

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Г. Ф. ШАЙДУРОВ, М. И. ШЛИОМИС, Г. В. ЯСТРЕБОВ

(Пермь)

Физическая система может находиться в термодинамическом равновесии, участвуя как целое в равномерном вращательном движении [1]. В частности, возможно механическое равновесие жидкости в полости, вращающейся вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью Ω («твердое» вращение жидкости). Если жидкость однородна по составу и изотермична, то такое равновесие, как показано в [2], устойчиво при всех Ω . В случае же неравномерно нагретой жидкости устойчивость твердого вращения, вообще говоря, невозможна.

С равномерным вращением связано появление двух стационарных силовых полей: центробежного поля и поля сил Кориолиса. Первое из них заставляет элементы жидкости менее нагретые и, в меру этого, более плотные удаляться от оси вращения, вытесняя менее плотные слои жидкости (центрифугирование). Если поддерживать в жидкости градиент температуры, препятствующий установлению равновесной стратификации плотности, то при подходящем значении этого градиента (величина его, разумеется, зависит от Ω) в жидкости возникнут незатухающие течения — конвекция. Таким образом, если в обычной, гравитационной конвекции причиной появления архимедовых подъемных сил служит поле тяжести, то во вращающейся полости перемешивание неравномерно нагретой жидкости обеспечивается центробежным полем. Как только возникают конвективные течения, вступают в действие силы Кориолиса. Учет последних, как показано ниже, не позволяет свести тривиальным образом исследование конвективной устойчивости вращающейся жидкости к хорошо изученным задачам гравитационной конвекции.

1. Пусть жидкость, плотность которой

$$\rho = \rho_0(1 - \beta T) \quad (1.1)$$

заполняет полость, вращающуюся с постоянной угловой скоростью

$$\Omega = \Omega \gamma, \quad \gamma^2 = 1 \quad (1.2)$$

Если температура T , отсчитываемая от условного нуля, неоднородна по объему жидкости, то в полости, вообще говоря, возникнет движение. В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью Ω , уравнения конвекции имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla \left(p - \frac{\rho_0 \Omega^2 r^2}{2} \right) + \mathbf{v} \nabla^2 \mathbf{v} - r \Omega^2 \beta T \mathbf{n} + 2\Omega (\mathbf{v} \times \gamma) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \nabla^2 T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость жидкости относительно границ полости, p — давление, \mathbf{n} — единичный вектор вдоль цилиндрической координаты r , отсчитываемой от оси вращения. Два последних члена в первом уравнении, будучи умноженными на ρ_0 , дают плотность подъемной (архимедовой) силы в центробежном поле и плотность силы Кориолиса.

Из уравнений (1.3) легко видеть, что в состоянии стационарного равновесия ($\mathbf{v} = 0$ и все величины не зависят от времени) температура T_0 и давление p_0 удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 T_0 = 0, \quad \nabla T_0 \times \gamma = 0, \quad \nabla p_0 = \rho \Omega^2 r \mathbf{n} \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что в равновесии градиенты температуры и плотности перпендикулярны к оси вращения, а центробежное давление уравновешено гидростатическим.

Исследуем устойчивость равновесия тонкого цилиндрического слоя жидкости, ограниченного твердыми поверхностями радиусов r_1 и r_2 ($r_2 - r_1 = \delta \ll r_1$). Равновесный перепад температур между границами слоя $\theta = T_2 - T_1 > 0$. Обе цилиндрические поверхности вращаются с одинаковой угловой скоростью (1.2) около общей оси симметрии (ось z ; единичный вектор γ направлен вдоль этой оси). В поле тяжести g применимость уравнений (1.3) к рассматриваемой задаче ограничена случаем больших центробежных ускорений

$$r_1 \Omega^2 \gg g \quad (1.5)$$

При выполнении обратного неравенства в правую часть уравнения (1.3.1) нужно включить $-g\beta T$ и опустить квадратичные по Ω члены. Кориолисовы силы линейны по Ω и должны быть сохранены. Влияние сил Кориолиса на гравитационную конвекцию рассмотрено в работах [3, 4].

Из уравнения (1.4.1) определяется равновесный градиент температуры в тонком слое жидкости

$$\nabla T_0 = \frac{\theta}{\delta} \mathbf{n} \quad (\delta \ll r_1) \quad (1.6)$$

Выберем единицы расстояния δ , скорости v/δ , температуры $v\theta/\chi$ и давления $\rho_0 v^2/\delta^2$. Линеаризуя систему (1.3), запишем в безразмерной форме уравнения для критических возмущений

$$0 = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} - R T \mathbf{n} + D(\mathbf{v} \times \gamma), \quad 0 = \nabla^2 T - \mathbf{n} \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (1.7)$$

$$(R = r_1 \Omega^2 \beta \theta \delta^3 / \nu \chi, \quad D = 2\Omega \delta^2 / \nu)$$

В уравнения входят два безразмерных параметра: числа Рэлея R и Тейлора D^2 . Заметим, что оба параметра содержат угловую скорость вращения. Связано это с тем, что Ω входит в выражения для сил Архимеда и Кориолиса и, тем самым, играет двойную роль. С одной стороны, вращение является причиной центробежных сил, без которых конвекция была бы невозможна, с другой стороны, возникающие при вращении кориолисовы силы влияют на структуру критических возмущений, что приводит в конечном счете к повышению устойчивости.

2. Периодическое по φ и z решение уравнений конвекции (1.7) ищется в виде

$$v_r = v(r) e^{im\varphi} e^{ikhz}, \quad v_\varphi = u(r) e^{im\varphi} e^{ikhz}, \quad v_z = w(r) e^{im\varphi} e^{ikhz} \\ p = p(r) e^{im\varphi} e^{ikhz}, \quad T = \tau(r) e^{im\varphi} e^{ikhz} \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в уравнения (1.7) и исключая p и w , получаем

$$L^2 v + is D v' + a^2 R \tau - a^2 D u = 0 \\ a^2 L u - k^2 D v - is L v' = 0, \quad L \tau - v = 0 \quad (2.2)$$

$$(L \equiv d^2/dr^2 - a^2, \quad a^2 \equiv s^2 + k^2, \quad s \equiv m\delta/r_1)$$

При записи этих уравнений существенным образом использована тонкость слоя жидкости. В частности, члены типа $1/r$, стоявшие в точных уравнениях рядом с $d(\cdot)/dr$, всюду опущены, так как отношение их порядка $\delta/r_1 \ll 1$.

На твердых границах слоя должны исчезать возмущения скорости. С учетом (1.7.3) имеем

$$v = v' = u = 0 \quad \text{при } r = r_1, r = r_2 \quad (2.3)$$

Укажем точное решение уравнений (2.2) для случая, когда поверхности слоя жидкости поддерживаются при постоянных температурах, т. е. на гра-

ницах слоя $\tau = 0$. В этом случае удобно исключить из системы (2.2) u и τ , что приводит к уравнению шестого порядка для радиальной компоненты скорости

$$L^3 v + a^2 F v = 0, \quad F \equiv R - (k^2 / a^2) D^2 \quad (2.4)$$

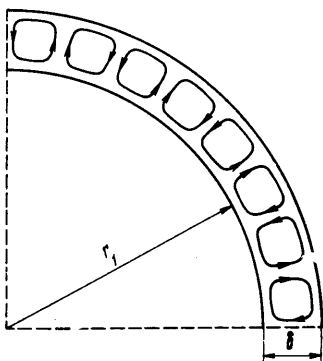
Решение этого уравнения должно удовлетворять условиям

$$v = v' = L^2 v = 0 \quad (2.5)$$

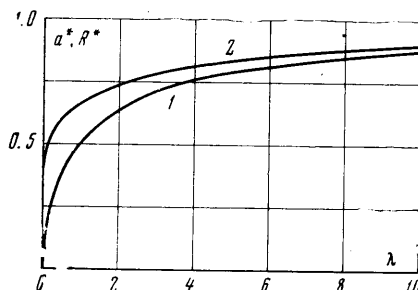
на границах слоя жидкости. Последнее условие следует из уравнения (2.2.1). Собственные числа $F(a^2)$ краевой задачи (2.4), (2.5) определяют связь между параметрами R и D при фиксированных значениях a и k

$$R = F(a^2) + (k^2 / a^2) D^2 \quad (2.6)$$

Минимизация функции $R(a^2, k^2)$ позволяет определить нижнее пороговое значение числа Рэлея R_0 и вид критического возмущения, срывающего устойчивость твердого вращения. Как видно из (2.6), минимальное $R = R_0$ достигается при $k = 0$ и не



Фиг. 1



Фиг. 2

зависит от D . Нахождение величины R_0 сводится, таким образом, к отысканию минимума функции $F(a^2)$. В таком исследовании нет, однако, необходимости, поскольку при $k = 0$ рассматриваемая краевая задача совпадает с задачей об устойчивости равновесия подогреваемого снизу плоского горизонтального слоя жидкости в поле тяжести [5]. Пользуясь результатами работы [5], имеем $R_0 = 1708$, $a_0 = 3.13$. Основное критическое движение представляет собой систему рулонов (плоских валов), заполняющих цилиндрический слой и ориентированных вдоль оси вращения (Фиг. 1). На этой фигуре приведен поперечный разрез цилиндрического слоя, показаны линии тока основного критического движения.

Число рулонов равно $2m = 2a_0 r_1 / \delta$. Поскольку a_0 близко к π , то ширина каждого рулона близка к толщине слоя δ .

Заметим, что аналогичного вида движение возникает в плоском слое проводящей жидкости, подогреваемой снизу в продольном магнитном поле [6]. Как и силы Кориолиса в рассматриваемой задаче, продольное поле не влияет на устойчивость (пороговое число Рэлея не зависит от напряженности поля), но изменяет форму критического движения: вместо обычных конвективных ячеек Бенара возникают валы, вытянутые по полю.

Критическое число Рэлея не зависит от числа Тейлора и тогда, когда границы слоя теплоизолированы ($\tau' = 0$). В этом случае точное решение дает $R_0 = 720$, $a_0 = 0$.

Указанные два точных решения соответствуют двум предельным случаям, когда возмущения температуры либо полностью затухают на границах слоя ($\tau = 0$), либо не затухают вовсе ($\tau' = 0$). В промежуточных случаях граничные условия для температуры можно представить в виде

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = -\lambda \tau \quad (\infty \geq \lambda \geq 0) \quad (2.7)$$

Здесь дифференцирование производится по направлению внешней нормали к поверхностям слоя жидкости. Параметр λ характеризует быстроту затухания возмущений температуры на границах слоя. При $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$ условие (2.7) переходит в рассмотренные выше предельные случаи граничных условий $\tau = 0$ и $\tau' = 0$.

Решение краевой задачи (2.2), (2.3), (2.7) проводилось методом Бубнова — Галеркина. В качестве аппроксимирующих функций были взяты

$$\begin{aligned} v &= c_1 x^2 (1-x)^2, & u &= c_2 x (1-x) \\ \tau &= c_3 [1 + \lambda x (1-x)] \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Начало отсчета безразмерной координаты x выбрано на внутренней поверхности слоя. Стандартная процедура решения приводит к системе трех алгебраических уравнений для амплитуд c_i , условие разрешимости которой дает

$$\begin{aligned} R &= F(a^2, \lambda) + \frac{k^2}{a^2} G(a^2, \lambda) D^2 \\ F &= \frac{28(504 + 24a^2 + a^4)B}{3a^2}, & G &= \frac{9B}{10 + a^2} \\ B &= \frac{10\lambda(6 + \lambda) + a^2(30 + 10\lambda + \lambda^2)}{(14 + 3\lambda)^2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отсюда видно, что критическое значение R_0 по-прежнему соответствует $k = 0$ и не зависит от D .

Результаты расчета, проведенного по формуле

$$R_0(\lambda) = \min F(a^2, \lambda) \quad (2.10)$$

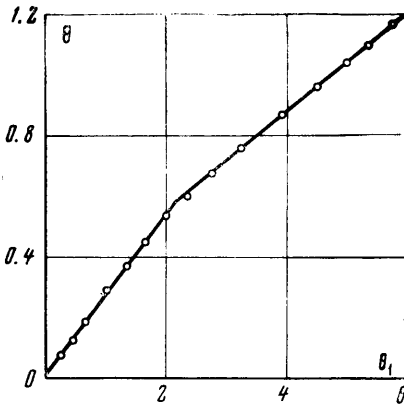
представлены на фиг. 2, где по оси ординат отложены: $a^* = a_0^2(\lambda) / a_0^2(\infty)$, $R^* = R_0(\lambda) / R_0(\infty)$.

Для предельных значений λ получается $a_0(\infty) = 3.12$, $R_0(\infty) = 1748$ и $R_0(0) = 720$. Сравнивая это с точным решением, заключаем, что ошибка в определении R_0 , связанная с приближенным характером решения (2.8), не превышает 2.5% во всем интервале значений λ .

Число Тейлора входит в выражения (2.6) и (2.9) для критического числа Рэлея в комбинации $(kD)^2$, где k — волновое число, определяющее длину волны возмущения вдоль оси цилиндров. Основное критическое движение с $k = 0$ может реализоваться лишь в цилиндрическом слое бесконечной длины. В слое ограниченной длины h длина волны возмущения $2l$ не может превышать удвоенной длины слоя. Если на торцах слоя имеются узлы скорости, то на длине цилиндра должно укладываться в общем случае целое число полуволн. Это требование приводит к дискретному спектру значений k .

Однако с увеличением k критические R быстро растут, поэтому в эксперименте следует ожидать реализации лишь начального участка спектра k . Так как $l \lesssim h$, то $k = \pi \delta / l \gtrsim \pi \delta / h$. Учитывая, что $a \sim \lambda$, для тонкого слоя $\delta \ll h$ получаем $k \ll a$. При не слишком больших значениях D можно не учитывать член с $(kD)^2$ при минимизации правой части выражения (2.9). Получающиеся тогда $R_0(\lambda)$ и $a_0(\lambda)$ (фиг. 2) не зависят от D , так что определяемое формулой (2.9) критическое число Рэлея R растет линейно с числом Тейлора D^2 . При больших значениях D рост R замедляется, и при $D \rightarrow \infty$ минимизация полного выражения (2.9) дает $a_0^2 \sim (kD)^{2/3}$, $R \sim (kD)^{1/3}$.

3. Эксперименты проводились с дистиллированной водой, заполняющей цилиндрическую щель длиной в 100 или 50 мм между двумя коаксиальными полыми цилиндрами, выполненными из плексигласа. Цилиндры жестко связаны друг с другом и образуют вращающуюся часть (ротор) установки. Толщина слоя жидкости $\delta = 1.42$ мм, внутренний радиус $r_1 = 27.5$ мм. Скорость равномерного вращения ротора измерялась строботаксиметром СТ-МЭИ и могла изменяться в пределах 1300—5000 об/мин. При таких скоростях центростремительное ускорение изменялось от 55g до 800g, так что условие (1.5) хорошо выполнялось. Разность температур на границах слоя жидкости измерялась термопарой из 12 тонких медно-константановых термопар, спаи которых располагались на стенках слоя по окружности на одинаковых расстояниях друг от друга. Термопарами измерялся также радиальный перепад температур в стенках ротора. Провода всех термопар клеивались вровень со стенками в канавки вдоль образующих цилиндров и подводились к щеточному токосъемнику. Радиальный проток тепла через стенки ротора создавался неподвижными нагревателем и холодильником. Последние представляли собой водяные рубашки в форме полых коаксиальных цилиндров, между которыми вращался ротор. Нагреватель и холодильник питались от двух струйных ультратермостатов. Каждый из термостатов был



Фиг. 3

снабжен автоматическим программным устройством, позволявшим плавно изменять температуру термостатирующей жидкости.

В начале опыта во вращающемся роторе создавался стационарный радиальный перепад температуры, заведомо превышавший критический. Затем эта разность температур медленно уменьшалась до нуля по заданной программе, обеспечивавшей квазистационарность процесса. При помощи фотоэлектрического пирометра Курнакова ФПК-59 автоматически записывались изменения во времени разности температур θ на границах слоя жидкости и радиального перепада температуры θ_1 в стенках ротора. Путем обмера фотозаписей строились графики $\theta = f(\theta_1)$; на фиг. 3 приведен один из таких графиков. Результаты получены при вертикальном расположении ротора, $\Omega = 1850$ об/мин, $h = 50$ мм. Критическая разность температур на границах слоя определялась по излому кривой, вызванному изменением режима теплопередачи после прекращения конвекции.

Экспериментальные точки, полученные при различных значениях Ω и h , группируются на плоскости D^2R около трех прямых, расходящихся веером (фиг. 4). Прямые рассчитаны по формуле (3.2) и соответствуют следующим значениям l : 1 — 2, 2 — 2.5, 3 — 3.33 см. Продолжения всех прямых пересекаются между собой и с осью R в точке $R_0 = 1460 \pm 50$. По формуле (2.10) такой величине R_0 соответствуют $\lambda = 5$, $a_0 = 2.78$. Подставляя эти значения в (2.9), имеем

$$R = 1460 + 0.106k^2D^2 \quad (3.1)$$

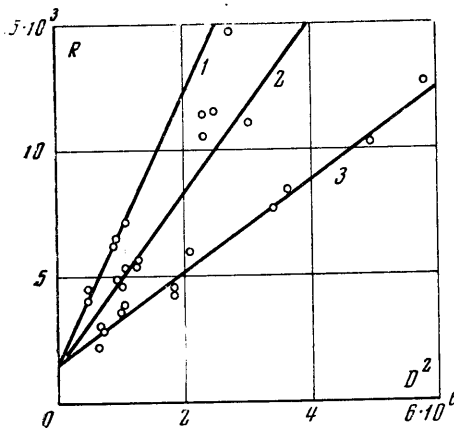
В целях сравнения с экспериментом последнюю формулу удобно представить в виде

$$R = 1460 + \frac{0.0210}{l^2} D^2 \quad (3.2)$$

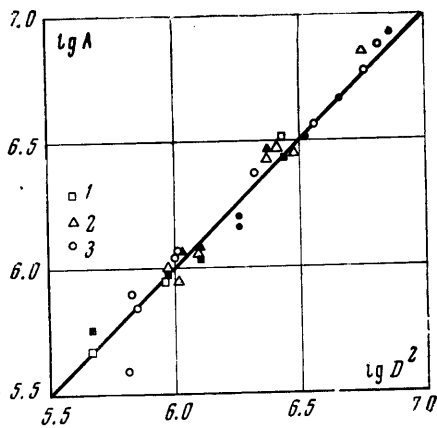
где $2l$ — длина волны возмущения в сантиметрах. Как указывалось выше, отношение h/l должно быть целым числом. Сравнение экспериментальных кривых с теоретическими (кривые 1, 2, 3), построенными по формуле (3.2), позволяет заключить, что в опытах реализовались критические движения с $l = 2, 2.5$ и 3.33 см при $h = 10$ см, и с $l = 2.5$ см при $h = 5$ см. Наиболее крупномасштабные из возможных движений ($l \approx h$), соответствующие минимальному R , в опытах не осуществлялись. Возможной причиной этого являлось возмущение температурного поля в слое жидкости спаями термопары. Последние располагались на расстоянии $2/5h$ от торца слоя.

На фиг. 5 изображена в логарифмическом масштабе теоретическая прямая $A = D^2$, где $A = l^2(R - 1460) / 0.021$. На том же графике нанесены экспериментальные точки 1, 2, 3, сопоставленные со значениями $l = 2, 2.5, 3.33$ см. Результаты измерений, полученные при горизонтальном расположении ротора, отмечены светлыми знаками, а при вертикальном — темными. Удовлетворительное согласие расчетных и

опытных данных свидетельствует о правильности сделанного сопоставления. Одной из причин разброса экспериментальных точек является несовпадение гидродинамических границ конвективных ячеек с твердыми торцевыми поверхностями: на торцах слоя нарушаются условия периодизма, принятые при расчетах. Другая возможная причина разброса — появление ячеек неодинаковой длины из-за возмущающего влияния термобатарен.



Фиг. 4



Фиг. 5

Следует особо подчеркнуть, что эксперименты проводились с цилиндрическим слоем, длина которого была во много раз больше толщины: $h/\delta \approx 70$. Казалось бы, что в таком тонком слое концевые эффекты не должны быть существенны. Однако из-за сильной зависимости критического числа Рейлея от волнового числа k влияние торцов слоя вышло определяющим. Насколько нам известно, столь важная роль продольных размеров для геометрически тонких слоев жидкости ($\delta \ll h$) до сих пор не отмечалась.

В заключение заметим, что размерные эффекты должны быть существенны и в целом ряде аналогичных задач; например, при исследовании конвективной устойчивости горизонтального слоя проводящей жидкости в продольном магнитном поле.

Поступило 2 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5. Статистическая физика, §§ 10, 26, М., «Наука», 1964.
2. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критических чисел Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
3. Chandrasekhar S. The instability of a layer of fluid heated below and subject to Coriolis forces. 1. Proc. Roy. Soc. A, 1953, vol. 217, No. 1130.
4. Шлиомис М. И. Об устойчивости вращающейся и подогреваемой снизу жидкости относительно периодических по времени возмущений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
5. Pellew A., Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc. A, 1940, vol. 175, No. 3.
6. Chandrasekhar S. On the inhibition of convection by a magnetic field. Philos. Mag., 1952, vol. 43, No. 340.