

## ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР В ВИХРЕВОМ ПОТОКЕ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. ХОЛЯВКО

(Харьков)

Рассматривается обтекание эллиптического контура плоскопараллельным невязким потоком, в котором из-за неравномерности профиля скоростей далеко перед телом существует завихренность. При малом параметре завихренности профиль скоростей будет параболическим. В отличие от работ [1] и [2] предполагается существование дополнительного циркуляционного течения вокруг контура. Величина циркуляции этого течения определяется из условия схода потока с задней кромки тела (аналог постулата Чаплыгина — Жуковского в потенциальном течении).

Полученные в работе результаты могут быть использованы, в частности, для оценки обтекания плоского тела в следе за другим телом.

1. Задача об обтекании плоского тела вихревым потоком невязкой жидкости в общем случае приводится к решению уравнения для функции тока

$$\Delta \psi = f(\psi) \quad (1.1)$$

при заданном течении невозмущенного потока, определяемом выбором функции  $f(\psi)$ , и граничном условии на поверхности тела

$$\psi = M = \text{const} \quad \text{на контуре } C \quad (1.2)$$

Пусть правая часть уравнения (1.1) задана в следующем виде:  $f(\psi) = k^2\psi$ , где  $k$  — действительная величина. В этом случае общее решение (1.1) можно представить как сумму двух функций тока  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , где первое слагаемое  $\psi_1$  характеризует течение невозмущенного потока, а второе  $\psi_2$  — дополнительное течение, вызванное присутствием тела.

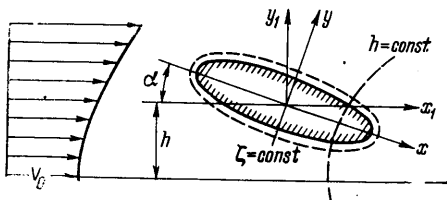
Если предположить, что течение невозмущенного потока происходит вдоль оси  $ox_1$ , а неравномерность имеет место в направлении, перпендикулярном движению (вдоль оси  $y_1$ ), то функция тока  $\psi_1(y_1)$  и скорость  $v_1(y_1)$  невозмущенного потока определяются из соотношений

$$\frac{d^2\psi_1}{dy_1^2} = k^2\psi_1, \quad v_1(y_1) = \frac{d\psi_1}{dy_1} \quad (1.3)$$

Возьмем частное решение (1.3), которое дает распределение скоростей в набегающем потоке по закону гиперболического косинуса (фиг. 1)

$$\psi_1(y_1) = \frac{v_0}{k} \text{sh}[k(y_1 + h)], \quad v_1(y_1) = v_0 \text{ch}[k(y_1 + h)] \quad (1.4)$$

Для определения функции тока  $\psi_2$  запишем уравнение (1.1) в эллиптической системе координат  $(\zeta, \eta)$ , связанной с прямоугольными координатами



Фиг. 1

$(x_1, y_1)$  и  $(x, y)$  следующими соотношениями (фиг. 1):

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \zeta \cos \eta, & y &= c \operatorname{sh} \zeta \sin \eta \\ x_1 &= y \sin \alpha + x \cos \alpha, & y_1 &= y \cos \alpha + x \sin \alpha \\ (\zeta_0 \leq \zeta \leq \infty, & & 0 \leq \eta \leq 2\pi) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Значение  $\zeta = \zeta_0$  соответствует заданному эллиптическому контуру, большая и малая полуоси которого определяются как

$$a = c \operatorname{ch} \zeta_0, \quad b = c \operatorname{sh} \zeta_0, \quad c^2 = a^2 - b^2$$

Уравнение (1.1) для функции тока  $\psi_2$  в переменных  $(\zeta, \eta)$  записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} = 2q (\operatorname{ch} 2\zeta - \cos 2\eta) \psi_2 \quad (1.6)$$

где  $q = 1/4 k^2 c^2$  — параметр, определяющий завихренность.

Рассмотрим частное решение уравнения (1.6) в виде произведения  $\psi_2(\zeta, \eta) = \Phi(\zeta)F(\eta)$ . В этом случае уравнение (1.6) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$d^2\Phi/d\zeta^2 - (a + 2q \operatorname{ch} 2\zeta)\Phi = 0, \quad \frac{d^2F}{d\eta^2} + (a + 2q \cos 2\eta)F = 0 \quad (1.7)$$

где  $a$  — постоянная разделения. Уравнения (1.7) представляют собой уравнения Матье [3]. Общее решение для функции тока  $\psi_2(\zeta, \eta)$  с использованием решения уравнений (1.7) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_2(\zeta, \eta) = \frac{v_0}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_n \frac{\operatorname{Fek}_n(\zeta, -q)}{\operatorname{Fek}_n(\zeta_0, -q)} \operatorname{ce}_n(\eta, -q) + \right. \\ \left. + D_n \frac{\operatorname{Gek}_n(\zeta, -q)}{\operatorname{Gek}_n(\zeta_0, -q)} \operatorname{se}_n(\eta, -q) \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь и ниже используются обозначения и нормирование функций Матье по монографии [3].

Если воспользоваться асимптотическим разложением обычных и модифицированных функций Матье при  $q \rightarrow 0$ , то из (1.8) получается решение для случая обтекания эллиптического контура чисто потенциальным потоком

$$\psi_2(\zeta, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\zeta} (A_n \cos n\eta + B_n \sin n\eta) + C\zeta$$

Это решение следует также непосредственно из уравнений (1.7) при  $q = 0$  и  $a = n^2$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Произвольные постоянные  $C_n$  и  $D_n$  решения (1.8) определяются из граничного условия (1.2). Прежде чем воспользоваться этим условием, запишем функцию тока  $\psi_1(y_1)$  с помощью соотношений (1.5) в эллиптических координатах  $\psi_1(\zeta, \eta)$  и проведем разложение значений этой функции на

контуре  $\zeta = \zeta_0$  в тригонометрический ряд

$$\psi_1(\zeta_0, \eta) = \frac{v_0}{k} \sum_{m=0}^{\infty} [A_m(\zeta_0) \cos m\eta + B_m(\zeta_0) \sin m\eta] \quad (1.9)$$

где

$$A_0(\zeta_0) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{v_0} \int_0^{\pi} \psi_1(\zeta_0, \eta) d\eta, \quad A_m(\zeta_0) = \frac{2}{\pi} \frac{k}{v_0} \int_0^{\pi} \psi_1(\zeta_0, \eta) \cos m\eta d\eta$$

$$B_0(\zeta_0) = 0, \quad B_m(\zeta_0) = \frac{2}{\pi} \frac{k}{v_0} \int_0^{\pi} \psi_1(\zeta_0, \eta) \sin m\eta d\eta$$

С учетом (1.9) граничное условие на поверхности цилиндра  $\zeta = \zeta_0$  записывается

$$\sum_{m=0}^{\infty} [A_m(\zeta_0) \cos m\eta + B_m(\zeta_0) \sin m\eta] + \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \operatorname{ce}_n(\eta, -q) + D_n \operatorname{se}_n(\eta, -q)] = \frac{k}{v_0} M = r$$

Используя ортогональность функции Матье [3], получаем уравнения для определения  $C_n$  и  $D_n$

$$\begin{aligned} C_{2n} + (-1)^n \left[ 2A_0 A_0^{(2n)} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_{2m} A_{2m}^{(2n)} \right] &= 2(-1)^n r A_0^{(2n)} \\ C_{2n+1} + (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m+1} B_{2m+1}^{(2n+1)} &= 0 \\ D_{2n+2} + (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m B_{2m+2} B_{2m+2}^{(2n+2)} &= 0 \\ D_{2n+1} + (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m B_{2m+1} A_{2m+1}^{(2n+1)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $A_m^{(n)}$  и  $B_m^{(n)}$  — коэффициенты функций Матье, зависящие от  $q$ .

Постоянные  $C_{2n}$  с четным индексом вычисляются через неизвестную  $r$ . Для определения  $r$  найдем значение циркуляции на поверхности цилиндра  $\zeta = \zeta_0$  от дополнительного потока  $\psi_2(\zeta, \eta)$ . Имеем

$$\Gamma = \int_c v_{\eta} ds = - \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0} d\eta = - 2\pi \frac{v_0}{k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{2n} F_{2n} A_0^{(2n)}$$

$$F_{2n} = \frac{\operatorname{Fe} k_{2n}'(\zeta_0)}{\operatorname{Fe} k_{2n}(\zeta_0)}$$

Штрих обозначает дифференцирование по  $\zeta$ . С учетом  $C_{2n}$  из (1.10) получаем

$$r = 1/2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)} F_{2n} \left[ 2A_0 A_0^{(2n)} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_{2m} A_{2m}^{(2n)} \right] - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{k}{v_0} \right\} \left( \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} [A_0^{(2n)}]^2 \right)^{-1} \quad (1.11)$$

После подстановки  $r$  в уравнение (1.10) постоянные  $C_{2n}$  будут выражены через величину циркуляции  $\Gamma$ . Для определения циркуляции необходимо иметь дополнительное условие. Для этого предположим, что задняя кромка тела (конец большой полуоси  $x = a$ ) будет критической точкой.

Скорость на поверхности эллипса определяется выражением

$$v_\eta = - \left( \frac{1}{H_\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0}$$

В критической точке  $\eta = 0$ ,  $v_\eta = 0$  и из (1.4), (1.5) и (1.8) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n F_n c e_n(0, -q) - kb \operatorname{ch} [k(a \sin \alpha - h)] \sin \alpha = 0 \quad (1.12)$$

Соотношения (1.10), (1.11) и (1.12) позволяют теперь найти<sup>1</sup> постоянные  $C_n$  и  $D_n$  и определить суммарную функцию тока  $\psi(\zeta, \eta)$ . После этого можно вычислить кинематические и динамические характеристики потока при взаимодействии с телом. Не останавливаясь на деталях расчета при общем решении задачи, рассмотрим случай малой завихренности потока.

2. При малых значениях параметра  $k$  ( $k \ll 1$ ) скорость набегающего потока (1.4) приближенно может быть записана

$$v_1(y_1) = v_0 \operatorname{ch} [k(y_1 + h)] = v_0 [\operatorname{ch}(kh) \operatorname{ch}(ky_1) + \operatorname{sh}(kh) \operatorname{sh}(ky_1)] = v_0 [(1 + 1/2 k^2 y_1^2) \operatorname{ch}(kh) + ky_1 \operatorname{sh}(kh)] + O(k^3) \quad (2.1)$$

С точностью до  $k^2$  включительно профиль скоростей невозмущенного потока будет параболическим.

Аналогичное разложение можно провести для функции тока  $\psi_1(y_1)$ . В эллиптических координатах окончательно получим

$$\psi_1(\zeta, \eta) = \frac{v_0}{k} \sum_{m=0}^3 [A_m(\zeta) \cos m\eta + B_m(\zeta) \sin m\eta] \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_0(\zeta) &= [1 + q(\operatorname{sh}^2 \zeta \cos^2 \alpha + \operatorname{ch}^2 \zeta \sin^2 \alpha)] \operatorname{sh}(kh) \\ A_1(\zeta) &= -q^{1/2} [2 + q(\operatorname{sh}^2 \zeta \cos^2 \alpha + \operatorname{ch}^2 \zeta \sin^2 \alpha)] \operatorname{ch} \zeta \sin \alpha \operatorname{ch}(kh) \\ A_2(\zeta) &= -q(\operatorname{sh}^2 \zeta \cos^2 \alpha - \operatorname{ch}^2 \zeta \sin^2 \alpha) \operatorname{sh}(kh) \\ A_3(\zeta) &= q^{3/2} (\operatorname{sh}^2 \zeta \cos^2 \alpha - 1/3 \operatorname{ch}^2 \zeta \sin^2 \alpha) \operatorname{ch} \zeta \sin \alpha \operatorname{ch}(kh) \\ B_0(\zeta) &= 0 \\ B_1(\zeta) &= q^{1/2} [2 + q(\operatorname{sh}^2 \zeta \cos^2 \alpha + \operatorname{ch}^2 \zeta \sin^2 \alpha)] \operatorname{sh} \zeta \cos \alpha \operatorname{ch}(kh) \\ B_2(\zeta) &= -1/2 q \operatorname{sh} 2\zeta \sin 2\alpha \operatorname{sh}(kh) \\ B_3(\zeta) &= q^{3/2} (\operatorname{ch}^2 \zeta \sin^2 \alpha - 1/3 \operatorname{sh}^2 \zeta \cos^2 \alpha) \operatorname{sh} \zeta \cos \alpha \operatorname{ch}(kh) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> При  $\Gamma = 0$  для определения произвольных постоянных  $C_n$  и  $D_n$  достаточно соотношений (1.10) и (1.11). В этом случае схема решения совпадает с решением, изложенным в [1].

При разложении коэффициентов  $A_m^{(n)}$  и  $B_m^{(n)}$  периодических функций Матье ограничимся членами, имеющими порядок  $q \sim k^2$ .

Тогда отброшенные величины будут иметь порядок не ниже  $q^2 \sim k^4$ ; такой же порядок имеют коэффициенты  $A_m$  и  $B_m$  при  $m > 3$  из разложения (2.2).

После использования (1.10) и (1.11) суммарная функция тока  $\psi(\zeta, \eta)$  определится следующим образом:

$$\psi(\zeta, \eta) = \psi_1(\zeta, \eta) + \psi_2(\zeta, \eta) = \frac{v_0}{k} \sum_{n=0}^3 [M_n(\zeta) \cos n\eta + N_n(\zeta) \sin n\eta] = \tag{2.3}$$

$$= \frac{v_0}{k} \sum_{n=0}^3 [\beta_n(\zeta) e^{in\eta} + \bar{\beta}_n(\zeta) e^{-in\eta}]$$

$$(\beta_n = 1/2(M_n - iN_n), \quad \bar{\beta}_n = 1/2(M_n + iN_n))$$

$$M_0(\zeta) = A_0(\zeta) - \frac{\Gamma k}{2\pi v_0} \frac{\text{Fe } k_0(\zeta)}{\text{Fe } k_0'(\zeta_0)}, \quad M_1(\zeta) = A_1(\zeta) - A_1(\zeta_0) \frac{\text{Fe } k_1(\zeta)}{\text{Fe } k_1(\zeta_0)}$$

$$M_2(\zeta) = A_2(\zeta) - A_2(\zeta_0) \frac{\text{Fe } k_2(\zeta)}{\text{Fe } k_2(\zeta_0)} - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{kq}{v_0 F_0} \left[ \frac{\text{Fe } k_0(\zeta)}{\text{Fe } k_0(\zeta_0)} - \frac{\text{Fe } k_2(\zeta)}{\text{Fe } k_2(\zeta_0)} \right]$$

$$M_3(\zeta) = A_3(\zeta) - A_3(\zeta_0) \frac{\text{Fe } k_3(\zeta)}{\text{Fe } k_3(\zeta_0)} - \frac{1}{8} q A_1(\zeta_0) \left[ \frac{\text{Fe } k_1(\zeta)}{\text{Fe } k_1(\zeta_0)} - \frac{\text{Fe } k_3(\zeta)}{\text{Fe } k_3(\zeta_0)} \right]$$

$$N_0(\zeta) = 0$$

$$N_1(\zeta) = B_1(\zeta) - B_1(\zeta_0) \frac{\text{Ge } k_1(\zeta)}{\text{Ge } k_1(\zeta_0)}, \quad N_2(\zeta) = B_2(\zeta) - B_2(\zeta_0) \frac{\text{Ge } k_2(\zeta)}{\text{Ge } k_2(\zeta_0)}$$

$$N_3(\zeta) = B_3(\zeta) - B_3(\zeta_0) \frac{\text{Ge } k_3(\zeta)}{\text{Ge } k_3(\zeta_0)} - \frac{1}{8} q B_1(\zeta_0) \left[ \frac{\text{Ge } k_1(\zeta)}{\text{Ge } k_1(\zeta_0)} - \frac{\text{Ge } k_3(\zeta)}{\text{Ge } k_3(\zeta_0)} \right]$$

(Для сокращения записи функций Матье параметр  $q$  опущен.) На контуре  $\zeta = \zeta_0$  функция тока  $\psi(\zeta, \eta)$  принимает постоянное значение

$$\psi_0 = r = A_0(\zeta_0) - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{k}{v_0 F_0}$$

Для определения циркуляции  $\Gamma$  воспользуемся условием, что точка  $\zeta = \zeta_0, \eta = 0$  будет критической точкой. Скорость  $v_\eta$  на поверхности эллипса определяется следующим образом:

$$v_\eta = - \left( \frac{1}{H_\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0} =$$

$$= - \frac{v_0/k}{\sqrt{a^2 \sin^2 \eta + b^2 \cos^2 \eta}} \sum_{n=0}^3 \left( \frac{dM_n}{d\zeta} \cos n\eta + \frac{dN_n}{d\zeta} \sin n\eta \right)$$

Из условия  $v_\eta = 0$  при  $\eta = 0$  получаем

$$\Gamma = - 2\pi v_0 \times$$

$$\times \frac{(a+b) \text{ch}(kh) \sin \alpha - 1/2 k [(a+b)^2 \sin^2 \alpha - b^2] \text{sh}(kb)}{1 + 1/2 q (1 - F_2/F_0)} + O(k^2) \tag{2.4}$$

В равномерном (потенциальном) потоке  $k = q = 0$  и

$$\Gamma = -2\pi v_0(a + b) \sin \alpha$$

3. Перейдем к определению сил и момента, действующих на контур со стороны потока. В скоростной системе координат  $x_1 y_1$  (фиг. 1) подъемная сила  $Y$  и сила лобового сопротивления  $X$  вычисляются по формулам

$$Y = \int_C p dx_1, \quad X = - \int_C p dy_1$$

в которых интегрирование ведется по контуру тела  $C$ .

Составим выражение

$$Y - iX = \int_C p(dx_1 + idy_1) = \int_C p dz_1 = e^{-i\alpha} \int_C p dz$$

Так как  $z = x + iy = c(\operatorname{ch} \zeta \cos \eta + i \operatorname{sh} \zeta \sin \eta) = c \operatorname{ch}(\zeta + i\eta)$ , то на поверхности тела  $dz = ic \operatorname{sh}(\zeta_0 + i\eta) d\eta$ .

Величина давления на контуре определяется по уравнению Бернулли

$$p = C(\psi_0) - \frac{\rho v_\eta^2}{2} = C(\psi_0) - \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{H_\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0}^2$$

$$H_\zeta = C \sqrt{\operatorname{ch}^2 \zeta \sin^2 \eta + \operatorname{sh}^2 \zeta \cos^2 \eta} = C \sqrt{\operatorname{sh}(\zeta + i\eta) \operatorname{sh}(\zeta - i\eta)}$$

Окончательно получаем

$$Y - iX = -i \frac{\rho v_0^2}{2} \frac{e^{-i\alpha}}{C} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{v_0} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0}^2 \frac{d\eta}{\operatorname{sh}(\zeta_0 - i\eta)} \quad (3.1)$$

Рассмотрим выражение для момента, определяемого относительно центра эллипса с положительным направлением вращения по стрелке часов. Имеем

$$M = - \int_C (x_1 dY - y_1 dX) = \operatorname{Re} \left\{ - \int_C (dY - idX) \bar{z}_1 \right\}$$

но  $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1 = ce^{i\alpha} \operatorname{ch}(\zeta - i\eta)$ , и с учетом (3.1) получим

$$M = \frac{\rho v_0^2}{2} \operatorname{Re} \left\{ i \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{v_0} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0}^2 \operatorname{cth}(\zeta_0 - i\eta) d\eta \right\} \quad (3.2)$$

Формулы (1.1) и (3.2) справедливы для любого случая обтекания эллиптических контуров. Вычисление по этим формулам удобно производить когда функция тока  $\psi(\zeta, \eta)$  представлена через комплексные величины аналогично (2.3). При этом следует также воспользоваться разложениями

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^{-1}(\zeta_0 - i\eta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)(\zeta_0 - i\eta)} \\ \operatorname{cth}(\zeta_0 - i\eta) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n(\zeta_0 - i\eta)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если функция тока  $\psi(\zeta, \eta)$  для произвольного течения может быть записана в следующем виде:

$$\psi(\zeta, \eta) = v_0 \sum_{n=0}^{\infty} [\beta_n(\zeta) e^{in\eta} + \bar{\beta}_n(\zeta) e^{-in\eta}]$$

где  $v_0$  — некоторая характерная для данного течения скорость, то из (3.1) и (3.2) с учетом (3.3), получаем

$$Y - iX = -2\pi\rho v_0^2 \frac{ie^{-i\alpha}}{C} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n+1} e^{-(2n+1)\zeta_0} \quad (3.4)$$

$$M = 2\pi\rho v_0^2 \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n} e^{-2n\zeta_0} \right\}$$

$$\gamma_n = \sum_{r=0}^n \bar{\beta}_r \beta_{n-r} + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \bar{\beta}_r \beta_{n+r}$$

4. Возвращаясь к рассматриваемой задаче, приведем конечные результаты для двух режимов обтекания эллипса при малой степени завихренности набегающего потока.

а) *Бесциркуляционное обтекание.* В этом случае предполагается, что дополнительный циркуляционный поток вокруг контура отсутствует, т. е.  $\Gamma = 0$ .

Из (2.3) и (3.4) имеем

$$\begin{aligned} X &= 0 + O(k^3) \\ Y &= \frac{1}{4}\rho v_0^2 \pi k [(a+b)^2 - (a^2 - b^2) \cos 2\alpha] \operatorname{sh}(2kh) + O(k^3) \\ M &= \frac{1}{2}\rho v_0^2 \pi (a^2 - b^2) \operatorname{ch}^2(kh) \{1 - \frac{1}{2}k^2 [(a^2 \sin^2 \alpha + \\ &\quad + b^2 \cos^2 \alpha) (1 + \operatorname{th}^2 kh) + ab]\} \sin 2\alpha + O(k^3) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Согласно (4.1) на эллиптический контур действует сила, отклоняющая тело от оси симметрии потока. При заданном положении тела  $h$  наибольшее значение этой силы будет при  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ , а наименьшее — при  $\alpha = 0$ . Отношение их составляет  $a/b$ , что совпадает с результатом для течения с постоянной завихренностью [4]. При  $a = b = r_0$  получаем подъемную силу кругового цилиндра [3]

$$Y = \rho v_0^2 k r_0^2 \operatorname{sh}(2kh) \quad (4.2)$$

Отметим, что в работе [1] величина момента определена без учета слагаемого, имеющего порядок  $k^2$ .

б) *Циркуляционное обтекание.* В этом случае на основное течение накладывается дополнительный циркуляционный поток с интенсивностью по контуру, равной  $\Gamma$ .

С точностью до членов, имеющих порядок  $k^2 \ln k$  включительно, из (2.3) и (3.4) получаем дополнительные подъемную силу и момент к соответствующим величинам (4.1) при бесциркуляционном обтекании

$$\begin{aligned} \Delta Y &= -\rho v_0 \Gamma (1 + \frac{1}{8}k^2 (F_2 / F_0) (a+b) (a \sin^2 \alpha + b \cos^2 \alpha)) \operatorname{ch}(kh) \\ \Delta M &= -\frac{1}{4}\rho v_0 \Gamma k (a^2 - b^2) \operatorname{sh}(kh) \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (4.3)$$

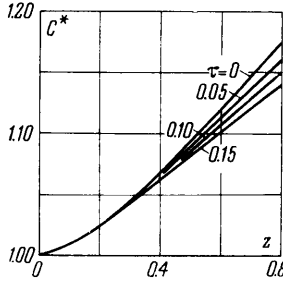
В данном приближении отношение  $F_2/F_0$  согласно [3] определяется

$$F_2/F_0 = -2 \ln \frac{1}{4} \gamma k (a+b) \left[ 1 + \frac{1}{2} k^2 ab \ln \frac{1}{4} \gamma k (a+b) \right]^{-1}$$

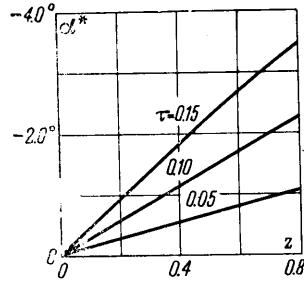
где  $\gamma = 1.78$  — постоянная Эйлера.

Добавка к величине лобового сопротивления  $\Delta X$  имеет порядок  $O(k^2 \ln k)$  (в потенциальном потоке  $X = \Delta X = 0$ ).

Рассмотрим случай малых углов атаки ( $\alpha \ll 1$ ) и малых относительных толщин сечения ( $\tau = b/a \ll 1$ ). Предположим также, что величина циркуляции  $\Gamma$  на по-



Фиг. 2



Фиг. 3

верхности контура определяется из (2.4). Тогда, суммируя решения (4.1) и (4.3) и переходя к коэффициентам аэродинамической силы и момента

$$c_y = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 (2a)}, \quad c_m = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho v^2 (2a)^2}$$

получим соотношения для тонкого симметричного профиля

$$c_y = 2\pi(1+\tau) \operatorname{ch}^2(zh^\circ) \left[ 1 + \frac{z^2}{4} \ln \frac{4}{\gamma z(1+\tau)} \right] \alpha + \frac{\pi}{2} z\tau(1+2\tau) \operatorname{sh}(zh^\circ)$$

$$c_m = \frac{1}{2}\pi(1-\tau^2) \operatorname{ch}^2(zh^\circ) \alpha \approx \frac{1}{2}\pi \operatorname{ch}^2(zh^\circ) \alpha \quad (z = ka, h^\circ = h/a) \quad (4.4)$$

Положения центра давления и фокуса (в долях хорды  $2a$ ) относительно середины сечения определяются по следующим формулам:

$$x_p = -c_m / c_y, \quad x_f = -c_m^\alpha / c_y^\alpha \quad (4.5)$$

В равномерном (потенциальном) потоке  $k = 0$ ; из (4.4) и (4.5) получаем

$$c_{y_0} = 2\pi(1+\tau)\alpha, \quad c_{m^0} = \frac{1}{2}\pi(1-\tau^2)\alpha, \quad x_{p^0} = x_{f^0} = -\frac{1}{4}(1-\tau) \quad (4.6)$$

С учетом (4.6) расчетные формулы для тонкого профиля в слабозавихренном потоке с параболическим распределением скоростей могут быть записаны в следующем виде:

$$c_y = c_y^\alpha (\alpha - \alpha_0), \quad x_f = x_f^0 \vartheta^{-1}(z) \quad (4.7)$$

$$c_y^\alpha = c_{y_0}^\alpha \operatorname{ch}^2(zh^\circ) \vartheta(z), \quad \alpha_0 = -\frac{1}{2} z\tau(1+\tau) \operatorname{th}(zh^\circ) \vartheta^{-1}(z)$$

$$\vartheta(z) = 1 + \frac{z^2}{4} \ln \frac{4}{\gamma z(1+\tau)}$$

Согласно (4.7) на тонкий симметричный профиль линейное изменение завихренности по высоте в набегающем потоке (параболический профиль скоростей) действует так, что происходит увеличение угла наклона характеристики  $c_y(\alpha)$  и появляется угол нулевой подъемной силы  $\alpha_0$ , т. е. происходит фиктивное искривление профиля. Это приводит к тому, что центр давления у симметричного профиля изменяется по углам атаки и не совпадает с положением фокуса.

На фиг. 2 и 3 приведены результаты вычислений по формулам (4.7) величин  $c^* = c_y^\alpha / c_{y_0}^\alpha \operatorname{ch}^2(zh^\circ)$  и  $\alpha^* = \alpha_0 \operatorname{cth}(zh^\circ)$ .



Из этих фигур видно, что величина производной  $c_y^\alpha$  практически не зависит от относительной толщины сечения ( $\tau = 0 \div 0.15$ ), несколько уменьшаясь с увеличением  $\tau$ . Существенное влияние на  $c_y^\alpha$  оказывает положение профиля относительно оси симметрии потока. Например, при  $h^\circ = 1$  и  $z = 0.4$  наклон кривой  $c_y(\alpha)$  по сравнению с потенциальным потоком увеличивается на 24%. При заданном положении профиля  $h^\circ$  угол нулевой подъемной силы, характеризующий фиктивное искривление профиля, почти линейно увеличивается по абсолютному значению с увеличением  $\tau$ .

Интересно отметить, что величина фокуса  $x_f$  не зависит от положения профиля в потоке и практически слабо зависит от толщины профиля ( $\tau = 0 \div 0.15$ ). Увеличение степени завихренности потока  $z$  приводит к смещению фокуса к середине профиля. При  $z = 0.4$  это смещение по сравнению с  $z = 0$  (равномерное течение) составляет примерно 6.5%.

Автор благодарит Г. А. Домбровского за внимание к данной работе.

Поступило 9 XII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Jones E. E. The elliptic cylinder in a shear flow with hyperbolic velocity profile. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, vol. 12.
2. Ene Horia I. Miscări plane rotationale ale unui fluid perfect în prezența unor obstacole. Studii cercetari mat., 1965, No. 5, vol. 17.
3. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матъе. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
4. Друкер И. Г. Подъемная сила, действующая на контур в плоском однородно завихренном потоке несжимаемой жидкости. ПМТФ, 1966, № 2.
5. Холяво В. И. Обтекание кругового цилиндра вихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. В сб.: «Самолетостроение и техника воздушного флота», Изд-во Харьковск. гос. ун-та, 1968, вып. 13.