

## НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ВНУТРЕННИМ ВРАЩЕНИЕМ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

А. С. ПОПЕЛЬ

(Москва)

Модель жидкости с внутренним вращением (микрополярной жидкости) была предложена в работах [1-5], где выведены общие уравнения и приведены решения некоторых стационарных задач (уравнения, приведенные в статье [5], и стационарные решения этих уравнений [5-7] несколько отличаются от соответствующих результатов работ [1-4, 8]). Существенной особенностью этой модели является учет собственного вращения молекул жидкости или частиц, взвешенных в ней, что позволяет более детально описывать поведение жидкостей со сложной внутренней структурой, например суспензий и биологических жидкостей [5, 8].

Ниже приводятся некоторые результаты исследования задач Пуазейля и Куэтта о течении жидкости с внутренним вращением между параллельными плоскостями.

**1. Основные уравнения.** Система основных уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости при учете внутреннего вращения дополняется уравнением, вытекающим из закона сохранения момента импульса. Следуя работам [1-4], запишем уравнения неразрывности, импульсов и внутренних моментов импульсов в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, & \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p + \left( \eta + \frac{\gamma}{4} \right) \Delta \mathbf{v} + \frac{\gamma}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{f} \\ \rho I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= (\mu + \theta) \Delta \boldsymbol{\omega} + \left( \frac{\mu}{3} + \lambda - \theta \right) \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} + \gamma \left( \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right) + \rho \boldsymbol{\Phi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость внутреннего вращения;  $I$  — внутренний момент инерции единицы массы;  $\mathbf{f}$  и  $\boldsymbol{\Phi}$  — соответственно внешняя сила и момент, действующие на единицу массы жидкости;  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$  — коэффициенты вязкости. Из второго закона термодинамики следуют неравенства:  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\theta$ ,  $\lambda \geq 0$ .

Тензор вязких напряжений для жидкости с внутренним вращением не-симметричен

$$\sigma_{ij} = \eta (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) + 1/2 \gamma (\omega_k - \Omega_k) e_{ijk}$$

причем его антисимметричная часть пропорциональна разности угловых скоростей внутреннего вращения  $\boldsymbol{\omega}$  и жидкой частицы  $\boldsymbol{\Omega} = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{v}$  ( $e_{ijk}$  — единичный антисимметричный тензор).

Очевидно, что при  $\gamma \rightarrow 0$  антисимметричная часть тензора вязких напряжений исчезает, тензор становится идентичным тензору вязких напряжений в обычной гидродинамике, а уравнение импульсов переходит в уравнение Навье — Стокса.

Если носителями внутреннего момента в жидкости являются твердые шарообразные частицы, то, как было показано в работе [2], коэффициент  $\gamma$  связан с концентрацией  $c$  и радиусом частиц  $r$  соотношением  $\gamma \sim cr^3$ . Таким образом, физический смысл предельного перехода  $\gamma \rightarrow 0$  заключается здесь в переходе к пренебрежимо малым концентрациям и размерам частиц.

Граничные условия для поступательной скорости сохраняем в обычном для гидродинамики вязкой жидкости виде, а условия для вектора угловой скорости внутреннего вращения выбираем, следуя работе [3]

$$\omega_i - \omega_i^\circ = \alpha_{ij} \mu_{ij} n_k \quad (1.2)$$

В эту формулу входят следующие величины:  $\omega^\circ$  — вектор угловой скорости вращения граничной поверхности,  $\mathbf{n}$  — вектор внутренней нормали к поверхности,  $\alpha_{ij}$  — матрица, составленная из коэффициентов скольжения,  $\mu_{ij}$  — тензор моментных напряжений

$$\mu_{ij} = \mu (\nabla_j \omega_i + \nabla_i \omega_j) + (\lambda - 2/3\mu) \nabla_k \omega_k \delta_{ij} - \theta (\nabla_i \omega_j - \nabla_j \omega_i)$$

В случае изотропной границы матрица  $\alpha_{ij}$  диагональна, причем  $\alpha_{xx} = \alpha_{zz} = \varphi_0$ ,  $\alpha_{yy} = \chi_0$  (ось  $y$  направлена по нормали к поверхности). При  $\varphi_0 = \chi_0 = 0$  условие (1.2) обращается в условие прилипания, если же  $\varphi_0 = \chi_0 = \infty$ , то получается динамическое условие отсутствия моментных напряжений на поверхности.

**2. Нестационарная задача Пуазейля.** Пусть слой жидкости заключен между двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии  $2h$  друг от друга. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось  $y$  была перпендикулярна плоскостям (границам канала), а начало координат равноотстояло от них. Предположим, что искомые величины зависят лишь от координаты  $y$  и от времени, поступательная скорость направлена вдоль оси  $x$  и внешние массовые силы и моменты отсутствуют. Жидкость движется под действием постоянного градиента давления, который начинает действовать в начальный момент времени. Система уравнений (1.1) при этих предположениях преобразуется к виду

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = 2(1 - \varepsilon) + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + 2\varepsilon \frac{\partial \omega_1}{\partial \zeta}, \quad a \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \zeta^2} - m^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \omega_1 \right) \quad (2.1)$$

В эту систему введены безразмерные переменные

$$v = \frac{v_x}{U}, \quad \omega_1 = \frac{h\omega_z}{U}, \quad \zeta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{t}{T_v}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma}{4\eta + \gamma}, \quad a = \frac{T_\omega}{T_v}, \quad m^2 = \frac{T_\omega}{T_r} \quad (2.2)$$

В качестве масштаба скорости примем величину  $U = Ph^2/2\eta$ , где  $P = -\partial p / \partial x$ . В соотношения (2.2) входят три характерных времени

$$T_v = \frac{4\rho h^2}{4\eta + \gamma}, \quad T_\omega = \frac{I\rho h^2}{\mu + \theta}, \quad T_r = \frac{I\rho}{\gamma}$$

Время  $T_v$  определяет скорость диффузии импульса жидкости, время  $T_\omega$  — скорость диффузии внутреннего момента импульса и время релаксации  $T_r$  — скорость выравнивания угловых скоростей  $\omega$  и  $\Omega$ . Длительность переходного процесса зависит от соотношения между этими временами.

При отыскании решения задачи будем предполагать, что в начальный момент времени жидкость покоится и внутреннее вращение отсутствует. Применяя к уравнениям (2.1) преобразование Лапласа по времени

$$F(\zeta, p) = \int_0^\infty f(\zeta, \tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (2.3)$$

и решая преобразованные уравнения вместе с граничными условиями

$$V(\pm 1) = 0, \quad \Omega_1(\pm 1) \pm \vartheta \left. \frac{d\Omega}{d\zeta} \right|_{\pm 1} = 0 \quad \left( \vartheta = \frac{\vartheta_0(\mu + \theta)}{h} \right)$$

получаем

$$V = \frac{2(1-\varepsilon)}{p^2} \left[ 1 - \frac{v_1(p-v_2^2) \operatorname{ch} v_1 \zeta (\operatorname{sh} v_2 + \vartheta v_2 \operatorname{ch} v_2) - v_2(p-v_1^2) (\operatorname{sh} v_1 + \vartheta v_1 \operatorname{ch} v_1) \operatorname{ch} v_2 \zeta}{\Delta} \right]$$

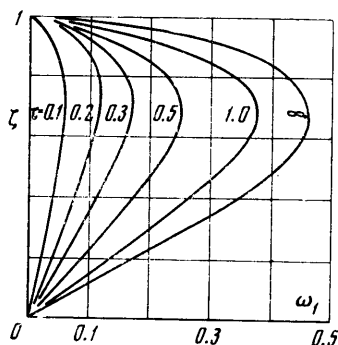
$$\Omega_1 = -\frac{m^2(1-\varepsilon)}{p\Delta} [\operatorname{sh} v_1 \zeta (\operatorname{sh} v_2 + \vartheta v_2 \operatorname{ch} v_2) - (\operatorname{sh} v_1 + \vartheta v_1 \operatorname{ch} v_1) \operatorname{sh} v_2 \zeta] \quad (2.4)$$

$$\Delta = v_1(p-v_2^2) \operatorname{ch} v_1 (\operatorname{sh} v_2 + \vartheta v_2 \operatorname{ch} v_2) - v_2(p-v_1^2) \times \\ \times (\operatorname{sh} v_1 + \vartheta v_1 \operatorname{ch} v_1) \operatorname{ch} v_2$$

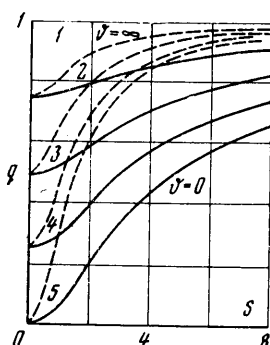
где  $v_{1,2}$  — корни характеристического уравнения

$$v^4 - [m^2(1-\varepsilon) + p(a+1)]v^2 + p(m^2 + ap) = 0$$

Оригиналы изображений (2.4) можно представить в виде интегралов Римана — Меллина, вычисление которых сводится в этом случае к суммирова-



Фиг. 1



Фиг. 2

нию вычетов подынтегральных функций в полюсах  $p = 0$  и  $p = p_n$ , где  $p_n$  — корни уравнения  $\Delta(p) = 0$ . Можно показать, что корни  $p_n$  действительны, откуда следует, что выход на стационарный режим происходит аperiodически. Практическое вычисление интегралов возможно лишь при некоторых упрощающих предположениях, например при пренебрежении влиянием внутреннего вращения на поле поступательных скоростей (что соответствует случаю  $\varepsilon = 0$ ). Решения в этом случае легко получить в виде рядов. Не выписывая их, приведем лишь графики (фиг. 1) функции  $\omega_1(\zeta, \tau)$  для различных значений  $\tau$  ( $m = 5, a = 0$ ).

**3. Установившееся течение Пуазейля.** Стационарное решение уравнений (2.1) в случае задачи Пуазейля имеет вид

$$v = 1 - \zeta^2 - \frac{2\varepsilon}{s} (1 + \vartheta) \frac{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} s \zeta}{\operatorname{sh} s + \vartheta s \operatorname{ch} s}$$

$$\omega_1 = \zeta - (1 + \vartheta) \frac{\operatorname{sh} s \zeta}{\operatorname{sh} s + \vartheta s \operatorname{ch} s}$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} \frac{dv}{d\zeta} = \zeta - \varepsilon(1 + \vartheta) \frac{\text{sh } s\zeta}{\text{sh } s + \vartheta s \text{ ch } s}$$

$$s^2 = 4h^2\eta\gamma(4\eta + \gamma)^{-1}(\mu + \vartheta)^{-1}$$

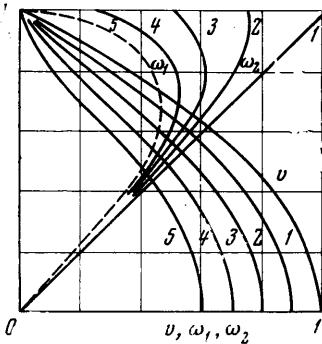
Отметим, что  $\omega_1(\zeta)$  не зависит от параметра  $\varepsilon$ . Вычислим объемный расход жидкости через сечение канала

$$q = \frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3\varepsilon}{s^2} (1 + \vartheta) \frac{s \text{ ch } s - \text{sh } s}{\text{sh } s + \vartheta s \text{ ch } s} \quad \left( Q_0 = -\frac{2h^3}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

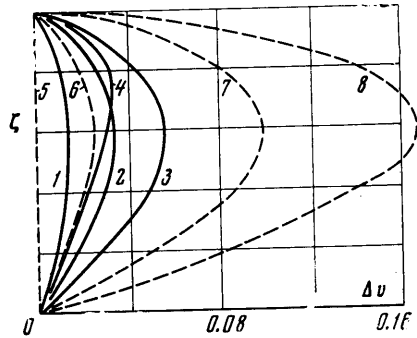
На фиг. 2 приведены графики зависимости  $q(s)$ . Кривые 1–5 соответствуют значениям  $\varepsilon = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ . Анализ формулы (3.1) приводит к следующим результатам: при  $s \ll 1$  величина расхода  $q = 1 - \varepsilon + O(s^2)$ , так что  $dq/ds = 0$  при  $s = 0$ ; если же  $s \gg 1$ , то функция  $q(s)$  представляется в виде

$$q = 1 - \frac{3\varepsilon}{s} + o\left(\frac{1}{s}\right) \quad (\vartheta = 0), \quad q = 1 - \frac{3\varepsilon}{s^2} + o\left(\frac{1}{s^2}\right) \quad (\vartheta = \infty)$$

Кажущаяся вязкость, обычно определяемая соотношением  $\eta_a = 1/q$ , падает при увеличении ширины канала ( $s \sim h$ ).



Фиг. 3



Фиг. 4

При  $\vartheta = 0$  профиль скорости  $v(\zeta)$  может иметь точку перегиба ( $\omega_2(\zeta)$  принимает в этой точке максимальное значение). Для определения положения этой точки следует решить уравнение

$$\varepsilon s \text{ ch } s\zeta^* = \text{sh } s \quad (3.2)$$

При  $\varepsilon = \varepsilon^* = \text{th } s/s$  точка перегиба находится на границе канала. Если  $\varepsilon^* \leq \varepsilon \leq 1$ , то  $\zeta^* \leq 1$  и точка перегиба действительно существует. Если же  $\varepsilon < \varepsilon^*$ , то на профиле скорости точек перегиба нет (решение уравнения (3.2) удовлетворяет неравенству  $\zeta^* > 1$ ) (фиг. 3). Кривые 1–5 соответствуют значениям  $s = 5, \varepsilon = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ .

При больших значениях  $s$  функции  $\omega_2(\zeta)$  и  $\omega_1(\zeta)$  различаются лишь в тонком пограничном слое.

В отличие от предыдущего при  $\vartheta = \infty$  профиль скорости не имеет точек перегиба. В этом случае  $\omega_2(1) = 1 - \varepsilon \text{th } s/s, \omega_1(1) = 1 - \text{th } s/s$  и  $\omega_2 \rightarrow \zeta, \omega_1 \rightarrow \zeta$  равномерно относительно  $\zeta$  при  $s \rightarrow \infty$ , так что пограничный слой не возникает.

При  $s \ll 1$  (независимо от значения  $\vartheta$ ) выполняются равенства

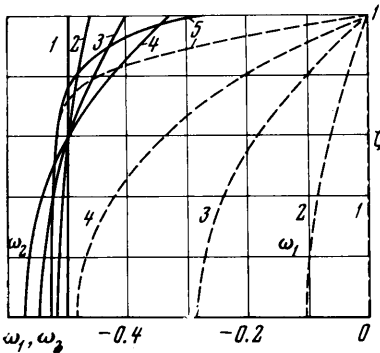
$$v = (1 - \varepsilon)(1 - \zeta^2) + O(s^2), \quad \omega_1 = O(s^2)$$

Рассмотрим эффективную локальную вязкость жидкости, определенную соотношением

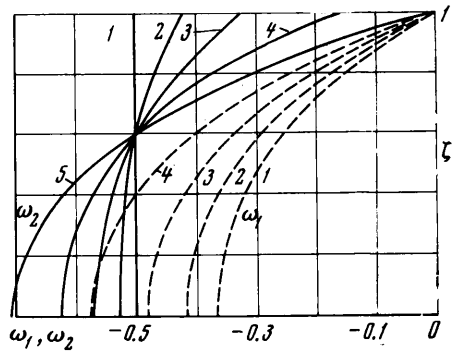
$$\eta^* = \frac{\sigma_{xy}}{\eta dv_x/dy} = \frac{\zeta}{\omega_2}$$

Из приведенных на фиг. 3 графиков функции  $\omega_2(\zeta)$  следует, что величина  $\eta^*$  монотонно возрастает на отрезке  $[0, 1]$ .

В работах [5, 8] имеются указания на то, что модель жидкости с внутренним вращением применима к описанию движения суспензий и, в частности, крови. Однако эта теория не описывает эффектов миграции частиц, имеющих большое значение при течении суспензий. При вискозиметрических исследованиях крови было обнаруже-



Фиг. 5



Фиг. 6

но падение величины кажущейся вязкости  $\eta^*$  вблизи оси и стенки канала (максимум  $\eta^*$  при различных условиях опыта находился в пределах  $1/2 < \zeta < 2/3$ ) [9]. Таким образом, поведение вычисленной величины  $\eta^*(\zeta)$  при малых  $\zeta$  действительно находится в согласии с экспериментом [9]. Падение же величины  $\eta^*$  у стенки канала объясняется, по-видимому, миграцией частиц (эритроцитов) от стенки и данной теорией не описывается.

**4. Антисимметричное течение Куэтта.** Пусть градиент давления отсутствует, а жидкость двигается за счет движения граничных плоскостей в противоположные стороны с равными постоянными скоростями  $U$ . Выбирая скорость  $U$  в качестве масштаба скорости в соотношениях (2.2), запишем стационарное решение уравнений (2.1) для этого случая

$$v = \frac{\zeta s (\operatorname{ch} s + \vartheta s \operatorname{sh} s) - \varepsilon \operatorname{sh} s \zeta}{s (\operatorname{ch} s + \vartheta s \operatorname{sh} s) - \varepsilon \operatorname{sh} s} \quad (4.1)$$

$$\omega_1 = -\frac{s (\operatorname{ch} s + \vartheta s \operatorname{sh} s) - \operatorname{ch} s \zeta}{2 s (\operatorname{ch} s + \vartheta s \operatorname{sh} s) - \varepsilon \operatorname{sh} s}, \quad \omega_2 = -\frac{s (\operatorname{ch} s + \vartheta s \operatorname{sh} s) - \varepsilon \operatorname{ch} s \zeta}{2 s (\operatorname{ch} s + \vartheta s \operatorname{sh} s) - \varepsilon \operatorname{sh} s}$$

Если на стенках канала исчезают моментные напряжения ( $\vartheta = \infty$ ), то  $v = \zeta$ ,  $\omega_2 = \omega_1 = -1/2$ , т. е. распределение скоростей такое же, как в течении Куэтта обычной вязкой жидкости. Заметим, что антисимметричная часть тензора вязких напряжений тождественно равна нулю.

Если на стенках канала обращается в нуль величина угловой скорости внутреннего вращения ( $\vartheta = 0$ ), то  $v \geq \zeta$ ,  $\omega_2 \leq \omega_1 \leq 0$ . Исследуем функцию  $\Delta v = v - \zeta$  (фиг. 4). ( $\varepsilon = 0, 5, 1, s = 0, 5, 2, s = 1, 3, s = 2, 4, s = 10; s = 2, 5, \varepsilon = 0, 6, \varepsilon = 0, 25, 7, \varepsilon = 0, 75, 8, \varepsilon = 1$ ). Точка  $\zeta^*$ , в которой  $\Delta v$  достигает максимального значения, определяется из уравнения

$$s \operatorname{ch} s \zeta^* = \operatorname{sh} s$$

Справедливы оценки

$$\zeta^* = 1 - s^{-1} \ln s + o(s^{-1} \ln s) \quad (s \gg 1), \quad \zeta^* = 1/\sqrt{3} + O(s^2) \quad (s \ll 1)$$

На фиг. 5 видно, что при больших значениях  $s$  функции  $\omega_2$  и  $\omega_1$  меняются лишь в узкой области вблизи стенок канала, вне которой  $\omega_2 \approx \omega_1 \approx \text{const}$ . Таким образом, у стенок образуется своеобразный пограничный слой. Отметим, что  $v(\zeta) \rightarrow \zeta$  равномерно относительно  $\zeta$  при  $s \rightarrow \infty$ , так что пограничный слой в обычном понимании здесь отсутствует. Если  $\varepsilon \rightarrow 1$ , то, как следует из формул (4.1),  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ , и тогда решения наиболее сильно отличаются от соответствующих решений задач обычной гидродинамики (фиг. 6). (Фиг. 5,  $\varepsilon = 0$ ; 1.  $s = 0$ ; 2.  $s = 0,5$ ; 3.  $s = 1$ ; 4.  $s = 2,5$ ; 5.  $s = 10$ . Фиг. 6.  $s = 2$ ; 1.  $\varepsilon = 0$ ; 2.  $\varepsilon = 0,25$ ; 3.  $\varepsilon = 0,5$ ; 4.  $\varepsilon = 0,75$ ; 5.  $\varepsilon = 1$ .)

Эффективная локальная вязкость, для случая течения Куэтта равная  $\eta^* = -\frac{1}{2}\omega_2$ , не постоянна по сечению канала, а резко возрастает вблизи стенок.

Автор благодарит Г. А. Любимова и С. А. Регирера за критические замечания.

Поступило 8 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. Statistical mechanics, thermodynamics and fluid dynamics of systems with an arbitrary number of integrals. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1952, vol. 5, No. 4.
2. Шлиомис М. И. К гидродинамике жидкости с внутренним вращением. *ЖЭТФ*, 1966, т. 51, № 1.
3. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметричная гидромеханика. *ПММ*, 1965, т. 29, вып. 2.
4. Condiff D. W., Dahler J. S. Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7, No. 6.
5. Eringen A. C. Theory of micropolar fluids. *J. Math. and Mech.*, 1966, vol. 16, No. 1.
6. Ariman T., Cakmak A. S. Couple stresses in fluids. *Phys. Fluids*, 1967, vol. 10, No. 11.
7. Rajagopalan R. Some flow problems in micropolar fluids. *J. Indian Inst. Sci.*, 1968, vol. 50, No. 2.
8. Kline K. A., Allen S. J., De Silva C. N. A continuum approach to blood flow. *Biorheology*, 1968, vol. 5, No. 2.
9. Bugliarello G., Hayden J. W. Detailed characteristics of the flow of blood in vitro. *Trans. Soc. Rheology, New York—London, Intersci. Publ.* 1963, vol. 7, pp. 209—230.