

## КРЫЛЬЯ С ОПТИМАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Д. ПЕРМИНОВ

(Москва)

Приводятся некоторые точные и полученные методом локальных вариаций [1-3] численные решения вариационных задач о симметричном крыле минимального сопротивления и крыле максимального качества в гиперзвуковом потоке; предложена модификация метода локальных вариаций для численного решения вариационных задач с изопериметрическими ограничениями. При расчете распределения давления на поверхности крыла использовался закон Ньютона [4].

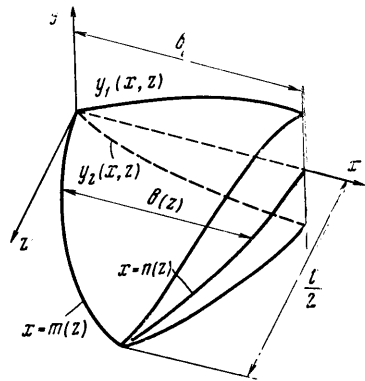
**1. Крыло минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке.** В работе [5] показано, что сопротивление крыла, имеющего две плоскости симметрии и обтекаемого под нулевым углом атаки гиперзвуковым потоком газа (фиг. 1), дается функционалом.

$$\frac{X}{q_\infty} = 4 \int_{S/2} \int \left[ \frac{2Ny_x^3}{1 + y_x^2 + y_z^2} + c_f(1 + y_z^2)^{1/2} \right] dx dz \quad (1.1)$$

Здесь  $y = y(x, z) = y_1(x, z) = -y_2(x, z)$  — уравнение поверхности крыла,  $S$  — площадь крыла в плане,  $c_f$  — коэффициент сопротивления трения, постоянный по крылу, и  $N = N(M_\infty)$  — часто вводимый множитель в формуле Ньютона, учитывающий зависимость коэффициента давления от числа Маха набегающего потока. В дальнейшем всюду будем предполагать размах крыла  $l$  заданным. Требуется найти такую функцию  $y = y(x, z)$ , которая доставляла бы минимум функционалу (1.1) и удовлетворяла заданным граничным и изопериметрическим условиям. В такой постановке задача решалась [5, 6] при дополнительных предположениях  $y_x^2 \ll 1$  и  $y_z^2 \ll 1$  (тонкое крыло).

Случай  $y_z^2 \ll 1$ . Предположение о тонкости крыла в направлении потока ( $y_x^2 \ll 1$ ) легко снимается, что приводит к некоторому усложнению уравнения Эйлера по сравнению со случаем тонкого крыла. Рассмотрим для этого случая некоторые вариационные задачи. Если  $y_z^2 \ll 1$ , то (1.1) можно переписать в виде

$$\frac{X}{4q_\infty N} = \int_{S/2} \int \left( \frac{2yx^3}{1 + y_x^2} + c \right) dx dz, \quad c = \frac{c_f}{N} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Пусть форма крыла в плане и граничные условия заданы следующим образом:  $y = 0$  при  $x = m(z)$  (передняя кромка), а  $y = t(z)$  при  $x = n(z)$  (задняя кромка).

Введем преобразование  $x' = x - m(z)$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ , тогда вид функционала (1.2) не меняется, а для площади, объема крыла и граничных усло-

вий получим (штрихи опущены)

$$\frac{S}{2} = \iint_{S/2} dx dz = \int_0^{l/2} b(z) dz, \quad \frac{V}{4} = \iint_{S/2} y dx dz \quad (1.3)$$

$$y(x=0) = 0, \quad y[x = n(z) - m(z) = b(z)] = t(z)$$

Вариационную задачу о крыле минимального сопротивления можно сформулировать следующим образом: найти функцию  $y = y(x, z)$ , удовлетворяющую заданным граничным и изопериметрическим условиям (1.3) и доставляющую минимум функционалу (1.2). Эта задача эквивалентна задаче об отыскании минимума функционала

$$I = \iint_{S/2} \left( \frac{2yx^3}{1+yx^2} + c - \lambda_1 - \lambda_2 y \right) dx dz \quad (1.4)$$

при тех же граничных и изопериметрических условиях ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — множители Лагранжа). Как обычно, получаем:

уравнение Эйлера

$$4y_x y_{xx} (3 - yx^2) (1 + yx^2)^{-3} + \lambda_2 = 0 \quad (1.5)$$

условие трансверсальности

$$\xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z = 0 \quad (1.6)$$

$$\xi = z[-4yx^3(1+yx^2)^{-2} + c - \lambda_1 - \lambda_2 y]$$

$$\eta = 2zyx^2(3+yx^2)(1+yx^2)^{-2}$$

$$\zeta = -2yx^3(1+yx^2)^{-1} - c + \lambda_1 + \lambda_2 y - 2zyx^2y_z(3+yx^2)(1+yx^2)^{-2}$$

Здесь  $z = az / dx$  — наклон контура задней кромки в плоскости симметрии  $y = 0$ .

Условие Лежандра приобретает вид

$$4y_x(3 - yx^2)(1 + yx^2)^{-3} \geq 0 \text{ или } 0 \leq y_x \leq \sqrt[3]{3}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Заданы  $t(z)$  и  $b(z)$ . В этом случае  $\lambda_2 = 0$  и решение, удовлетворяющее граничным условиям, дается формулой

$$y = t(z)b^{-1}(z)x$$

Эта формула хотя и тождественна полученной в [6], однако справедлива и для толстого крыла. Для коэффициента сопротивления получаем

$$c_x = 2c + \frac{8}{S} \int_0^{l/2} \frac{t^3(z)}{b^2(z) + t^2(z)} dz$$

Если ввести теперь параметр  $\tau = t(0) / b_0$ , характеризующий относительную толщину крыла, то можно записать

$$\zeta = \frac{\mu(\eta)}{\nu(\eta)} \xi, \quad \xi = \frac{x}{b_0}, \quad \eta = \frac{2z}{l}, \quad \zeta = \frac{y}{t(0)}, \quad \mu = \frac{t(z)}{t(0)}$$

$$\nu = \frac{b(z)}{b_0}, \quad c_x = 2c + \frac{4\tau^3 b_0 l}{S} \int_0^1 \frac{\mu^3}{\nu^2 + \tau^2 \mu^2} d\eta$$

Например, для треугольного крыла с  $\nu = 1 - \eta$  и  $\mu = 1 - \eta^2$

$$c_x = 2c + \frac{16}{3}\tau + \frac{8}{\tau} \left[ 1 + \ln \frac{1 + \tau^2}{1 + 4\tau^2} \right] - \frac{8}{\tau^2} (\text{arc tg } 2\tau - \text{arc tg } \tau)$$

Эта зависимость для  $c = 0$  приведена на фиг. 2 (кривая 1), пунктиром на той же фигуре дана зависимость  $c_x(\tau)$ , полученная в [6].

2. Задано  $t(z)$ . Так как  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , то уравнение Эйлера (1.5) и условие трансверсальности (1.6) совместно дают

$$4y_x^3(1 + y_x^2)^{-2} = c$$

Отсюда

$$y_x = \alpha(c), \quad y = \alpha x, \quad b(z) = \alpha^{-1}t(z)$$

Таким образом, форма задней кромки подобна заданному распределению толщины на ней. Площадь крыла и коэффициент сопротивления дают формулами

$$S = \alpha^{-1}S_m, \quad c_x = 2c + 4\alpha^3(1 + \alpha^2)^{-1}$$

где  $S_m$  — заданная площадь миделя крыла.

3. Заданы  $S$  и  $t(z)$ . Аналогично предыдущему случаю на задней кромке из условия трансверсальности имеем

$$4y_x^3(1 + y_x^2)^{-2} = c - \lambda_1$$

Отсюда

$$y_x = \beta(c, \lambda_1), \quad y = \beta x, \quad b(z) = \beta^{-1}t(z), \quad c_x = 2c + 4\beta^3(1 + \beta^2)^{-1}$$

Неизвестный множитель Лагранжа  $\lambda_1$  находится из соотношения  $S = \beta^{-1}S_m$ .

4. Задано  $V$ . В этом случае условия трансверсальности дают  $y_x = 0$ ,  $y = c/\lambda_2$  при  $x = b(z)$ .

Пользуясь граничным условием на передней кромке, условием Лежандра и последними соотношениями, можно выписать решения уравнения Эйлера

$$y = -A(x) + A(0), \quad A(x) = (4\lambda_2)^{-1} [3 - u(x)]^{3/2} [1 + u(x)]^{1/2} \\ A(0) = c/\lambda_2, \quad u(x) = [9 - 4\lambda_2(b - x)]^{1/2} \quad (1.7)$$

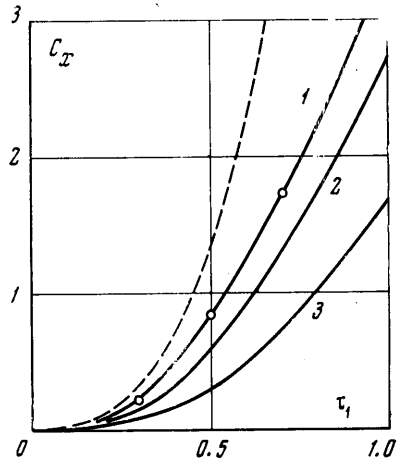
Из решения (1.7) видно, что оптимальным является прямоугольное крыло с постоянной толщиной задней кромки. Множитель  $\lambda_2$  определяется из уравнения

$$V = \lambda_2^{-1} \{ 2cbl - (l/4\lambda_2) [\pi - 1/4(u(0) - 7/3)R_0^{3/2} + \\ + 1/2(1 - u(0))R_0^{1/2} + 2 \text{arc sin } [1/2(1 - u(0))]] \}, \quad R_0 = 3 + 2u(0) - u^2(0)$$

Если  $b$  и  $\lambda_2$  найдены, то коэффициент сопротивления можно вычислить по формуле

$$c_x = 2c - b(2\lambda_2 S)^{-1} [\pi + 1/3 R_0^{3/2} + 1/2(3u(0) - 11)R_0^{1/2} + \\ + 2 \text{arc sin } [1/2(1 - u(0))]]$$

Случай, когда заданы  $V$  и  $S$ , аналогичен рассмотренному.



Фиг. 2

*Численные расчеты.* Приведенные выше точные решения не исчерпывают всех вариационных задач, которые могут возникнуть на практике. Некоторые из них могут быть численно решены методом локальных вариаций [1-3], суть которого состоит в следующем: область интегрирования разбивается на прямоугольные ячейки, в узлах которых задается и хранится в памяти ЭВМ некоторое начальное приближение; затем в одном из узлов делается (в соответствии с заданными граничными условиями) некоторое малое приращение  $h$  и по выбранной квадратурной формуле определяется, приводит ли такое изменение начального приближения к уменьшению функционала (эта операция проводится для всех узлов). Когда изменения функционала становятся порядка ошибки квадратурной формулы, уменьшают  $h$ , а если  $h$  достигло некоторой минимальной величины, то уменьшают размеры ячеек и повторяют все вариации снова. Этим методом в работах [2, 3] были решены некоторые вариационные задачи и некоторые классические краевые задачи, сводящиеся к вариационным. Однако этому методу присущи и некоторые недостатки, одним из которых является резкое снижение точности в случае криволинейной области интегрирования (поэтому всегда желательно выполнить предварительно преобразование независимых переменных, которое переводило бы заданную область интегрирования в прямоугольную).

Введем безразмерные переменные по формулам

$$u = x/b_0, \quad v = y/t(0), \quad w' = 2z/l$$

Тогда функционал (1.1) можно записать в виде

$$J_{x'} = \frac{X}{q_{\infty} N b_0 l} = 2 \int_{\frac{1}{2}\sigma}^{\cdot} \int \left[ \frac{2\tau_1^3 v u^3}{1 + \tau_1^2 v u^2 + \tau_2^2 v w'^2} + c(1 + \tau_2^2 v w'^2)^{1/2} \right] du dw$$

$$\left( \tau_1 = \frac{t(0)}{b_0}, \quad \tau_2 = \frac{2t(0)}{l} \right)$$

Здесь  $\sigma$  — площадь крыла в новых переменных.

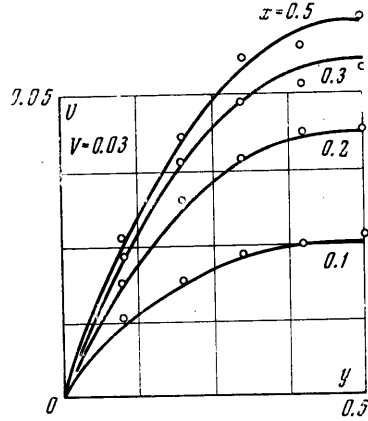
В качестве примера на фиг. 2 приведены результаты численного решения задачи о треугольном крыле минимального сопротивления с  $m(w) = w$ ,  $n(w) = 1$ ,  $t(w) = 1 - w^2$ ,  $c = 0$  для различных  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (кружками на кривой 1 показаны расчетные точки для  $\tau_2 = 0.1$ , кривые 2 и 3 соответствуют значениям  $\tau_2 = 0.5$  и 1.0).

Начиная решение задачи о крыле минимального сопротивления методом локальных вариаций с поверхности  $y^0(x, z)$ , ограничивающей объем  $V^0$ , наряду с искомым минимальным значением функционала получаем и поверхность  $y(x, z)$ , на которой этот минимум достигается и которая ограничивает объем  $V$  (пусть  $V < V^0$ ). Пусть теперь требуется решить ту же задачу, но с дополнительным условием: объем крыла должен быть равен  $V_1$ , причем  $V < V_1 < V^0$ . Тогда, начиная с того же начального приближения  $y^0(x, z)$  и требуя, чтобы при каждой вариации текущее значение объема было не менее  $V_1$ , в результате получим некоторую поверхность  $y_1(x, z)$ , ограничивающую объем  $V_1$ . Однако расчеты показывают, что получаемая таким образом поверхность  $y_1(x, z)$  не является, вообще говоря, решением поставленной изопериметрической задачи.

Для решения таких задач предполагается следующий метод. Пусть дана некоторая поверхность, ограничивающая заданный объем  $V$  (для получения такой поверхности можно использовать метод локальных вариаций, так как он дает поверхности, довольно близкие к оптимальным). Вычисляем значение функционала  $s_x$  на этой поверхности, выбираем точку  $(x_0, z_0)$ , а в ней изменяем  $y_0$  на некоторое  $h_0$ , вычисляем  $\Delta s_{x_0}$  и  $\Delta V_0$ , затем из оставшихся точек отыскиваем такую, вариация в которой с шагом  $h$ , найденным из условия  $\Delta V_0 + \Delta V = 0$ , удовлетворяла бы условию  $\Delta s_{x_0} + \Delta s_x \leq 0$ . Этот процесс повторяется для всех  $(x_0, z_0)$  и  $h_0$ .

Такой процесс перераспределения заданного объема происходит при уменьшении  $c_x$  крыла. С другой стороны, на экстремальной поверхности такие вариации не приводят к изменению формы, а следовательно,  $V$  и  $c_x$ . Необходимо отметить, однако, что такой метод (это вообще характерно для методов локальных вариаций) не гарантирует от возможности попадания в локальный минимум.

Для иллюстрации метода на фиг. 3 приведены результаты численного решения задачи о прогибе квадратной равномерно нагруженной мембраны с заданным объемом под ней; точное решение этой задачи может быть получено аналитически. Результаты, полученные методом локальных вариаций, даны кружками, а результаты расчета по предложенному методу совпадают в пределах ошибок расчетов с точным решением, изображенным на фиг. 3 сплошной кривой.



Фиг. 3

**2. Крылья с максимальным аэродинамическим качеством.** Пусть верхняя и нижняя поверхности крыла заданы соответственно функциями  $y_1 = y_1(x, z)$  и  $y_2 = y_2(x, z)$  (фиг. 1), тогда, делая относительно коэффициента давления  $c_p$  и коэффициента трения  $c_f$  те же предположения, что и в п. 1, и вводя безразмерные переменные  $\xi = x/b_0$ ,  $\eta = 2y/l$  и  $\zeta = 2z/l$ , для коэффициентов сопротивления и подъемной силы соответственно получим

$$c_x = \frac{b_0 l}{4S} \iint_{S/2} \left[ \lambda^3 \left( \frac{\eta_1 \xi^3}{g_1} - \frac{\eta_2 \xi^3}{g_2} \right) + 4c(h_1 + h_2) \right] d\xi d\zeta \quad (2.1)$$

$$c_y = \frac{b_0 l}{2S} \iint_{S/2} \left[ \lambda^2 \left( \frac{\eta_1 \xi^2}{g_1} - \frac{\eta_2 \xi^2}{g_2} \right) + c\lambda \left( \frac{\eta_1 \xi}{h_1} - \frac{\eta_2 \xi}{h_2} \right) \right] d\xi d\zeta \quad (2.2)$$

$$g_i = 1 + (\lambda/2)^2 \eta_i \xi^2 + \eta_i \zeta^2, \quad h_i = (1 + \eta_i \zeta^2)^{1/2} \quad (i = 1, 2)$$

где  $\lambda = l/b_0$  — удлинение.

Пусть форма крыла в плане дается соотношениями: передняя кромка —  $x = m(z)$  ( $y = 0$ ), задняя кромка —  $x = n(z)$  ( $y$  — свободно).

Из (2.1) и (2.2) видно, что  $c_x$  и  $c_y$  зависят от двух параметров —  $\lambda$  и  $c$ . При больших  $\lambda$ , что соответствует тонким крыльям ( $y_x^2 \ll 1$  и  $y_z^2 \ll 1$ ) задача была рассмотрена в работах [8, 9], в которых дополнительно предполагалось, что трение не дает заметного вклада в подъемную силу. Основные результаты, полученные в указанных работах, можно сформулировать следующим образом:

1) максимальное качество  $K$  не зависит от формы крыла в плане и определяется соотношением

$$Kc^{1/3} = 1/3 \sqrt[3]{4} \approx 0.529$$

2) верхняя поверхность крыла параллельна набегающему потоку:

$$\eta_1(\xi, \zeta) \equiv 0$$

3) нижняя поверхность крыла дается формулой

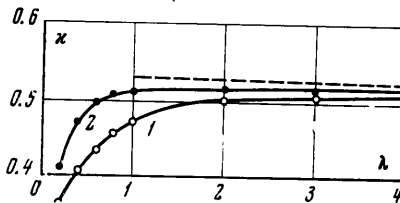
$$\eta_2(\xi, \zeta) = 2^{1/3} c^{1/3} [\xi - m(\zeta)] / \lambda, \quad \eta_2(1, 0) = 2^{1/3} c^{1/3} / \lambda$$

т. е. профили крыла — прямые с одинаковым наклоном, а распределение толщины на задней кромке подобно распределению хорд по размаху ( $\eta_2(1, 0)$  — максимальная толщина крыла).

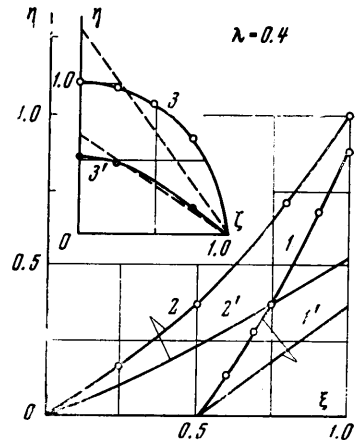
Однако эти результаты несправедливы для крыльев малого удлинения, так как при малых  $\lambda$  нарушается предположение о малости  $y_z$ , поэтому при решении задачи о максимальном качестве для крыла произвольного удлинения необходимо отказаться от предположений малости  $y_x$  и  $y_z$  по сравнению с единицей.

Эта задача решалась численно методом локальных вариаций при  $c = 10^{-2}$  и  $10^{-3}$ ,  $0.2 \leq \lambda \leq 4.0$  для треугольного крыла с  $m(\zeta) = \zeta$  и  $n(\zeta) = 1$  и для крыла с параболической формой передней кромки  $m(\zeta) = \zeta^2$  и  $n(\zeta) = 1$ . Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 4, 5. На фиг. 4  $\kappa = Kc^{1/3}$ , кривая 1 соответствует треугольному крылу для  $c = 10^{-2}$ , а кривая 2 — и треугольному, и параболическому крыльям для  $c = 10^{-3}$ . На фиг. 5 кривые 1, 2 дают профили крыла при  $\zeta = 0.5$  и  $\zeta = 0$  для  $c = 10^{-2}$ , кривые 1', 2' — те же профили для  $c = 10^{-3}$ , кривые 3, 3' дают сечение крыла плоскостью  $\xi = 1$  для  $c = 10^{-2}$  и  $c = 10^{-3}$ . Пунктиром даны кривые, полученные в [8, 9].

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы: 1) При  $\lambda \geq 2 Kc^{1/3} \approx 0.529$ , что согласуется с результатами, полученными для тонких крыльев; с уменьшением  $\lambda$  величина  $Kc^{1/3}$  уменьшается и зависит не только от  $\lambda$ , но и от  $c$ , причем и для крыльев малого удлинения величина максимального качества слабо зависит от формы крыла в плане; 2) Учет вклада трения в подъемную силу не приводит к сколь-нибудь существен-



Фиг. 4



Фиг. 5

ному изменению не только интегральных характеристик  $K$ ,  $c_x$ ,  $c_y$ , но и формы оптимального крыла —  $\eta_1(\xi, \zeta) \approx 0$ , а  $\eta_2(\xi, \zeta)$  несущественно отличается от случая, когда вкладом трения в подъемную силу пренебрегают; 3) с уменьшением  $\lambda$  распределение толщины на задней кромке перестает быть подобным распределению хорд по размаху крыла и, следовательно, профили оптимальных крыльев, хотя и остаются почти прямыми, уже не обладают одинаковыми наклонами к плоскости  $\eta = 0$ ; 4) При  $\lambda \leq 0.3$  профили крыльев становятся сильно вогнутыми, поэтому в этой области результаты носят в основном качественный характер, указывая лишь на тенденцию, так как известно, что на сильно вогнутых телах закон Ньютона хуже согласуется с экспериментом.

В работе [10] была сделана попытка получить решение задачи о максимальном качестве для крыльев малого удлинения тонких только в продольном направлении ( $U_\infty^2 \ll 1$ ). Проведенные расчеты показали, что сделанное предположение о подобии сечений в плоскостях  $\xi = \text{const}$  становится несправедливым при малых  $\lambda$ .

Автор благодарит М. Н. Когана и О. Г. Фридлиндера за многочисленные полезные обсуждения.

Поступило 4 IV 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. 1. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 3; 2, 1965, т. 5, № 1.
2. Черноусько Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 4.
3. Баничук Н. В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методов локальных вариаций. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.
4. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Аэродинамические характеристики неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях. Тр. ЦАГИ, 1961, № 841.
6. Hull D., Miele A. Three-dimensional wings of minimum total drag in newtonian flow. J. Astron. Sci., 1965, vol. 12, No. 2.
7. Theory of optimum aerodynamic shapes. New York — London, Acad. Press, 1965.
8. Майкапар Г. И. Крыло с максимальным аэродинамическим качеством при гиперзвуковых скоростях. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
9. Miele A. Maximum lift-to-drag ratio of a slender wing at hypersonic speeds. Z. Flugwiss., 1967, Jg. 15, H. 7.
10. Miele A., Hull D. G., Brown S. L. Maximum lift-to-drag ratio of a slender, flat-top hypersonic body. Astronaut. Acta, 1967, vol. 13, No. 2.