

## О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ГИБКОЙ ПЛЕНКОЙ

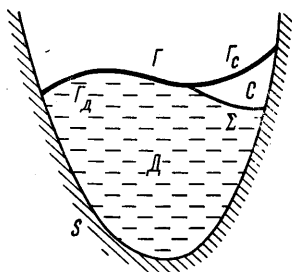
Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

(Москва)

Рассматривается плоская задача о движении массы идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной гибкой нерастяжимой пленкой. Отмечаются некоторые качественные особенности движения. Изучается явление гидродинамического удара, который может возникать при движении системы.

**1. Постановка задачи и типы движений.** Сформулируем исходные предположения о свойствах жидкости и пленки и характере движения.

**а. Свойства жидкости.** Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, с постоянной плотностью  $\rho$  и способной к кавитации при давлении  $p = p_*$ . Это означает, что в области, занятой жидкостью, давление  $p$  удовлетворяет неравенству  $p \geq p_*$ , а давление в каверне (если она имеется) равно постоянной  $p_*$  (давлению насыщенных паров жидкости). Поверхностным натяжением жидкости пренебрегаем.



Фиг. 1

**б. Характер движения.** Движение жидкости считается плоским и безвихревым, внешние массовые силы — потенциальными. Переменная плоская область  $D(t)$ , занятая жидкостью, предполагается ограниченной участками трех типов (фиг. 1): твердыми стенками  $S$ , гибкой пленкой  $\Gamma$  и границей  $\Sigma$  каверны  $C$  (некоторые

из этих типов границ могут отсутствовать). Извне на пленку действует внешнее давление  $p_0(t)$ , заданное как функция времени  $t$ .

**в. Свойства пленки.** Пленка  $\Gamma$  предполагается абсолютно гибкой (не сопротивляющейся изгибу) и нерастяжимой. Длина пленки (в проекции на плоскость движения) равна постоянной  $l$ . Концы пленки либо закреплены неподвижно, либо движутся заданным образом. Массой и толщиной пленки можно пренебречь.

При сделанных предположениях в области  $D(t)$ , занятой жидкостью, справедливы соотношения [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \varphi, \quad \varphi = \varphi(\mathbf{r}, t), \quad \Delta \varphi = 0, \quad p \geq p_*, \quad \mathbf{r} = (x, y) \\ \partial \varphi / \partial t + 1/2 (\nabla \varphi)^2 + \rho^{-1} p + U(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $x, y$  — декартовы координаты в плоскости течения,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор в этой плоскости,  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $\varphi$  — потенциал скоростей,  $U$  — потенциал внешних массовых сил. Произвольная функция в интеграле Коши — Лагранжа без нарушения общности положена равной нулю. Операторы Гамильтона  $\nabla$  и Лапласа  $\Delta$  вычисляются в плоскости  $xy$ .

Если предположить дополнительно, что потенциал массовых сил  $U$  — гармоническая функция, т. е.  $\Delta U = 0$  (это справедливо, в частности, для сил тяжести), то, как показано в книге [2], давление  $p$  при каждом  $t$  достигает своего минимума на границе области  $D(t)$ , и поэтому каверны

могут возникать лишь на границе этой области. Каверны, расположенные между жидкостью и твердыми стенками  $S$ , здесь не рассматриваются, так как в данной работе изучается движение жидкости вблизи гибкой пленки. Типичная картина движения изображена на фиг. 1.

Пусть для определенности твердые стенки  $S$  неподвижны или движутся поступательно. Второй из этих случаев сводится к первому за счет перехода в систему отсчета, связанную со стенками, и добавления потенциала сил инерции к потенциалу массовых сил. Граничные условия на стенках  $S$  и на границе  $\Sigma$  жидкости с каверной имеют вид

$$\partial\varphi/\partial n = 0 \quad (r \in S), \quad p = p_*, \quad \partial g/\partial t + (\nabla g)(\nabla\varphi) = 0 \quad (r \in \Sigma) \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — внутренняя нормаль к  $S$ . Последнее (кинематическое) условие (1.2) записано в предположении, что уравнение неизвестной свободной поверхности  $\Sigma$  имеет вид  $g(r, t) = 0$ .

Рассмотрим условия на кривой  $\Gamma$ , представляющей собой проекцию пленки на плоскость движения. Обозначим через  $L(t)$  длину кривой  $\Gamma$ , а через  $F(t)$  — силу натяжения пленки на единицу ее ширины в направлении, перпендикулярном плоскости движения. Эта сила одинакова во всех точках кривой  $\Gamma$  в силу безынерционности пленки.

Возможны, очевидно, два состояния пленки: ненатянутое, при котором  $L(t) \leq l$ ,  $F(t) = 0$ , и натянутое, при котором  $L(t) = l$ ,  $F(t) > 0$ . В ненатянутом состоянии форма пленки не определяется однозначно: излишек материала пленки может распределяться различными способами, образуя складки вдоль кривой  $\Gamma$  и стенок  $S$ . В этом случае пленка не оказывает влияния на движение системы. В натянутом состоянии пленка действует аналогично силам поверхностного натяжения, но в отличие от них здесь сила натяжения  $F$  не известна заранее и определяется в процессе решения задачи при помощи дополнительного условия  $L(t) = l$ .

Из условия равновесия приложенных к пленке сил имеем

$$p = p_0(t) + F(t)k \quad (1.3)$$

Здесь  $p$  — давление на пленку со стороны жидкости или каверны,  $k$  — кривизна кривой  $\Gamma$ . Кривизна пленки считается положительной, если центр кривизны лежит со стороны областей  $D$  или  $C$ .

Предположим для определенности, что  $p_0(t) > p_*$ . Тогда если пленка находится в ненатянутом состоянии ( $F = 0$ ), то она не может граничить с каверной  $C$ , ибо давление в каверне равно  $p_*$ , и равенство (1.3) не может выполняться. Поэтому каверна между жидкостью и пленкой может существовать лишь при натянутой пленке. При сделанных предположениях возможны следующие типы движений жидкости, ограниченной пленкой.

1. *Пленка не натянута.* Каверна между жидкостью и пленкой в этом случае отсутствует. В области  $D(t)$ , занятой жидкостью, выполняются соотношения (1.1). Граница области  $D(t)$  состоит из твердой стенки  $S$ , на которой имеет место граничное условие (1.2), и ненатянутой пленки  $\Gamma$ , на которой  $F = 0$  и  $p = p_0(t)$  согласно (1.3). Кроме того, на пленке выполняется еще кинематическое условие, аналогичное последнему условию (1.2) на поверхности  $\Sigma$ . Движение жидкости здесь эквивалентно движению со свободной поверхностью  $\Gamma$ , на которой задано давление  $p_0(t)$ . Данный тип движения будет иметь место до тех пор, пока выполнены неравенства  $p \geq p_*$  в области  $D(t)$  и  $L(t) < l$ . Первое неравенство может нарушаться лишь на границах области  $D(t)$  со стенками  $S$ , так как на пленке  $p = p_0(t) > p_*$ . При достижении равенства  $p = p_*$  образуются каверны у стенок  $S$ . Если же достигается равенство  $L(t) = l$ , то пленка переходит в натянутое состояние.

2. *Пленка натянута, каверна отсутствует.* В области  $D(t)$  и на стенке  $S$  по-прежнему имеют место соотношения (1.1), (1.2). На пленке  $\Gamma$  выполняется равенство (1.3) и кинематическое условие, аналогичное последнему условию (1.2). Если уравнение натянутой пленки представить в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t), \quad 0 \leq s \leq l \quad (1.4)$$

где параметр  $s$  есть длина дуги кривой  $\Gamma$ , то кинематическое условие на пленке  $\Gamma$  можно записать так:

$$(\partial \mathbf{r} / \partial t \cdot \mathbf{n}) = \partial \varphi / \partial n \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — орт нормали к кривой  $\Gamma$ , направленный внутрь области  $D$ . Помимо указанных условий имеет место еще изопериметрическое условие  $L(t) = l$ , служащее для определения силы натяжения  $F(t)$ . Рассматриваемый тип движения будет иметь место, если  $p \geq p_*$  в области  $D(t)$  и  $F(t) > 0$ . При нарушении первого неравенства образуются каверны, а при нарушении второго пленка переходит в ненатянутое состояние и начинает движение первого типа.

3. *Пленка натянута, между пленкой и жидкостью имеется каверна* (см. фиг. 1). Обозначим через  $\Gamma_D$  ту часть пленки, которая примыкает к жидкости, а через  $\Gamma_C$  — часть пленки, примыкающую к каверне. В области  $D$ , на стенках  $S$  и на поверхности  $\Sigma$  здесь имеют место те же условия, что и в случае 1, а на участке  $\Gamma_D$  — те же условия, что и в случае 2. На участке пленки  $\Gamma_C$  согласно (1.3) выполняется равенство  $p_* = p_0 + Fk$ , откуда следует, что этот участок есть дуга окружности с кривизной  $k(t) = (p_* - p_0) / F$ , зависящей от времени. Так как  $p_0(t) > p_*$  и  $F > 0$ , то  $k < 0$ , и центр окружности лежит вне области  $S$ . Кроме того, для определения силы  $F(t)$  и формы пленки имеется еще условие  $L(t) = l$ , условие гладкости пленки в точке сопряжения участков  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_C$  и условия закрепления пленки. В частном случае участок  $\Gamma_D$  может вообще отсутствовать: тогда для жидкости имеет место обычная гидродинамическая задача с условием  $p = p_*$  на свободной поверхности  $\Sigma$ , а пленка есть дуга окружности и всюду отделена от жидкости каверной  $S$ . Рассматриваемый тип движения имеет место до тех пор, пока существует каверна, после чего возможен переход к одному из первых двух типов. Обращение силы  $F(t)$  в нуль при сохранении каверны невозможно, так как каверна не может существовать при ненатянутой пленке.

Расчет движения жидкости и пленки для всех типов движения сводится к нелинейным краевым задачам, решение которых, как правило, требует вычислений на ЭВМ. Ниже рассмотрены явления перехода от одного типа движения к другому, при которых возникают динамические натяжения пленки.

2. **Возникновение натяжения пленки.** Пусть при  $t < t_0$  имеет место первый тип движения (пленка не натянута, каверна отсутствует), а в момент  $t = t_0$  происходит натяжение пленки.

Введем обозначения

$$dL(t) / dt = V(t), \quad V^- = V(t_0 - 0), \quad V^+ = V(t_0 + 0) \quad (2.1)$$

Выведем формулу для скорости  $V(t)$  изменения длины кривой  $\Gamma$ . Предполагаем, что кривая задана параметрическим уравнением (1.4), причем  $s$  — длина дуги кривой в натянутом состоянии в момент  $t_0$ . Поэтому  $|\mathbf{r}_s(s, t_0)| = 1$ . Нижние индексы означают частные производные. Имеем

тождественно по  $t$

$$L(t) = \int_0^l |\mathbf{r}_s(s, t)| ds \quad (2.2)$$

Дифференцируя тождество (2.2), получаем

$$V(t) = \frac{dL}{dt} = \int_0^l \frac{\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_{st}}{|\mathbf{r}_s|} ds \quad (2.3)$$

Обозначим через  $\boldsymbol{\tau}(s, t)$  орт касательной к кривой  $\Gamma$ , а через  $\mathbf{n}(s, t)$  — орт нормали, направленной внутрь области, которая занята жидкостью. Справедливы тождества

$$\mathbf{r}_s = \boldsymbol{\tau} |\mathbf{r}_s|, \quad \boldsymbol{\tau}_s = k\mathbf{n} \quad (2.4)$$

где  $k$  — введенная выше кривизна кривой  $\Gamma$ . Преобразуя равенство (2.3) при помощи соотношений (2.4) и интегрирования по частям, получаем

$$V(t) = \int_0^l \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r}_{st} ds = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r}_t) \Big|_0^l - \int_0^l k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_t ds = [v_{\boldsymbol{\tau}}(l, t) - v_{\boldsymbol{\tau}}(0, t)] - \int_0^l kv_n ds \quad (2.5)$$

Здесь  $v_{\boldsymbol{\tau}}$ ,  $v_n$  — проекции скорости точек пленки  $\mathbf{r}_t$  на касательную и нормаль к пленке. В случае закрепленных концов пленки, а также в случае замкнутой пленки в формуле (2.5) останется лишь интегральный член.

Так как при  $t \rightarrow t_0 - 0$  пленка переходит из ненапрянутого состояния в натянутое, то должны выполняться соотношения (в обозначениях (2.1))

$$L(t_0) = l, \quad F(t_0 - 0) = 0, \quad V^- > 0, \quad V^+ \leq 0 \quad (2.6)$$

Неравенство  $V^- > 0$  означает возрастание длины пленки непосредственно перед моментом  $t_0$ , а неравенство  $V^+ \leq 0$  необходимо в силу нестяжимости пленки. Длина пленки в момент  $t_0$  меняется непрерывно, а скорость ее изменения  $V(t)$  испытывает скачок от  $V^-$  до  $V^+$ .

Рассмотрим характер движения при  $t$ , близких к  $t_0$ . Предположим сначала, что сила натяжения  $F(t)$  ограничена и что каверны вблизи пленки не образуются, т. е. при  $t \geq t_0$  имеет место второй тип движения. Тогда пленка совпадает с поверхностью жидкости, и на ней выполняются условия (1.3), (1.5). Пленку  $\Gamma$  в момент  $t_0$  считаем гладкой кривой с ограниченной кривизной. Из условия (1.3) и ограниченности  $F(t)$  следует ограниченность давления  $p$  на поверхности жидкости. Из ограниченности давления (т. е. из ограниченности сил) вытекает ограниченность ускорений (или, что то же самое, ограниченность частной производной  $\partial\phi/\partial t$  в интеграле Коши — Лагранжа (1.1)) и, следовательно, непрерывность скоростей как функций времени. Тогда и величина  $V(t)$ , определяемая равенством (2.5), будет непрерывной функцией времени в момент  $t_0$ , что противоречит утверждению о ее разрывности.

Таким образом, сделанное предположение в общем случае несправедливо, и имеется одна из двух возможностей: либо в момент  $t_0$  образуется каверна, либо сила натяжения неограничена вблизи  $t = t_0$ .

а. Рассмотрим сначала первую возможность. Сразу после момента  $t_0$  будем иметь согласно равенству (1.3)

$$p(s, t_0 + 0) = p_0(t_0) + F(t_0 + 0)k(s, t_0) \quad (2.7)$$

Здесь внешнее давление  $p_0(t)$  и кривизна  $k$  кривой  $\Gamma$  — непрерывные функции времени, а сила натяжения  $F$  и давление в жидкости  $p$  могут испытывать разрыв. Поскольку должна образоваться каверна, то минимум левой части равенства (2.7) на пленке  $\Gamma$  равен  $p_*$ . Беря минимум по  $s$  из интервала  $[0, l]$  от обеих частей равенства (2.7), получаем

$$p_* = p_0(t_0) + F(t_0 + 0)k_m \quad (2.8)$$

где  $k_m$  — минимальная кривизна пленки  $\Gamma$  в момент  $t_0$ . Если в этот момент пленка будет выпуклой кривой, то  $k_m \geq 0$ , и равенство (2.8) невозможно, ибо  $p_0(t) > p_*$ ,  $F \geq 0$ . Если же  $k_m < 0$ , то сила натяжения согласно (2.8) равна

$$F(t_0 + 0) = [p_* - p_0(t_0)] / k_m > 0 \quad (2.9)$$

При  $t \geq t_0$  образуется каверна вблизи той точки (или тех точек) пленки, где достигается  $k = k_m$  в момент  $t_0$ .

Движение при  $t > t_0$  будет относиться к третьему типу из п. 1, и скачок  $V$  обеспечивается тем, что пленка отделяется от жидкости.

б. Вторая возможность обеспечить скачок  $V$  — это допустить неограниченное возрастание силы натяжения. Этот случай может иметь место лишь для пленки, выпуклой в момент  $t_0$ . Если же пленка невыпуклая (есть точки с  $k < 0$ ), то из соотношения (1.3) при неограниченности  $F$  следует, что  $p$  будет стремиться к  $(-\infty)$ , что противоречит условию  $p \geq p_*$  всюду в областях  $D, C$ . Поэтому рассматриваем лишь случай выпуклой пленки ( $k \geq 0$  на  $\Gamma$ ). Из-за неограниченности  $F$  давление  $p$  на  $\Gamma$  согласно (1.3) будет всюду стремиться к  $(+\infty)$ , поэтому каверны здесь не образуются. Проинтегрируем интеграл Коши — Лагранжа (1.1) по малому промежутку времени  $[t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$ , учитывая, что скорости и внешние массовые силы ограничены, давление неограничено, а потенциал скоростей, как и скорости жидкости, испытывает разрыв. Получим

$$\begin{aligned} \varphi^+ - \varphi^- &= -\frac{1}{\rho} \int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} p(\mathbf{r}, t) dt, & \varphi^- &= \varphi(\mathbf{r}, t_0 - 0) \\ \varphi^+ &= \varphi(\mathbf{r}, t_0 + 0) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отсюда видно, что давление имеет особенность типа  $\delta$ -функции времени, т. е. происходит гидродинамический удар. Из условия (1.3) следует, что такую особенность имеет и сила натяжения  $F(t)$ . Положим поэтому вблизи момента  $t_0$

$$p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r})\delta(t - t_0), \quad F(t) = I\delta(t - t_0), \quad I > 0 \quad (2.11)$$

где  $P(\mathbf{r})$  — импульс давления, а постоянная  $I$  есть импульс сил натяжения. Подставляя равенства (2.11) в соотношения (2.10), (1.3), получаем

$$\varphi^+ - \varphi^- = -\rho^{-1}P(\mathbf{r}) \text{ в } D, \quad P = Ik \text{ на } \Gamma \quad (2.12)$$

Из первого равенства (2.12) следует, что функция  $P(\mathbf{r})$ , так же как и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию (1.2) на стенке  $S$ . Введем вспомогательную функцию  $\Phi(\mathbf{r})$ , являющуюся решением краевой задачи

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } D(t_0), \quad \partial\Phi / \partial n = 0 \text{ на } S, \quad \Phi = k \text{ на } \Gamma \quad (2.13)$$

Тогда из соотношений (2.12) имеем в области  $D(t_0)$

$$\varphi^+ - \varphi^- = -\rho^{-1}I\Phi(\mathbf{r}), \quad P(\mathbf{r}) = I\Phi(\mathbf{r}) \quad (2.14)$$

Расчет гидродинамического удара, происходящего в момент  $t_0$ , сводится к определению функции  $\Phi(\mathbf{r})$  и постоянной  $I$ . Импульсивное давление и потенциал скоростей после удара  $\varphi^+$  выражаются через эти величины равенствами (2.14), (2.11). Функция  $\Phi(\mathbf{r})$  есть решение задачи (2.13), а для определения постоянной  $I$  требуется привлечь дополнительные соображения. Отметим лишь два ограничения на выбор  $I$ , вытекающие из постановки задачи: должно выполняться неравенство  $V^+ \leq 0$  из (2.6), и кинетическая энергия жидкости в результате удара не должна возрастать. Более подробно вопрос о выборе  $I$  рассмотрен ниже для случая замкнутой пленки.

Таким образом, если во время движения первого типа пленка натягивается в некоторый момент  $t_0$ , то возможны два случая.

1°. Если в момент  $t_0$  пленка не является выпуклой кривой, то происходит отрыв пленки от жидкости в местах минимальной кривизны пленки (там, где пленка вогнута внутрь жидкости). Сила натяжения пленки при этом остается ограниченной и испытывает скачок от нуля до величины, определяемой равенством (2.9). При  $t > t_0$  наступает движение третьего типа.

2°. Если же в момент  $t_0$  пленка является всюду выпуклой кривой, то происходит гидродинамический удар, обусловленный импульсным натяжением пленки. Скорости жидкости испытывают скачок, после чего наступает движение первого (если  $V^+ < 0$ ) или второго типа (если  $V^+ = 0$ ). Процесс удара описывается соотношениями (2.11) — (2.14).

Более подробное исследование требует конкретизации условий закрепления пленки. Отметим, что при учете реальных свойств пленки (растяжимости, жесткости, инерционности) рассмотренные здесь явления будут усложняться.

**3. Гидродинамический удар.** Рассмотрим гидродинамический удар в случае массы жидкости, ограниченной замкнутой пленкой  $\Gamma$ . Пусть в ходе движения первого типа в момент  $t_0$  произошло натяжение пленки ( $L(t_0) = l$ ), причем область  $D = D(t_0)$  — выпукла (фиг. 2). Краевая задача (2.13) для замкнутой пленки  $\Gamma$  имеет вид

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{в } D, \quad \Phi(s) = k(s) \quad \text{на } \Gamma \quad (3.1)$$

Учитывая обозначения (2.1), (2.10) и равенства (2.5), (1.5), запишем скорость изменения длины пленки до и после удара ( $\mathbf{n}$  — внутренняя нормаль к  $\Gamma$ )

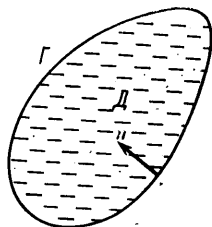
$$V^- = - \oint_{\Gamma} k \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} ds, \quad V^+ = - \oint_{\Gamma} k \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} ds \quad (3.2)$$

Подставляя первое равенство (2.14) в (3.2), получаем

$$V^+ = V^- - \rho^{-1}IM \quad (3.3)$$

где введено обозначение

$$M = - \oint_{\Gamma} k \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = - \oint_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \iint_D (\nabla \Phi)^2 dx dy \quad (3.4)$$



Фиг. 2

Запишем кинетическую энергию жидкости до удара

$$T^- = \frac{1}{2} \rho \iint_D (\nabla \varphi^-)^2 dx dy = -\frac{1}{2} \rho \oint_{\Gamma} \varphi^- \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} ds$$

и вычислим кинетическую энергию после удара, используя равенство (2.14)

$$T^+ = -\frac{1}{2} \rho \oint_{\Gamma} \varphi^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} ds = T^- + \frac{1}{2} I \oint_{\Gamma} \left( \varphi^- \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \Phi \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} \right) ds - \\ - \frac{1}{2} \rho^{-1} I^2 \oint_{\Gamma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

Применяя теорему Грина и равенства (3.1), (3.2), (3.4), приведем полученное выражение к виду

$$T^+ = T^- - IV^- + \frac{1}{2} \rho^{-1} I^2 M \quad (3.5)$$

Вместо постоянной  $I$  удобно ввести новую постоянную  $\kappa$  соотношением

$$I = (1 + \kappa) V^- \rho M^{-1} \quad (3.6)$$

Тогда равенства (3.3), (3.5) переписутся так:

$$V^+ = -\kappa V^-, \quad T^+ - T^- = -\frac{1}{2} \rho (V^-)^2 (1 - \kappa^2) / M \quad (3.7)$$

Из неравенств (2.6) следует, что  $V^- > 0$ ,  $V^+ \leq 0$ , и поэтому  $\kappa \geq 0$ . С другой стороны, из условия невозрастания кинетической энергии  $T^+ \leq T^-$  следует (см. (3.7)), что  $|\kappa| \leq 1$ . Таким образом, имеем всегда  $0 \leq \kappa \leq 1$ . Случай  $\kappa = 1$  отвечает абсолютно упругому удару: при этом энергия сохраняется ( $T^+ = T^-$ ), и  $V^+ = -V^-$ . Случай  $\kappa = 0$  отвечает абсолютно неупругому удару, при котором  $V^+ = 0$  и происходит максимальная диссипация энергии. Промежуточные значения  $\kappa$  соответствуют частичной диссипации. Величина  $\kappa$  зависит от упругих свойств пленки в момент удара и имеет смысл коэффициента восстановления при ударе [3]. Задавшись значением  $\kappa$ , можно определить величину  $I$  из (3.6).

Постоянная  $M \geq 0$ , определяемая равенством (3.4), зависит только от формы области  $D$  в момент удара и имеет смысл присоединенной массы при ударе о пленку. Чем больше  $M$ , тем меньше величина  $I$  (при фиксированном  $\kappa$  согласно (3.6)) и тем слабее удар, т. е. меньше импульсы сил натяжения и давления (см. (2.11), (2.14)). Для расчета удара нужно решить краевую задачу Дирихле (3.1), зависящую от формы области  $D$ , и затем вычислить  $M$  из (3.4).

**4. О краевой задаче теории удара.** Краевая задача (3.1) для удара жидкости о гибкую пленку отличается от обычных задач гидродинамического удара [1, 4] своеобразным краевым условием, зависящим от кривизны границы области. Задачу Дирихле (3.1), как следует из п. 2, имеет смысл рассматривать лишь для выпуклых областей  $D$ , т. е. при  $k \geq 0$  на  $\Gamma$ . Из принципа максимума для гармонических функций тогда вытекает, что  $\Phi \geq 0$  всюду в области  $D$ .

Задача Дирихле (3.1), как известно, имеет решение не только при непрерывных, но и при разрывных граничных условиях (так называемая обобщенная задача Дирихле [4]). Поэтому границу  $\Gamma$  области  $D$  в момент  $t_0$  считаем замкнутой выпуклой гладкой кривой с кусочно-непрерывной кривизмой  $k(s)$ , имеющей конечное число точек разрыва первого рода. При этих условиях задача Дирихле (3.1) имеет [4] единственное решение.

Однако этих условий недостаточно для ограниченности присоединенной массы  $M$ , которая представляет собой (см. (3.4)) интеграл Дирихле от функции  $\Phi$ . Чтобы интеграл Дирихле был ограничен ( $M < +\infty$ ), необходимо и достаточно [5] существование функции  $\psi(r)$  в области  $D$  такой, что

$$\psi(r) = k \quad (r \in \Gamma), \quad \iint_D (\nabla\psi)^2 dx dy < +\infty$$

Рассмотрим задачу (3.1) для некоторых областей.

1. Докажем, что если кривизна  $k(s)$  кривой  $\Gamma$  разрывна, то  $M = \infty$ . Пусть точка  $z_0 \in \Gamma$  комплексной плоскости  $z = x + iy$  есть точка разрыва первого рода кривизны  $k(s)$  контура  $\Gamma$ , а  $k_0$  — величина скачка кривизны в этой точке. Решение задачи Дирихле (3.1) вблизи точки  $z_0$  имеет вид [4]

$$\Phi = k_0 \pi^{-1} \arg(z - z_0) + \dots = k_0 \pi^{-1} \operatorname{Im} \ln(z - z_0) + \dots \quad (4.1)$$

Точками обозначена регулярная вблизи  $z = z_0$  часть решения. Простое вычисление с использованием равенства (4.1) показывает, что вблизи точки  $z = z_0$  имеем

$$(\nabla\Phi)^2 = k_0^2 \pi^{-2} |z - z_0|^{-2} + \dots \quad (4.2)$$

с точностью до малых высшего порядка относительно  $|z - z_0|$ . Функция (4.2) имеет в точке  $z_0$  неинтегрируемую особенность, поэтому интеграл (3.4) по области  $D$  расходится:  $M = \infty$ . Равенство  $M = \infty$  означает согласно (3.6), что  $I = 0$ , и удар является бесконечно слабым.

2. Для контура  $\Gamma$  в виде окружности имеем согласно (3.1)  $\Phi = k = \text{const}$ , и поэтому  $M = 0$  в силу (3.4). Для этого контура по известному свойству гармонических функций [4] получим из (3.2)

$$V^- = -k \oint_{\Gamma} \frac{\partial\Phi^-}{\partial n} ds = 0, \quad V^+ = -k \oint_{\Gamma} \frac{\partial\Phi^+}{\partial n} ds = 0$$

Отсюда следует, что гидродинамический удар здесь не может иметь места, а соотношения (3.6), (3.7) теряют смысл.

3. Построим приближенное решение задачи (3.1) в области  $D$ , близкой к кругу. Пусть уравнение кривой  $\Gamma$  в полярных координатах  $r, \theta$  в плоскости  $xy$  имеет вид

$$r(\theta) = r_0 [1 + \varepsilon f(\theta)], \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \varepsilon \ll 1$$

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) \quad (4.3)$$

Здесь  $r_0$  — радиус круга, к которому близка область  $D$ ;  $\varepsilon$  — безразмерный малый параметр;  $f(\theta)$  — периодическая с периодом  $2\pi$  функция угла  $\theta$ , разлагаемая в ряд Фурье. При  $\varepsilon = 0$  область  $D$  превращается в круг радиуса  $r_0$ , для которого решение краевой задачи (3.1) имеет вид  $\Phi_0 = r_0^{-1}$ . При малых  $\varepsilon$  решение задачи (3.1) ищем в виде

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \dots, \quad \Phi_0 = r_0^{-1}$$

$$\Phi_1 = r_0^{-1} \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \right] \quad (4.4)$$

Здесь гармоническая функция  $\Phi_1$  представлена в виде ряда по гармоническим функциям с коэффициентами  $A_m, B_m$ . В разложении по параметру  $\varepsilon$  в (4.4) ограничимся лишь линейным по  $\varepsilon$  приближением. Краевое условие (3.1) запишем в полярных координатах

$$k(\theta) = \frac{r^2 + 2r^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \Phi(r(\theta), \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.5)$$



Штрихом обозначены производные по  $\theta$ . Подставим в равенство (4.5) выражение  $r(\theta)$  из (4.3) и  $\Phi(r, \theta)$  из (4.4), разложим обе части в ряды по  $\varepsilon$  и отбросим малые выше первого порядка. Получим

$$r_0^{-1}\{1 - \varepsilon[f(\theta) + f''(\theta)]\} = r_0^{-1} + \varepsilon\Phi_1(r_0, \theta) + O(\varepsilon^2)$$

откуда следует

$$\Phi_1(r_0, \theta) = -r_0^{-1}[f(\theta) + f''(\theta)] \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.6)$$

Подставим в равенство (4.6) ряды (4.3), (4.4) для функций  $f$ ,  $\Phi_1$  и найдем иско-  
мые коэффициенты разложения  $A_m, B_m$  в виде

$$A_0 = -a_0, \quad A_m = (m^2 - 1)a_m, \quad B_m = (m^2 - 1)b_m, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.7)$$

Равенства (4.4), (4.7) полностью определяют решение задачи (3.1) в принятом приближении (все ряды предполагаются сходящимися). Аналогично можно построить и высшие по  $\varepsilon$  приближения. Отметим, что  $A_1 = B_1 = 0$  согласно равенствам (4.7). Это связано с тем, что члены вида  $a_1 \cos \theta$  и  $b_1 \sin \theta$  в разложении (4.3) соответствуют сдвигу круга  $r = r_0$  как целого (без его деформации) и поэтому не влияют на решение задачи (3.1).

Вычислим еще величину  $M$ . Подставляя в соотношение (3.4) решение  $\Phi$  из (4.4), получаем с точностью до малых высшего порядка

$$\begin{aligned} M &= \varepsilon^2 \iint_D (\nabla\Phi_1)^2 dx dy + o(\varepsilon^2) = \\ &= -\varepsilon^2 \oint_{\Gamma} \Phi_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} ds + o(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 r_0 \int_0^{2\pi} \Phi_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} d\theta + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь интеграл по контуру  $\Gamma$  заменен с принятой точностью интегралом по окружности  $r = r_0$ . Подставим в соотношение (4.8) выражение  $\Phi_1$  из (4.4), вычислим полученный интеграл и примем во внимание найденные значения коэффициентов из (4.7). Будем иметь окончательно

$$M = \frac{\pi\varepsilon^2}{r_0^2} \sum_{m=2}^{\infty} m(m^2 - 1)^2 (a_m^2 + b_m^2) \quad (4.9)$$

4. В качестве примера рассмотрим область  $D$  в виде внутренности эллипса с полуосями  $a, b$ , близкими по величине

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad 0 \leq a - b \ll (a + b)/2 \quad (4.10)$$

В полярных координатах уравнение эллипса (4.10) запишется с точностью до малых высшего порядка в виде (4.3), если положить

$$r_0 = (a + b)/2, \quad \varepsilon = (a - b)/(a + b) \ll 1, \quad a_2 = 1 \quad (4.11)$$

Все остальные коэффициенты  $a_m, b_m$  разложения (4.3) здесь равны нулю. Величина  $M$  для эллипса согласно соотношениям (4.9), (4.11) равна

$$M = 18\pi\varepsilon^2 r_0^{-2} = 72\pi(a - b)^2(a + b)^{-4}$$

Поступила 20 VIII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Л.—М., Гостехтеоретиздат, 1948, т. 1.
2. Биркгоф Г. Гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1954, стр. 62.
3. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. М., Гостехтеоретиздат, 1954, т. 2.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., Физматгиз, 1958, т. 4, стр. 300, 301.