\Theta, \quad \varphi^{\sin \Theta} = \int_0^{2\pi} \varphi^* \sin \Theta d\Theta$$

и аналогичные интегралы от φ_1° и φ_2° . Способы нахождения всех их одинаковы. Укажем путь их определения лишь для φ° . Интегрируя уравнение (4.5) по Θ от 0 до 2π , имеем

$$(1 - M_{\infty}^2)\varphi_{xx}^{\circ} + \varphi_{rr}^{\circ} + r^{-1}\varphi_r^{\circ} = 0 \tag{4.6}$$

Интегрируя соответствующее условие для φ^* на теле, сводим задачу к задаче об обтекании осесимметричного тела.

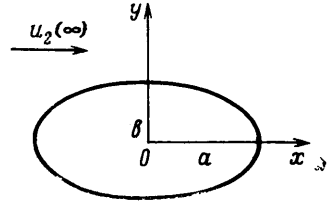
Умножая (4.5) соответственно на $\cos \Theta$ и $\sin \Theta$ и интегрируя, получаем

$$(1 - M_{\infty}^2)\varphi_{xx}^{\cos \Theta} + \varphi_{rr}^{\cos \Theta} + \frac{1}{r}\varphi_r^{\cos \Theta} = \frac{1}{r^2}\varphi^{\sin \Theta} \tag{4.7}$$

$$(1 - M_{\infty}^2)\varphi_{xx}^{\sin \Theta} + \varphi_{rr}^{\sin \Theta} + \frac{1}{r}\varphi_r^{\sin \Theta} = \frac{1}{r^2}\varphi^{\cos \Theta} \tag{4.8}$$

Вместо того, чтобы решать совместно систему уравнений (4.7), можно сложить и вычесть эти уравнения. Тогда получим независимые уравнения того же типа для $(\varphi^{\cos \Theta} + \varphi^{\sin \Theta})$ и $(\varphi^{\cos \Theta} - \varphi^{\sin \Theta})$. Таким образом и определение $\varphi^{\cos \Theta}$ и $\varphi^{\sin \Theta}$ свелось к осесимметричной задаче, близкой к задаче об осесимметричном обтекании тела вращения, т. е. четырехмерная задача в конечном счете свелась к нескольким двумерным.

К задаче о стационарном обтекании профиля может быть сведена и аналогичная четырехмерная задача для крыла со сверхзвуковыми передними кромками и задней кромкой, перпендикулярной потоку. Для этого достаточно проинтегрировать соответствующую трехмерную задачу для Γ_j по размаху крыла (см. работу [4]).



5. Наконец, рассмотрим задачу о воздействии слабой ударной волны или порыва на неподвижное препятствие. В этой задаче условие тонкости тела может быть снято ¹.

Пусть на произвольное тело, находящееся в покоящемся газе с параметрами ρ_{∞} , p_{∞} , набегаёт слабая ударная волна или порыв, заданный функциями Γ_1 , являющимися решением линеаризованных уравнений газовой динамики (1.1), в которых $U = 0$.

Возмущенное течение ищем в виде

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \tag{5.1}$$

Решение удовлетворяет уравнениям (1.1) и граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \\ (\varrho_2 + \varrho_1)\mathbf{n} = 0 \text{ на теле} \end{aligned} \right\} [\mathbf{q} = (u, v, w)] \tag{5.2}$$

\mathbf{n} — внешняя нормаль к S .

Примем момент начала воздействия возмущения Γ_1 на тело за $t = 0$. Тогда для Γ_2 получаем задачу: тело, которое находится в покоящемся газе, до момента $t = 0$ неподвижно, а при $t > 0$ появляются заданные возмущения на его поверхности. Течение Γ_2 безвихревое. Эта задача отличается

¹ В работе [7] в аналогичной постановке рассмотрена задача об определении суммарного импульса, действующего на тело, обтекаемое слабой ударной волной.

от рассмотренной в п. 2 лишь тем, что $U = 0$. Поэтому (см. 3.7)

$$p_2 = -\rho_\infty \varphi_2 t \quad (5.3)$$

Полагая $\varphi_2(t < 0) = 0$, имеем

$$p_{j1} = \int_0^\infty (p_1 - p_1(t = \infty)) dt \quad (5.4)$$

$$p_{j2} = \int_0^\infty (p_2 - p_2(t = \infty)) dt = \int_0^\infty p_2 dt = -\rho_\infty \varphi_2(t = \infty)$$

так как стационарное давление $p_2(t = \infty)$ имеет второй порядок малости.

Таким образом, определение импульса давлений свелось к расчету импульса неуравновешенного давления p_{j1} , вычисляемого так же, как и в отсутствии тела, и к стационарной задаче определения $\varphi_2(t = \infty)$.

Если набегающий порыв имеет конечную протяженность, то очевидно $\varphi(\infty) = 0$ и $p_{2i} = 0$. В этом случае импульс давлений полностью определяется импульсом неуравновешенного давления p_{i1} . Если, кроме того, набегающий порыв одномерный, то в любой точке тела p_{i1} одинаково, и, следовательно, суммарный импульс, действующий на замкнутое тело, равен нулю. Импульс p_{j2} зависит лишь от предельного установившегося течения и не зависит от распределения давления в порыве. Последнее учитывается, однако, импульсом p_{j1} .

Пример. Вычислим импульс нестационарного давления, сообщаемый эллиптическому цилиндру слабой набегающей ударной волной. Из известного выражения для потенциала обтекания на поверхности эллиптического цилиндра без циркуляции имеем (фигура)

$$\varphi_2 = u_2(\infty) \frac{b}{a} x$$

откуда для импульса давления p_{j2} по формуле (5.4) получаем

$$p_{j2} = \rho_\infty u_2(\infty) \frac{b}{a} x$$

где $u_2(\infty)$ — скорость потока воздуха за фронтом ударной волны (перпендикулярным оси x).

Набегающая ударная волна создает импульс

$$p_{j1} = \rho_\infty u_\infty(\infty)(a + x)$$

Суммарная составляющая по оси x всего импульса сил, приложенного к цилиндру, равна

$$p_j = \pi \rho u_2(\infty) b^2 (1 + a/b)$$

Поступило 6 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Некоторые свойства пространственных сверхзвуковых течений. ПММ, 1956, № 5.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
4. Голубинский А. И. Об импульсе сил и моментов, сообщаемых тонкому крылу при нестационарном обтекании. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
5. Майлс Дж. И. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М., Физматгиз, 1963.
6. Robinson A. Rotary derivatives of a delta wing at supersonic speeds. Trans. Roy. Aeronaut. Soc., 1948, 52.
7. Никольский А. А., Смирнов В. А. Действие ударной волны на препятствие. Инж. ж., 1962, вып. 1.