

## О ТОНКИХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ НАИМЕНЬШЕГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В НЕРАВНОВЕСНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

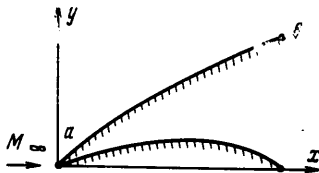
Р. А. ТКАЛЕНКО

(Москва)

Рассматривается задача о нахождении формы образующей тела вращения, движущегося со сверхзвуковой скоростью и обладающего наименьшим волновым сопротивлением. Предполагается, что в потоке может протекать любое число неравновесных процессов. Распределение давления по поверхности тела берется в линейном приближении [1, 2]. Обзор работ, посвященных применению линейной теории для нахождения тел вращения оптимальной формы в сверхзвуковом потоке совершенного газа, можно найти в монографии [3]. Решение задачи о нахождении формы плоских тонких тел минимального волнового сопротивления в неравновесном сверхзвуковом потоке получено в работе [4]. Ниже рассматривается оптимизация только таких тел вращения, у которых передняя точка лежит на оси симметрии.

1. Направим ось  $x$  прямоугольной системы координат вдоль оси симметрии по направлению набегающего потока, ось  $y$  — в перпендикулярном направлении, а начало координат поместим в переднюю точку контура. Набегающий поток будем считать равновесным.

Задача заключается в том, чтобы построить контур тонкого тела вращения, выходящий из точки  $a$  на оси симметрии, обеспечивающий минимальное волновое сопротивление при фиксированном набегающем потоке, заданной длине  $L = x_b$ , ширине  $H = y_b$  или объеме  $V$ . Контур  $ab$  (фиг. 1) может быть головной частью тела вращения ( $y_a = 0$ ,  $y_b \neq 0$ ) или замкнутым контуром ( $y_a = y_b = 0$ ).



Фиг. 1

Пусть  $u$  и  $v$  — проекции возмущенной скорости на оси координат, отнесенные к скорости набегающего потока  $U_\infty$  (индекс  $\infty$  будем приписывать параметрам невозмущенного потока);  $y_m$  — максимальная ширина тела, отнесенная, как и все параметры размерности длины, к длине тела  $L$ . Для коэффициента сопротивления рассматриваемых тонких тел вращения можно записать выражение [3]

$$C_D = -\frac{4}{y_m} \int_0^1 u(x, y_m) v(x, y_m) dx \quad (1.1)$$

В дальнейшем рассматриваются только такие тела вращения, которые обладают непрерывной производной от площади поперечного сечения  $S(x)$ . В этом случае проекции возмущенной скорости вблизи поверхности тонкого тела согласно линейной теории имеют вид

$$u(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{S'(t)}{2\pi} \Psi(x-t, y_m) dx, \quad v(x, y) = \frac{S'(x)}{2\pi y} \quad (1.2)$$

Функция  $\Psi(x, y)$  определяется свойствами газа и числом неравновесных процессов. Для рассматриваемых тел она непрерывна при  $0 < x < \infty$ ,

тождественно равна нулю при  $x < 0$  и имеет особенность при  $x = 0$ . Для тонких тел ( $\beta_\infty y_m \ll 1$ ,  $\beta_\infty^2 = M_\infty^2 - 1$ ) [1]

$$\Psi(x, y) = \ln \frac{2}{\beta_\infty y} + \frac{1 + \Phi(x)}{x}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (e^{-s_k x} - e^{-s_k}) \quad (1.3)$$

Подставляя проекции скорости (1.2) в выражение для сопротивления (1.1), производя дифференцирование, меняя местами переменные  $x$  и  $t$ , после несложных выкладок получим

$$P = \frac{y_m C_D}{2} = \int_0^1 \frac{S'(x)}{2\pi} \left[ \int_0^x \frac{S''(t)}{2\pi} \Psi(x-t, y_m) dt - \int_x^1 \frac{S''(t)}{2\pi} \Psi(t-x, y_m) dt + \frac{S''(1)}{2\pi} \Psi(1-x, y_m) \right] dx \quad (1.4)$$

2. Как показано в работе [5], при наличии ограничения на длину оптимальный контур может содержать участок краевого экстремума — торец. Кроме этого, согласно условиям применимости линейной теории угол отклонения потока не может превышать некоторой величины, что в свою очередь может привести к появлению участков краевого экстремума (см., например [4]). Участки краевого экстремума в данной работе не рассматриваются, однако оптимальные контуры, содержащие такие участки, могут быть получены из результатов этой работы, так как уравнение для экстремалей при наличии участков краевого экстремума остается тем же, а связь между давлением на торец и шириной оптимального контура в точке  $b$  может быть получена введением условия Буземана.

В дальнейшем будет использовано два изопериметрических условия: условие прохождения контура через точки  $a$  и  $b$  и условие постоянства объема тела вращения

$$\int_0^1 S'(x) dx = S(1), \quad \int_0^1 (1-x) S'(x) dx = V. \quad (2.1)$$

Вариационная задача формулируется следующим образом: среди множества тел вращения с вершиной в точке  $a$  и площадью поперечного сечения  $S(x)$ , удовлетворяющей одному или обоим изопериметрическим условиям (2.1), при заданной функции  $\Psi(x, y)$  найти те, которые реализуют минимум функционала (1.4). Для решения поставленной задачи составим функционал

$$\Omega = 2\pi P + \int_0^1 [\lambda_1 + (1-x)\lambda_2] S'(x) dx \quad (2.2)$$

где  $P$  — дается формулой (1.4), а  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — постоянные множители Лагранжа.

В процессе нахождения первой вариации от функционала (2.2) появляются члены, в которые входит значение  $\Psi$  при  $x = 0$ , т. е. бесконечно большие. Это является результатом использования соотношений (1.3) и указывает на то, что в рассматриваемом приближении ( $\beta_\infty y_m \ll 1$ ) контуры оптимальных тел вращения должны удовлетворять условиям

$$S'(0) = S'(1) = 0 \quad (2.3)$$

Эти условия точно выполняются для тел с замкнутой образующей. Для головных частей тел вращения в случае совершенного газа решение, удовлетворяющее условиям (2.3), существует и дает оживала Кармана. Решение задачи без условия  $S'(1) = 0$  для совершенного газа можно найти в работе [6].

В рассматриваемых задачах концевые точки варьируемого контура неподвижны, поэтому  $\delta S(0) = \delta S(1) = 0$ . После нахождения обычным методом первой вариации от  $\Omega$  с учетом соотношений (1.3) и (2.3) получаем уравнение для экстремалей

$$\int_0^1 \frac{S''(t)}{x-t} dt + \int_0^1 \frac{S''(t)\Phi(|x-t|)}{x-t} dt = -2\pi\lambda_1 - 2\pi(1-x)\lambda_2 \quad (2.4)$$

3. Уравнение (2.4) является сингулярным интегральным уравнением. Используя метод регуляризации Векуа [7], вводя обозначение

$$2\pi Y(x) = S''(x)\sqrt{x(1-x)} \quad (3.1)$$

и беря то решение, которое удовлетворяет условиям (2.3), получаем

$$Y(x) + \int_0^1 Y(t)\chi(x,t) dt = F(x) \quad (3.2)$$

$$2\pi F(x) = (2x-1)\lambda_1 + (2x^2-3x+3/4)\lambda_2$$

Интегральное уравнение второго рода (3.2) имеет ядро

$$\chi(x,t) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{t(1-t)}} \int_0^1 \frac{\sqrt{z(1-z)}}{x-z} \frac{\Phi(|z-t|)}{z-t} dz \quad (3.3)$$

которое является непрерывной функцией своих аргументов при  $0 < x < 1$ ,  $0 < t < 1$ . Введем обозначение

$$\chi_1(x,t) = \int_0^1 \frac{\sqrt{z(1-z)}}{x-z} \frac{\Phi(t-z)}{t-z} dz$$

При этом

$$\pi^2\sqrt{t(1-t)}\chi(x,t) = \chi_1(x,t) + \chi_1(1-x, 1-t)$$

Отсюда видно, что (3.3) не меняется от замены  $x$  на  $1-x$  и  $t$  на  $1-t$ . Это свойство не зависит от вида функции  $\Phi(x)$ , т. е. от рода и числа релаксационных процессов.

Пусть интегральное уравнение (3.2) имеет решение  $Y = Y(x)$ , тогда из (3.1) следует:

$$S'(x) = 2\pi \int_0^x \frac{Y(t) dt}{\sqrt{t(1-t)}} \quad V = \pi \int_0^x \frac{(1-x)^2 Y(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx \quad (3.4)$$

В качестве примеров были рассмотрены две задачи. Находился оптимальный контур тела вращения с замкнутой образующей при фиксированных длине и объеме. В этом случае из (2.3) и (3.2) при помощи условий

(2.1) и (3.4) можно получить

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda_2 - 8\Lambda_1, \quad \lambda_2 = 128\pi^{-1}[V + \pi(\Lambda_2 - \Lambda_1)]$$

$$\Lambda_i = \int_0^1 \frac{(1-x)^i dx}{\sqrt{x(1-x)}} \int_0^1 \frac{Y(t)}{\sqrt{t(1-t)}} \chi(x,t) dt \quad (i = 1, 2)$$

Находилась оптимальная форма головной части тела вращения при заданной длине и ширине в точке  $b$ . В этом случае  $\lambda_2 = 0$ , а  $\lambda_1$  находится из условия

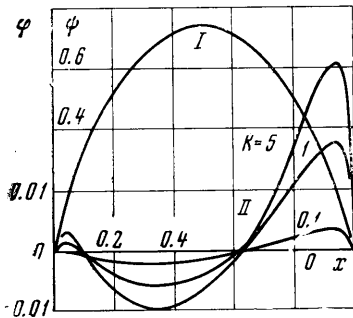
$$\lambda_1 = 2\pi Y(1) + 2\pi \int_0^1 \frac{Y(t)\chi(1,t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt$$

Уравнение образующей оптимальных тел вращения для обеих задач можно получить из (3.4), а выражение для волнового сопротивления из (1.4)

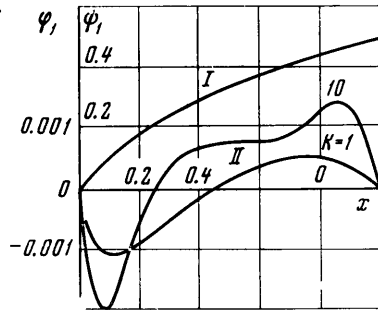
$$y^2 = 2 \int_0^x \frac{(x-t)Y(t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt, \quad P = \int_0^1 \frac{Y(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} \left[ \lambda_1 x + \lambda_2 x \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \right]$$

4. Расчеты проводились для одного релаксационного процесса. В этом случае в выражении для  $\Phi(x)$   $N = 1$ . Принималось  $s_1' = 2K$ ,  $s_1 = K$ , причем параметр  $K$  обратно пропорционален времени релаксации,  $K = 0$  соответствует замороженному течению, а  $K = \infty$  — равновесному. Интегральное уравнение (3.2) решалось методом итераций.

На фиг. 2 приведены результаты расчетов оптимальных тел с замкнутой образующей. Производилось сравнение полученных контуров тел с оптимальными для случая совершенного газа при одинаковых длине  $L$  и объеме  $V$ . Кривая  $I$  соответ-



Фиг. 2



Фиг. 3

ствует зависимости ординаты тела, оптимального в совершенном газе,  $\psi(x) = (L/V)^{1/2}y_0(x)$  от безразмерной длины. Так как оптимальные контуры с учетом неравновесных процессов незначительно отличаются от оптимальных в совершенном газе, то на фиг. 2 несколько в другом масштабе приводится зависимость разницы ординат этих контуров от длины (кривые II)

$$\varphi(x) = (L/V)^{1/2}[y_0(x) - y(x)]$$

Вычислялось волновое сопротивление тела с замкнутой образующей для различных значений  $K$ . Например, при  $K = 5$  отношение величины волнового сопротивления тела, оптимального в неравновесном потоке, к волновому сопротивлению тела, оптимального в совершенном газе и обтекаемого тем же неравновесным потоком, при одинаковых длине и объеме составляло  $P/P^0 = 0.9776$ . Увеличение или уменьшение  $K$  от значения  $K \approx 5$  приводило к увеличению этого отношения. При  $K = 1$   $P/P^0 = 0.9858$ .

В случае обтекания головных частей тел вращения  $\lambda_2 = 0$  и из уравнения (3.2) следует, что вторая производная от площади поперечного сечения является антисимметричной функцией относительно середины интервала, а первая производная — симметричной относительно этой же точки. Это свойство оптимальных контуров не зависит от числа релаксационных процессов.

На фиг. 3 приведены результаты расчетов головных частей тел вращения. Кривая I соответствует зависимости радиуса тела вращения, оптимального в потоке совершенного газа, от безразмерной длины

$$\psi_1(x) = y_0(x) / 2H$$

Кривые II соответствуют зависимости

$$\varphi_1(x) = [y_0(x) - y(x)] / 2H$$

Кривая  $K = 0$  — это известное решение Кармана для совершенного газа  $y = y_0(x)$ . Наибольшее отклонение оптимальных контуров от крайних случаев наблюдается при  $K \approx 10$ .

Для сравнения вычислялось волновое сопротивление  $P^\circ$  тела, оптимального в сверхзвуковом потоке совершенного газа, обтекаемого неравновесным потоком при заданных  $x_b = L$  и  $y_b = H$ . Было получено, что  $P/P^\circ = 0.9907$  для  $K = 10$ .

Следует отметить, что контур с замкнутой образующей имеет вертикальную касательную в точках  $x = x_a$  и  $x = x_b$ . Очевидно, при ограничении на наклон контура окрестности этих точек будут областями краевого экстремума в данной задаче. В случае головной части тел такими будут область вблизи передней кромки и, возможно, в середине хорды профиля, где наклон образующей достигает максимума.

Автор признателен А. Н. Крайко за полезные замечания.

Поступило 25 XI 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ткаленко Р. А. Сверхзвуковое неравновесное течение газа около тонких тел вращения. ПМТФ, 1964, № 2.
2. Крайко А. Н. Исследование слабо возмущенных сверхзвуковых течений при произвольном числе неравновесных процессов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Theory of optimum aerodynamic shapes. Extremal problems in the aerodynamics of supersonic, hypersonic, and free molecular flows. New York — London, Acad. Press, 1965.
4. Крайко А. Н., Ткаленко Р. А. Тонкие плоские тела минимального волнового сопротивления в неравновесном сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
5. Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
6. Parker M. Minimum drag ducted and pointed bodies of revolution based on linearized supersonic theory. NASA, Rept, No. 1213, 1955.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Гостехиздат, 1946.