

## О ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Д. С. КОВНЕР, В. Г. ЛУЩИК

(Москва)

Использование уравнений для тензора напряжений Рейнольдса (уравнений баланса энергии турбулентности), замкнутых при помощи полуэмпирических соотношений, оказалось плодотворным при исследовании течений с поперечным сдвигом в обычной гидродинамике [1, 2, 7].

В магнитной гидродинамике уравнения для тензора напряжений Рейнольдса дополняются членами, учитывающими влияние магнитного поля на характеристики турбулентности, для которых полуэмпирическое представление затруднительно в связи с ограниченностью экспериментального материала.

Тем не менее известны попытки [3, 4] построения полуэмпирической теории турбулентности на основании уравнений для тензора напряжений Рейнольдса в случае течения проводящей жидкости в продольном магнитном поле, где влияние поля учитывается членами, описывающими джоулеву диссипацию энергии турбулентности, для которых принимаются соответствующие представления.

В данной статье следуя [3, 4], в свою очередь, формулируется гипотеза относительно члена, описывающего джоулеву диссипацию энергии турбулентности, которая имеет простой физический смысл и учитывает изменение структуры турбулентности потока в магнитном поле. Использование принятой гипотезы вместе с известными соотношениями Ротта [2] для остальных членов в уравнениях тензора напряжений Рейнольдса позволяет получить выражение для турбулентного течения, которое аналогично известному соотношению Прандтля, отличаясь от последнего лишь коэффициентом, учитывающим влияние магнитного поля.

### 1. В уравнениях Навье — Стокса <sup>1</sup>

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{\rho} X_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

объемная плотность внешних сил  $X_i$  в случае движения электропроводной жидкости в магнитном поле имеет известный вид

$$X_i = \epsilon_{irs} J_r B_s \quad (1.2)$$

Здесь  $\epsilon_{irs}$  — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, а  $J_r$  и  $B_s$  — компоненты векторов индуцированного электрического тока и индукции магнитного поля соответственно.

Представляя индивидуальные значения полей соответствующих величин, входящих в уравнения Навье — Стокса (1.1), в виде суммы средних и пульсационных, например,  $U_i = \bar{U}_i + u_i$  уравнения (1.1) с учетом (1.2) и уравнений неразрывности для средних и пульсационных величин мож-

<sup>1</sup> Здесь и ниже предполагается, что по дважды повторяющемуся индексу производится суммирование от единицы до трех, например,

$$U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}.$$

но записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_h \frac{\partial u_i}{\partial x_h} + u_h \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_h} + \frac{\partial}{\partial x_h} (\bar{U}_i \bar{U}_h + u_i u_h) = \\ = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_h \partial x_h} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_h} + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{irs} (\bar{J}_r + j_r) (\bar{B}_s + b_s) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Применяя затем операцию осреднения к членам уравнения (1.3) и используя условия Рейнольдса [1], можно получить уравнения, которые аналогичны уравнениям Рейнольдса в обычной гидродинамике

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_h} (\bar{U}_i \bar{U}_h + \langle u_i u_h \rangle) = \\ = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_h \partial x_h} + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{irs} (\bar{J}_r \bar{B}_s + \langle j_r b_s \rangle) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из уравнений (1.3) и (1.4) известным приемом (см., например, [1, 2]) получаются уравнения для тензора напряжений Рейнольдса

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i u_j \rangle + \bar{U}_h \frac{\partial}{\partial x_h} \langle u_i u_j \rangle + \langle u_j u_h \rangle \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_h} + \langle u_i u_h \rangle \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_h} = \\ = & \frac{1}{\rho} \left\langle p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_h} \left[ \nu \frac{\partial}{\partial x_h} \langle u_i u_j \rangle - \langle u_h u_i u_j \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\rho} \langle p (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \rangle \right] - 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} \right\rangle + \\ & + \varepsilon_{irs} \frac{1}{\rho} [\bar{J}_r \langle b_s u_j \rangle + \bar{B}_s \langle u_j j_r \rangle + \langle j_r b_s u_j \rangle] + \\ & + \varepsilon_{jrs} \frac{1}{\rho} [\bar{J}_r \langle b_s u_i \rangle + \bar{B}_s \langle u_i j_r \rangle + \langle j_r b_s u_i \rangle] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — единичный тензор ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ).

Полагая в (1.5)  $i = j$ , получаем уравнение баланса энергии турбулентности  $E = \langle u_i^2 \rangle / 2$ , описывающее изменение во времени плотности энергии пульсационного движения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E}{\partial t} + \bar{U}_h \frac{\partial E}{\partial x_h} + \langle u_i u_h \rangle \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} \left[ \nu \frac{\partial E}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \langle u_i^2 u_h \rangle - \frac{1}{\rho} \delta_{ih} \langle p u_i \rangle \right] - \\ & - \nu \left\langle \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right)^2 \right\rangle + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{irs} [\bar{J}_r \langle b_s u_i \rangle + \bar{B}_s \langle j_r u_i \rangle + \langle j_r b_s u_i \rangle] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Все члены уравнения (1.6) имеют ясный физический смысл. В частности, последний член представляет собой джоулеву диссипацию энергии турбулентности, обусловленную пульсационным движением жидкости в магнитном поле<sup>1</sup>.

Очевидно, что уравнения для тензора напряжений Рейнольдса в виде (1.5) невозможно разрешить относительно  $\langle u_i u_j \rangle$  в общем виде. Однако в некоторых случаях, допускающих значительные упрощения уравнений (1.5), это все же удается сделать.

<sup>1</sup> Относительно физического смысла остальных членов уравнения (1.6) см., например, [1, 2].

2. Рассмотрим аналогично [3,4] стационарное течение проводящей жидкости в продольном магнитном поле в случае, когда имеется равенство между производством и диссипацией энергии турбулентности с учетом перераспределения ее вдоль осей координат, т. е. пренебрежем конвективными и диффузионными членами в уравнениях (1.5). Как показывает опыт в случае отсутствия магнитного поля, это имеет место в большей части течения в трубе [5] и в пограничном слое на плоской пластине в отсутствие градиента давления во внешнем потоке [6]. Далее предполагается, что магнитное число Рейнольдса, определенное по пульсационным составляющим скорости потока, мало, так что пульсационной составляющей индукции магнитного поля можно пренебречь по сравнению со средней величиной индукции поля, создаваемого внешними источниками.

Относительно членов, описывающих обмен энергией между пульсациями вдоль различных осей координат и вязкую диссипацию энергии пульсационного движения в уравнениях (1.5), примем предположения Ротта<sup>1</sup>

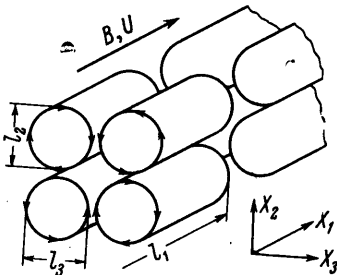
$$\frac{1}{\rho} \left\langle p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle = -k \frac{\sqrt{E}}{l} \left( \langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) \quad (2.1)$$

$$2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle = \nu c_1 \frac{\langle u_i u_j \rangle}{l^2} + \frac{2}{3} c \delta_{ij} \frac{E^{3/2}}{l} \quad (2.2)$$

Здесь  $k$ ,  $c$  и  $c_1$  — эмпирические константы,  $l$  — масштаб пульсационного движения, в качестве которого при отсутствии магнитного поля принимается путь смешения Прандтля.

Относительно пульсационной составляющей электрического тока, обусловленной турбулентным движением проводящей жидкости в магнитном поле, делается следующее предположение.

Пусть структура турбулентного потока характеризуется вихрями, имеющими различные масштабы (пути смешения) вдоль осей координат  $x_1, x_2, x_3$  (фиг. 1), но при этом выполняется равенство отношений масштабов к соответствующим пульсационным скоростям



$$\frac{l_1}{\sqrt{\langle u_1^2 \rangle}} = \frac{l_2}{\sqrt{\langle u_2^2 \rangle}} = \frac{l_3}{\sqrt{\langle u_3^2 \rangle}} \quad (2.3)$$

Фиг. 1

следующее из оценки порядка величин в уравнении неразрывности для пульсационных скоростей.

Рассматривается течение в продольном магнитном поле (т. е.  $\bar{B}_2 = \bar{B}_3 = 0, \bar{B}_1 = B$ ), поэтому э.д.с. индукции возникает вследствие взаимодействия с полем поперечных (по отношению к магнитному полю) составляющих вектора пульсационной скорости  $u_2$  и  $u_3$ , которые примем, как и в случае отсутствия магнитного поля [5,6], приблизительно равными между собой (т. е.  $u_2 \approx u_3$ , а следовательно, и  $l_2 \approx l_3$  согласно (2.3)). Появляющийся таким образом пульсационный электрический ток замыкается в продольном (вдоль магнитного поля) направлении, так что суммарная длина токового контура  $L_k$  по величине примерно равна длине контура вихря  $2(l_1 + l_2)$ .

<sup>1</sup> Следует отметить, что в соотношении (2.1), являющемся приближенным даже в обычной гидродинамике [1], в рассматриваемом случае не учтена, кроме того, зависимость пульсаций давления от магнитного поля.

Общую э.д.с.  $\Delta\varphi$ , возникающую в токовом контуре длиной  $L_k$ , можно представить в виде

$$\Delta\varphi = 2\alpha l_2 u_2 B \quad (2.4)$$

где  $\alpha$  — коэффициент, учитывающий уменьшение э.д.с. из-за наличия индуцированного пульсационного электрического поля ( $0 < \alpha < 1$ ).

Электрический ток, вызываемый этой э.д.с., в направлении вдоль магнитного поля течет через слой жидкости сечением  $l_2^2/4$ , так что общее сопротивление контура равно

$$\rho_k = L_k / (\sigma l_2^2 / 4) = 8(l_1 + l_2) / \sigma l_2^2,$$

а общий ток в контуре

$$J_k = \Delta\varphi / \rho_k = \alpha B u_2 l_2^3 \sigma / 4(l_1 + l_2)$$

Здесь  $\sigma$  — удельная проводимость жидкости. Следовательно, плотность тока в продольном направлении с учетом соотношений (2.3) имеет следующий вид:

$$j_1 = \frac{J_k}{l_2^2/4} = \alpha \frac{\sigma B u_2}{l_1/l_2 + 1} = \alpha \frac{\sigma B u_2}{(\langle u_1^2 \rangle / \langle u_2^2 \rangle)^{1/2} + 1} \quad (2.5)$$

Для определения плотности тока в поперечном направлении следует общий ток в контуре разделить на площадь сечения, через которую протекает этот ток, т. е.

$$j_2 \approx j_3 = \frac{J_k}{l_1 l_2 / 4} = \alpha \frac{\sigma B u_2}{(l_1/l_2)^2 + l_1/l_2} = \alpha \frac{\sigma B u_2}{\langle u_1^2 \rangle / \langle u_2^2 \rangle + (\langle u_1^2 \rangle / \langle u_2^2 \rangle)^{1/2}} \quad (2.6)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае соотношения (2.1), (2.2), (2.5) и (2.6) замыкают уравнения для тензора напряжений Рейнольдса (1.5), которые в общепринятых обозначениях

$$\bar{U}_1 = U, \quad u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y$$

примут вид

$$\langle uv \rangle \frac{dU}{dy} + \frac{k \sqrt{E}}{2l} \left( \langle u^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) + \nu \frac{c_1 \langle u^2 \rangle}{2l^2} + \frac{c}{3} \frac{E^{3/2}}{l} = 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{k \sqrt{E}}{2l} \left( \langle v^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) + \nu \frac{c_1 \langle v^2 \rangle}{2l^2} + \\ & + \frac{c}{3} \frac{E^{3/2}}{l} + \alpha \frac{\sigma B^2 \langle v^2 \rangle}{\rho \langle u^2 \rangle / \langle v^2 \rangle + (\langle u^2 \rangle / \langle v^2 \rangle)^{1/2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\langle v^2 \rangle \frac{dU}{dy} + k \frac{\sqrt{E}}{l} \langle uv \rangle + \nu c_1 \frac{\langle uv \rangle}{l^2} + \alpha \frac{\sigma B^2 \langle uv \rangle}{\rho \langle u^2 \rangle / \langle v^2 \rangle + (\langle u^2 \rangle / \langle v^2 \rangle)^{1/2}} = 0 \quad (2.9)$$

Уравнения Рейнольдса (1.4) в рассматриваемом случае примут известный вид

$$\frac{d}{dy} \langle uv \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{d^2 U}{dy^2} \quad (2.10)$$

3. Из уравнений (2.7) — (2.9) можно установить связь между напряжением Рейнольдса и градиентом скорости при течении вне вязкого подслоя, т. е., пренебрегая членом, учитывающим прямое действие вязкости на крупномасштабные пульсации, в соотношении Ротта для вязкой диссипации (2.2).

Таким образом, полагая  $c_1 = 0$  и вводя согласно [3] коэффициент анизотропии потока  $\xi = \langle u^2 \rangle / \langle v^2 \rangle$ , из (2.7) — (2.9) можно получить следующую зависимость:

$$\langle uv \rangle = -\psi l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \psi &= A_1^{3/2} [\sqrt{1 + (A_2 S_l)^2} - A_2 S_l] \\ A_1 &= \frac{12}{(\xi + 2) [\xi(k/c - 1) + 5k/c - 2] c^{1/3}}, \\ A_2 &= \frac{\alpha}{\xi + \xi^{1/2}} \left( \frac{\xi(k/c - 1) + 5k/c - 2}{3(\xi + 2)} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Коэффициент  $\psi$  есть функция локального числа Стюарта

$$S_l = \frac{\sigma B^2}{\rho} \frac{1}{dU/dy}$$

а  $\xi$  неявным образом зависит от локального числа Стюарта

$$S_l = \frac{\xi + \xi^{1/2}}{\alpha} \frac{\xi(k/c - 1) - (k/c + 2)}{\sqrt{3 + 2[\xi(k/c - 1) - (k/c + 2)]/(\xi + 2)}} \quad (3.3)$$

Для того чтобы в случае отсутствия магнитного поля выражение для  $\langle uv \rangle$  (3.1) переходило в известную формулу Прандтля, необходимо потребовать  $\psi = 1$  при  $S_l = 0$ . Это накладывает на константы  $k$  и  $c$  определенную связь, а именно ( $\xi = \xi_0$  при  $B = 0$ )

$$\frac{12}{(\xi_0 + 2) [\xi_0(k/c - 1) + 5k/c - 2] c^{1/3}} = 1 \quad (3.4)$$

С другой стороны, из зависимости для  $\xi = \xi(S_l)$  (3.3) в случае  $S_l = 0$  можно получить второе соотношение для констант  $k$  и  $c$

$$\xi_0(k/c - 1) - (k/c + 2) = 0 \quad (3.5)$$

Коэффициент анизотропии  $\xi_0$  в соотношениях (3.4), (3.5) является новой эмпирической константой [3] (взамен прежних  $k$  и  $c$ ), имеющей ясный физический смысл (это — отношение  $\langle u^2 \rangle$  к  $\langle v^2 \rangle$  при отсутствии влияния вязкости и магнитного поля в условиях, когда имеется равновесие между генерацией и диссипацией энергии турбулентности).

Таким образом, для  $k$  и  $c$  из (3.4) и (3.5) можно получить следующие выражения:

$$\frac{k}{c} = \frac{\xi_0 + 2}{\xi_0 - 1}, \quad k = \left[ \frac{8}{(\xi_0 + 2)^2 (\xi_0 - 1)} \right]^{1/4} \quad (3.6)$$

из которых следует, что при значениях  $\xi_0 = 1.5 \div 3$  (соответствующих опытным данным [5, 6] в рассматриваемой области течения)  $k/c = 7 \div 2.5$ . Расчеты, проведенные в [7], по распределению пульсационных характеристик течения в трубе на основании уравнений (2.7) — (2.9) (при  $B = 0$ ) в диапазоне изменения отношения  $k/c = 10 \div 1.6$  показали, что лучшее совпадение с экспериментом имеет место при  $k/c \approx 7$ .

С учетом выражений (3.6) для  $k$  и  $c$  соотношения (3.2) и (3.3) для  $\psi$  и  $\xi(S_l)$  соответственно можно преобразовать к виду

$$\psi = \left( \frac{2\vartheta}{1 + \vartheta^{-1}} \right)^{3/2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\alpha}{\xi + \xi^{1/2}} \frac{1 + \vartheta}{\xi_0 - 1} S_l \right)^2} - \frac{\alpha}{\xi + \xi^{1/2}} \frac{1 + \vartheta}{\xi_0 - 1} S_l \right], \quad (3.7)$$

$$\vartheta = \frac{\xi_0 + 2}{\xi + 2}$$

$$S_l = \frac{\xi + \xi^{1/2}}{\alpha} \frac{\xi / \xi_0 - 1}{\sqrt{(\xi / \xi_0 + 4 / \xi_0 + 1) (\xi + \xi / \xi_0 - 2 / \xi_0)}} \quad (3.8)$$

На фиг. 2 представлена зависимость  $\psi = \psi(S_l)$  для ряда значений эмпирической константы  $\xi_0$ . Как видно, изменение  $\xi_0$  в пределах от 1.5 до 3.0 слабо влияет на вид зависимости  $\psi$  от  $S_l$ , что позволяет принять в расчетах постоянное значение  $\xi_0$ , равное 2.

Относительно длины пути смешения, входящей в выражение для напряжения Рейнольдса (3.1), в первом приближении принимается гипотеза [3], согласно которой распределение поперечного масштаба турбулентности  $l_2$  (соответствующего пути смешения  $l$ ) считается не зависящим от действия магнитного поля, но зависящим от геометрии потока, т. е.  $l_2 = l$  принимается таким же, как и в случае отсутствия магнитного поля, полагая, что размер энергонесущих вихрей (вдоль оси  $x_2 = y$ ) всегда пропорционален ширине потока (расстоянию между стенками в канале, толщине пограничного слоя).

Таким образом, имея магнитгидродинамический аналог гипотезы Прандтля (3.1) для напряжения Рейнольдса, можно вести расчет среднего течения.

4. В качестве примера рассмотрим установившееся течение проводящей жидкости в круглой трубе радиуса  $r$  в продольном магнитном поле при достаточно больших числах Рейнольдса.

Интегрируя уравнение Рейнольдса (2.10) от 0 до  $y/r$  при условии  $\tau|_{y=0} = \tau_w$  и обозначая  $\sqrt{\tau_w / \rho} = u_*$ , получаем

$$-\langle uv \rangle + \nu \frac{dU}{dy} = u_*^2 \left( 1 - \frac{y}{r} \right) \quad (4.1)$$

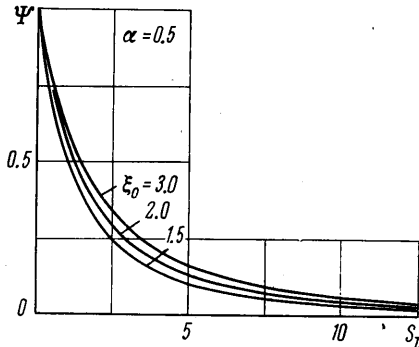
Используя для  $\langle uv \rangle$  выражение (3.1) и переходя к универсальным координатам  $\eta = yu_*/\nu$  и  $\varphi = U/u_*$ , перепишем уравнение (4.1) в виде

$$\psi l^2 R_*^2 \varphi'^2 + \varphi' = 1 - \eta / R_* \quad (4.2)$$

Здесь штрих означает производную по  $\eta$ , а  $R_* = ru_*/\nu$  — число Рейнольдса, определенное по динамической скорости и радиусу трубы.

Локальное число Стюарта, функцией которого является коэффициент  $\psi$ , в универсальных переменных примет следующий вид:

$$S_l = \left( \frac{H}{2R_*} \right)^2 \frac{1}{\varphi'}$$



Фиг. 2

Профиль скорости  $\varphi = \varphi(\eta)$  рассчитывался в предположении двухслойной модели течения, т. е. для  $\eta \leq 11.7$  принималось  $\varphi' = 1 - \eta/R_*$ , а для  $11.7 < \eta \leq R_*$  значение  $\varphi'$  отыскивалось из совместного решения уравнений (4.2), (3.7) и (3.8) методом последовательных приближений. При этом для пути смешения в уравнении (4.2) принимается формула Прандтля — Никурадзе

$$\frac{l}{R_*} = 0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{\eta}{R_*}\right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{\eta}{R_*}\right)^4 \quad (4.3)$$

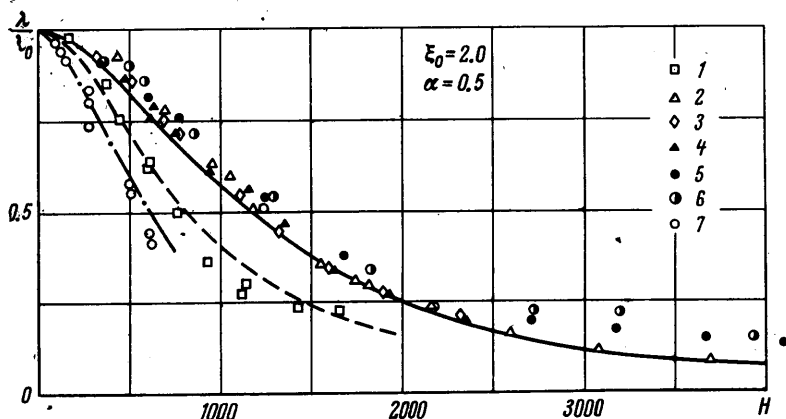
Коэффициент гидравлического сопротивления при течении в трубе равен  $\lambda = 8/\varphi_0^2$ , где

$$\varphi_0 = \frac{2}{R_*} \int_0^{R_*} \left(1 - \frac{\eta}{R_*}\right) \varphi d\eta$$

а  $R_*$  связано с числом Рейнольдса  $R = 2rU_0/\nu$  соотношением

$$R = 2\varphi_0 R_*$$

Результаты расчета коэффициента сопротивления  $\lambda$ , отнесенного к коэффициенту сопротивления  $\lambda_0$  в случае отсутствия магнитного поля, в функции числа Гартмана  $H$  представлены линиями на фиг. 3, где точками нанесены также экспериментальные данные работ [8, 9]. Точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 соответствуют значениям числа Рейнольдса  $R \cdot 10^{-4} = 3.86, 7.41, 7.51, 7.85, 8.82, 9.15, (1.9-2.1)$ ; штриховая линия соответствует  $R = 3.86 \cdot 10^4$ , сплошная —  $R = 7.85 \cdot 10^4$ , штрих-пунктир соответствует  $R = 2 \cdot 10^4$ .



Фиг. 3

Как видно из фиг. 3, совпадение результатов расчета с экспериментом в представленной области чисел Рейнольдса вполне удовлетворительное. Однако при  $R < 2 \cdot 10^4$ , где течение, вообще говоря, не имеет достаточно развитой турбулентной структуры, сравнение расчета с экспериментом показало их заметное расхождение (расчет дает завышенные значения коэффициента сопротивления). Некоторое расхождение наблюдается и при очень больших числах Гартмана, где режим течения, так же как и при малых числах Рейнольдса, близок к ламинарному. Это говорит о том, что учет влияния магнитного поля на течение проводящей жидкости только через механизм джоулевой диссипации энергии турбулентности, по-видимому, является недостаточным для того, чтобы получить предельный переход к ламинарному режиму течения, и необходимо учитывать также влияние поля на масштаб турбулентности. Однако отсутствие надежных результатов экспериментального исследования структуры турбулентности в магнитном поле, а также приемлемой физической модели влияния поля на масштаб турбулентности не позволяют сделать этого в настоящее время.

<sup>1</sup> Очевидно, что предположение о постоянстве толщины вязкого подслоя не учитывает рост его в продольном магнитном поле (поскольку  $c_1 = 0$ ). Это может привести к некоторому завышению коэффициента сопротивления при больших числах Гартмана, но не изменит качественно результатов расчета.

В заключение авторы благодарят В. М. Ивлева, И. Г. Паневина и С. А. Регирера за обсуждение работы и ценные советы, а также В. Б. Левина за любезно предоставленные таблицы результатов эксперимента.

Поступило 10 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1. М., «Наука», 1965.
2. Rotta J. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, 1. Z. Physik, 1951, Bd 129, Nr. 6, S. 547—572.
3. Иевлев В. М. Теоретическое исследование влияния магнитного поля на турбулентность потока электропроводной жидкости. Симпозиум по проблемам турбулентных течений, включая геофизические приложения. Тезисы докладов и сообщений, Киев, «Наукова думка», 1967.
4. Ковнер Д. С., Левин В. Б. О турбулентном течении электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 5.
5. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NASA Techn. Rep., 1954, No. 1174.
6. Klebanoff P. S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. NASA Techn. Notes, 1954, No. 3178.
7. Левин В. Б. К расчету основных характеристик турбулентных потоков с поперечным сдвигом. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 4.
8. Генин Л. Г., Жилин В. Г., Петухов Б. С. Экспериментальное исследование турбулентного течения ртути в круглой трубе в продольном магнитном поле. Теплофизика высоких температур, 1967, т. 5, № 2.
9. Левин В. Б., Чиненков И. А. Экспериментальное исследование турбулентного течения электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1966, № 4.