ТЕПЛОВОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ НЕОДНОРОДНО НАГРЕТОГО ГАЗА ВДОЛЬ ТВЕРДОЙ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И. Н. ИВЧЕНКО, Ю. И. ЯЛАМОВ

(*Москва*)

Исследуется двумя методами решение линеаризованного модельного уравнения Больцмана в задаче о тепловом скольжении неоднородно нагретого газа вдоль твердой плоской стенки.

Первый метод заключается в аналитическом решении интегрального уравнения для средней скорости газа. В случае чисто диффузного или чисто зеркального отражения молекул от поверхности стенки первый метод позволяет аналитически получить два важных результата, а именно среднюю скорость газа на поверхности и на большом удалении от стенки. Построение профиля средней скорости газа данным методом не может быть выполнено аналитически. Второй приближенный метод состоит в разложении функции распределения в ряд по полиномам Сонина в пространстве скоростей и составлении полупространственных моментных уравнений, из которых определяется поправка к функции распределения. Этим методом получено простое аналитическое выражение для функции распределения, из которого может быть найден профиль средней скорости газа при произвольном коэффициенте аккомодации тангенциального импульса. В частных случаях, при которых возможно аналитическое решение задачи первым методом, получено хорошее согласие двух методов расчета.

Известно, что газ, находящийся в поле тангенциального к стенке градиента температуры, должен прийти в движение в направлении градиента температуры (тепловое скольжение). Впервые попытка решения задачи о тепловом скольжении была сделана еще Максвеллом [1]. В анализе Максвелла предполагается, что функция распределения падающих на стенку молекул вблизи ее поверхности не отличается от объемного распределения на большом удалении от стенки. В результате Максвелл получил при любом коэффициенте аккомодации тангенциального импульса следующее выражение для скорости теплового скольжения

$$u^* = {}^3/_4 \nu \operatorname{grad} \ln T$$

Здесь ν — кинематическая вязкость.

Однако в случае не чисто зеркального отражения молекул от стенки, распределение падающих молекул в слое Кнудсена будет отличаться от объемного из-за столкновений с отраженными от стенки молекулами. Таким образом, предположение Максвелла в общем случае не будет иметь места.

Для строгого решения задачи необходимо найти функцию распределения в слое Кнудсена путем решения уравнения Больцмана. Некоторыми исследователями был применен метод Грэда [2] для нахождения функции распределения в слое Кнудсена. Однако применение метода Грэда в задаче о тепловом скольжении приводит к максвелловскому результату [3].

Наиболее строгое, по сравнению с указанными выше анализами, решение задачи о тепловом скольжении получено Соуном [4]. Сравнение результатов, полученных Соуном, с результатами данного исследования приведено в конце этой работы.

1. Рассмотрим газ, находящийся над плоской стенкой в поле тангенциального к стенке градиента температуры. Введем систему координат, в которой начало находится на поверхности стенки, ось x направлена по нормали, ось y — вдоль поверхности в направлении градиента температуры.

Функция распределения удовлетворяет нелинейному интегродифференциальному уравнению Больцмана

$$(\mathbf{v}\nabla) f = \delta f/\delta t, \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \int d\mathbf{v}_1 \int gb(f'f_1' - ff_1)\, db\, d\varepsilon \tag{1.1}$$

Здесь $g = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}|$ — относительная скорость двух сталкивающихся молекул, b — прицельный параметр столкновения, ε — азимутальный угол рассеяния.

Задача может быть линеаризована при условии малости изменения температуры на длине свободного пробега ($\lambda |\nabla \ln T| \ll 1$). В дальнейшем предполагается, что условие линеаризации выполнено. Однако решение даже линеаризованного кинетического уравнения Больцмана представляет большие математические трудности. Один из путей построения решения кинетического уравнения состоит в замене сложного оператора столкновений в форме Больцмана более простым оператором.

Наиболее часто употребляется следующая модельная форма оператора столкновений [5]

$$\delta f / \delta t = K(f_{eq} - f) \tag{1.2}$$

Здесь K — постоянная, равная по порядку величин средней частоте межмолекулярных столкновений

$$f_{eq} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp - \frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2kT}$$

$$n = \int f\,d\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{n}\int \mathbf{v} f\,d\mathbf{v}, \quad \frac{3}{2}kT = \frac{1}{n}\int \frac{m\mathbf{v}^2}{2} f\,d\mathbf{v}$$

Очевидно, что влияние стенки на распределение скоростей молекул имеет конечный радиус, поэтому на больших расстояниях от стенки функция распределения переходит в объемное распределение Чепмена — Энскога [6]. Для газа, находящегося над стенкой, с градиентом температуры вдоль оси y распределение молекул вдали от стенки будет иметь вид

$$f = f^{(0)}[1 + 2c_y G(\infty) + \Psi(\mathbf{c}, y)], \qquad G = (m / 2kT)^{1/2} u_y \tag{1.3}$$

$$f^{(0)} = n(y)\left(\frac{m}{2\pi kT(y)}\right)^{3/2} \exp \frac{-m\mathbf{v}^2}{2kT(y)}, \quad \mathbf{c} = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} \mathbf{v}$$

Здесь G — безразмерная средняя скорость.

В (1.3) функция $\Psi(\mathbf{c}, y)$ для молекул, взаимодействующих как жесткие упругие сферы, дается выражением

$$\Psi(\mathbf{c}, y) = a_1 c_y S_{3/2}^{(1)}(\mathbf{c}^2)\,\partial \ln T / \partial y, \qquad a_1 = {}^{15}/_{16}\,\lambda\sqrt{\pi}, \qquad S_{3/2}^{(1)}(\mathbf{c}^2) = {}^{5}/_{2} - \mathbf{c}^2$$

Здесь $S^{(1)}$ — первый полином Сонина.

Вблизи стенки необходимо различать функции распределения падающих и отраженных молекул, которые в дальнейшем будем обозначать верхними индексами минус и плюс соответственно.

Будем искать функцию распределения в виде

$$f^{\pm} = f^{(0)}[1 + \Psi(\mathbf{c}, y) + \Phi^{\pm}(\mathbf{c}, x)] \tag{1.4}$$

Из оценок, приведенных в работе [7], следует

$$|\partial\Phi / \partial y| \ll |\partial\Phi / \partial x| \tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) дает возможность считать Φ функцией только от $\mathbf{c}$ и x.

Подставляя (1.4) в уравнение (1.1) и используя линеаризованный оператор столкновений в модельной форме, а также учитывая (1.5), получаем следующее уравнение:

$$c_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}-c_yS^{(1)}_{3/2}(\mathbf{c}^2)\frac{\partial\ln T}{\partial y}=K^*\Big[2c_yG(x)-$$

$$-a_1c_yS^{(1)}_{3/2}(\mathbf{c}^2)\frac{\partial\ln T}{\partial y}-\Phi(\mathbf{c},x)\Big],\quad K^*=K(m/2kT)^{1/2} \tag{1.6}$$

При выводе уравнения (1.6) предполагалось, что $p=nkT=\text{const}$. Константу K^*, которая до сих пор не была определена, выберем из требования, чтобы на больших расстояниях от стенки функция распределения переходила в распределение Чепмена — Энскога. Это дает

$$K^*=\frac{1}{a_1}=\frac{16}{15\sqrt{\pi}}\frac{1}{\lambda} \tag{1.7}$$

Учитывая (1.7), получаем после введения безразмерной координаты x_1 уравнение

$$c_x\partial\Phi/\partial x_1=2c_yG(x_1)-\Phi(\mathbf{c},x_1)\quad (x_1=K^*x) \tag{1.8}$$

Для однозначного определения функции $\Phi(\mathbf{c}, x_1)$ необходимо использовать граничное условие на стенке.

Чтобы описать взаимодействие газа с границей, предположим, что доля $(1-q)$ молекул, падающих на стенку, отражается зеркально, доля q отражается диффузно с максвелловским распределением

$$f^+(\mathbf{c},0,y)=qf^{(0)}+(1-q)f^-(-c_x,c_y,c_z,0,y) \tag{1.9}$$

Решение уравнения (1.8) с использованием граничного условия (1.9) имеет вид

$$\Phi^+=\Big[-qa_1g^*S^{(1)}_{3/2}(\mathbf{c}^2)\exp\frac{-x_1}{c_x}-(1-q)\frac{2}{c_x}\int\limits_{\infty}^{0}G(t)\exp\frac{-(x_1+t)}{c_x}+$$

$$+\frac{2}{c_x}\int\limits_0 G(t)\exp\frac{-(x_1-t)}{c_x}dt\Big]c_y\frac{1+\operatorname{sign}c_x}{2} \tag{1.10}$$

$$\Phi^-=\left[\frac{2}{c_x}\int\limits_{\infty}^{x_1}G(t)\exp\frac{-(x_1-t)}{c_x}dt\right]c_y\frac{1-\operatorname{sign}c_x}{2},\quad g^*=\frac{\partial\ln T}{\partial y}$$

В выражениях (1.10) содержится неизвестная функция $G(t)$, которая сама определяется через $\Phi^\pm(c, t)$ посредством формулы

$$G(t)=\pi^{-3/2}\sum_{\pm}\int_{\pm}c_ye^{-\mathbf{c}^2}\Phi^\pm(\mathbf{c},t)\,d\mathbf{c} \tag{1.11}$$

Подставив (1.10) в (1.11), получим интегральное уравнение для $G(t)$

$$G(x_1)=\pi^{-1/2}\Big[-{}^1/_4\,qa_1g^*J_0(x_1)+{}^1/_2\,qa_1g^*J_2(x_1)+ \tag{1.12}$$

$$+(1-q)\int_0^\infty G(t)J_{-1}(x_1+t)\,dt+\int_0^{x_1} G(t)J_{-1}(x_1-t)\,dt-$$

$$-\int_\infty G(t)J_{-1}(t-x_1)\,dt\Big]$$

Здесь $J_n(t)$ — функции, определяемые посредством интеграла

$$J_n(t)=\int_0^\infty y^n \exp\left[-\left(y^2+\frac{t}{y}\right)\right]dy$$

Встречающиеся в уравнении (1.12) интегралы проинтегрируем по частям. Затем проинтегрируем обе части полученного уравнения по x_1 от 0 до x_1, и, учитывая, что все выражения, содержащие x_1, стремятся к нулю при $x_1\to\infty$, будем иметь

$$-\frac{1}{8}a_1g^*+\frac{1}{2}G(0)=-\int_0^\infty \frac{dG}{ds}J_1(s)\,ds. \tag{1.13}$$

$$\int_0 \frac{dG}{ds}J_1(|x_1-s|)+(q-1)\int_0^\infty \frac{dG}{ds}J_1(x_1+s)\,ds=$$

$$=-{}^1\!/_4 qa_1g^*J_1(x_1)+{}^1\!/_2 qa_1g^*J_3(x_1)-qG(0)J_1(x_1) \tag{1.14}$$

Очень просто получить решение уравнений (1.14) и (1.13) в случае зеркального отражения молекул от поверхности стенки ($q=0$).

При $q=0$ уравнение (1.14) является однородным уравнением Фредгольма первого рода с полным симметричным ядром. Это уравнение имеет единственное тривиальное решение

$$dG\,/\,ds=0$$

Тогда из (1.13) найдем

$$G(0)=G(\infty)={}^1\!/_4 a_1g^* \tag{1.15}$$

Скорость теплового скольжения — это скорость газа, которая установится на бесконечном удалении от стенки, поэтому из (1.15) будем иметь для скорости теплового скольжения следующее выражение:

$$u^*=\frac{3}{4}\nu\frac{\partial\ln T}{\partial y},\qquad \nu=\frac{5\lambda}{16}\left(\frac{2kT\pi}{m}\right)^{1/2} \tag{1.16}$$

Результат, даваемый формулой (1.16), совпадает с результатом, полученным Максвеллом.

Наибольший практический интерес представляет случай чисто диффузного отражения молекул от стенки ($q=1$). Для этого случая интегральное уравнение (1.14) будет иметь вид

$$\int_0^\infty \frac{dG}{ds}J_1(|x_1-s|)\,ds=\frac{1}{2}a_1g^*J_3(x_1)-J_1(x_1)\left(\frac{1}{4}a_1g^*+G(0)\right) \tag{1.17}$$

Решение уравнения (1.17) указано Веландером [8], который пользовался методом, разработанным Винером и Левинсоном [9]. В работе [8] показано, что решение можно свести к виду

$$\frac{dG}{ds} = \begin{cases} (2\pi)^{-1}\zeta(s), & s \geqslant 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\zeta(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(\omega) e^{-i\omega s} d\omega, \quad z(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dG(s)}{ds} e^{i\omega s} ds \tag{1.19}$$

Компонента Фурье $z(\omega)$ дается выражением

$$z(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-y^2)[{}^1/{}_2 g^* a_1 y^4 - ({}^1/{}_4 g^* a_1 + G(0))y^2]\,dy}{(1 - i\omega y)\xi_1(\omega)\xi_2(-i/y)} \tag{1.20}$$

Здесь величины ξ_n даются выражениями

$$\xi_n(\omega) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n i \ln j_1(s)\, ds}{s - \omega}\right\} \tag{1.21}$$

$$j_1(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_1(|\eta|) e^{i\eta s} d\eta = 2\int_0^{\infty} \frac{\eta^2 e^{-\eta^2} d\eta}{1 + s^2\eta^2}. \tag{1.22}$$

К сожалению, эти интегралы нельзя в общем случае взять аналитически. Однако нетрудно получить два важных результата, а именно значения $G(0)$ и $G(\infty)$. Эти значения позволяют аналитически определить скорость теплового скольжения.

Из выражения (1.18) следует, что для того чтобы функция dG/ds была интегрируемой, $z(\omega)$ должна стремиться к нулю при $\omega \to \infty$. В силу того что $\xi_1(\omega)$ имеет порядок $0(\omega^{-1})$ при $\omega \to \infty$, из (1.20) получим

$$G(0) = \left[\frac{I_3}{2I_1} - \frac{1}{4}\right] a_1 \frac{\partial \ln T}{\partial y} \tag{1.23}$$

Здесь введены обозначения

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{y \exp(-y^2)\,dy}{\xi_2(-i/y)} \qquad I_3 = \int_0^{\infty} \frac{y^3 \exp(-y^2)\,dy}{\xi_2(-i/y)}$$

В интеграле I_j функция $\xi_2(-i/y)$ дается формулой

$$\xi_2(-i/y) = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{y \ln j_1(s)\,ds}{1 + s^2 y^2}\right)$$

Из соотношений (1.19), (1.20) можно определить $G(\infty)$

$$z(0) = G(\infty) - G(0) \tag{1.24}$$

Выражение (1.24) приводит к следующему значению $G(\infty)$:

$$G(\infty) = \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{I_3}{I_1} + \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4} I_4\right] - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4} \frac{I_3 I_2}{I_1}\right\} a_1 \frac{\partial \ln T}{\partial y} \tag{1.25}$$

Здесь I_2 и I_4 даются следующими интегралами:

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{y^2 \exp(-y^2)\,dy}{\xi_2(-i/y)}, \qquad I_4 = \int_0^\infty \frac{y^4 \exp(-y^2)\,dy}{\xi_2(-i/y)}$$

Величины I_j, найденные путем численного вычисления, будут иметь значения

$$I_1 = 1.205, \quad I_2 = 0.8501, \quad I_3 = 0.9602, \quad I_4 = 1.192$$

После подстановки численных значений величин I_j в формулы (1.23) и (1.25) получим следующее выражение для средней скорости газа вблизи стенки и скорости теплового скольжения:

$$u(0) = 0.4453\nu \frac{\partial \ln T}{\partial y}, \quad u^* = u(\infty) = 1.265\nu \frac{\partial \ln T}{\partial y} \tag{1.26}$$

Формулы (1.26) получены для случая чисто диффузного отражения молекул от стенки. Предполагается также, что молекулы взаимодействуют как жесткие упругие сферы.

Развитая выше теория теплового скольжения основана на аналитическом решении интегрального уравнения для средней скорости, полученного из модельного уравнения Больцмана. Однако данным методом построение профиля средней скорости газа не может быть проведено аналитически.

Простое аналитическое выражение для функции распределения может быть найдено приближенным методом полупространственных моментов [10]. Этим методом может быть получен профиль средней скорости газа при произвольном коэффициенте аккомодации.

2. Будем искать функцию распределения в виде (1.4). Поправку $\Phi^\pm(\mathbf{c}, x)$ будем искать в виде разложения в ряд по полиномам Сонина в пространстве скоростей

$$\Phi^\pm(\mathbf{c}, x) = a_0^\pm(x) c_y + a_1^\pm(x) c_y S_{3/2}^{(1)}(\mathbf{c}^2) \tag{2.1}$$

Функция $\Phi(\mathbf{c}, x)$ дается выражением

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{c}, x) = {}&{}^1/_2(a_0^+ + a_0^-) c_y + {}^1/_2(a_0^+ - a_0^-) c_y \operatorname{sign} c_x + \\ &+ {}^1/_2(a_1^+ + a_1^-) c_y S_{3/2}^{(1)}(\mathbf{c}^2) + {}^1/_2(a_1^+ - a_1^-) c_y S_{3/2}^{(1)}(\mathbf{c}^2) \operatorname{sign} c_x\end{aligned} \tag{2.2}$$

Для средней скорости легко получить формулу

$$G(x) = {}^1/_4[a_0^+(x) + a_0^-(x)] \tag{2.3}$$

Подставим (2.2) и (2.3) в уравнение (1.8), умножим обе части уравнения последовательно на

$$c_y(1 \pm \operatorname{sing} c_x) e^{-\mathbf{c}^2} d\mathbf{c}, \qquad c_y S_{3/2}^{(1)}(\mathbf{c}^2)(1 \pm \operatorname{sign} c_x) e - \mathbf{c}^2 d\mathbf{c}$$

затем, интегрируя по всему пространству скоростей, получим систему дифференциальных уравнений для функций $a_i^\pm(x)$

$$\begin{aligned} da_0^\pm / dx &= -{}^{13}/_{24} K^* \sqrt{\pi}(a_0^+ - a_0^-) \mp {}^5/_{12} K^* \sqrt{\pi} a_1^\pm \\ da_1^\pm / dx &= -{}^1/_{12} K^* \sqrt{\pi}(a_0^+ - a_0^-) \mp {}^5/_6 K^* \sqrt{\pi} a_1^\pm \end{aligned} \tag{2.4}$$

Решение системы (2.4) имеет вид

$$a_0^+ = C_1 + C_2 e^{-\alpha x}, \qquad a_0^- = C_1 + \alpha_0^- C_2 e^{-\alpha x}$$
$$a_1^+ = \alpha_1^+ C_2 e^{-\alpha x}, \qquad a_1^- = \alpha_1^- C_2 e^{-\alpha x} \tag{2.5}$$

Здесь $\alpha = {}^{16}/_{15}({}^{55}/_{72})^{1/2}\lambda^{-1}$

$$\alpha_0^- = (23\sqrt{72} - 12\sqrt{55})b^{-1}, \qquad \alpha_1^+ = (22\sqrt{72} + 25\sqrt{55})b^{-1}$$
$$\alpha_1^- = (22\sqrt{72} - 25\sqrt{55})b^{-1}, \qquad b = 23\sqrt{72} + 12\sqrt{55}$$

Константы C_1 и C_2 находятся из граничного условия (1.9) и даются следующими выражениями:

$$C_1 = a_1 \frac{1-(1-q)\alpha_0^-}{\alpha_1^+ - (1-q)\alpha_1^-}\frac{\partial \ln T}{\partial y}, \qquad C_2 = -qa_1 \frac{1}{\alpha_1^+ - (1-q)\alpha_1^-}\frac{\partial \ln T}{\partial y}$$

Зная функции $a_i^\pm(x)$, легко получить выражение для скорости теплового скольжения

$$u^* = u(\infty) = \frac{3}{2}\nu\frac{1-(1-q)\alpha_0^-}{\alpha_1^+ - (1-q)\alpha_1^-}\frac{\partial \ln T}{\partial y} \tag{2.6}$$

В частных случаях будем иметь следующие значения для скорости теплового скольжения:

$$u^* = \begin{cases} 1.169\nu\partial \ln T / \partial y & \text{при } q = 1 \\ {}^3/_4\nu\partial \ln T / \partial y & \text{при } q = 0 \end{cases}$$

Средняя скорость газа в случае диффузного отражения молекул от стенки дается формулой

$$u(x) = u^*[1 - 0.6866 \exp(-0.9323x\lambda^{-1})] \tag{2.7}$$

При чисто зеркальном отражении молекул от стенки скорость постоянна.

Сравнение результатов двух методов расчета показывает, что скорость теплового скольжения отличается только на 8%. Средние скорости вблизи стенки отличаются несколько больше, на 18%. Таким образом, метод полупространственных моментных уравнений позволяет получить простое аналитическое решение, дающее хорошие результаты.

Проделанные расчеты показывают, что при чисто зеркальном отражении молекул от поверхности стенки функция распределения падающих молекул во втором приближении кинетической теории газов не зависит от координаты x, и в этом случае скорость скольжения совпадает с максвелловским значением. При диффузном отражении молекул от стенки функция распределения падающих молекул вблизи стенки существенно отлична от распределения в прилегающем объеме газа. Скорость теплового скольжения при $q = 1$ на 69% выше максвелловского результата.

Сравним полученные результаты с результатами других анализов, основанных на линеаризованном модельном уравнении Больцмана — Крука.

В работе Соуна [4] в результате приближенного решения интегрального уравнения для средней скорости получено выражение для скорости теплового скольжения в предположении чисто диффузного характера отражения газовых молекул от стенки. В цитируемой работе скорость теплового скольжения выражена через частоту межмолекулярных столкновений, которая является столкновительным параметром в модельной форме оператора столкновений. В работе Соуна отсутствует определенный выбор столкновительного параметра. Выбирая этот параметр в виде (1.7), из формулы Соуна можно получить следующее выражение для скорости теплового скольжения:

$$u^* = 1.149\nu\partial \ln T / \partial y \tag{2.8}$$

Выражение (1.27) является более точным, чем выражение (2.8), которое получено в результате приближенного аналитического решения интегрального уравнения для средней скорости газа.

Поступило 14 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell J. C. On Stresses in rarefied gases, arising from inqualities of temperature. Philos. Trans. Roy. Soc., 1879, vol. 170, pp. 231—256.
2. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. Communs Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, No. 4. (Русс. перев. О кинетической теории разреженных газов. период. сб. перев. иностр. статей «Механика», 1952, № 4, № 5).
3. Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э. Скольжение и температурный скачок на границе газовой смеси. ЖЭТФ, 1959, т. 36, вып. 6.
4. Sone Y. Thermal creep in rarefied gas. J. Phys. Soc. Japan, 1966, vol. 21, No. 9, pp. 1836—1837.
5. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. Phys. Rev., 1954, vol. 94, No. 3, p. 511.
6. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. Дерягин Б. В., Яламов Ю. И., Ивченко И. Н. Применение метода Бхатнагара, Гросса и Крука для определения скорости теплового скольжения газа вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, Сер. мат. физ, 1967, т. 173, вып. 6.
8. Welander P. On the temperature jump in a rarefied gas. Ark. Fys., 1954, vol. 7, No. 6.
9. Wiener N. The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, 1949.
10. Gross E. P., Jaskson E. A., Ziering S. Boundary value problems in kinetic theory of gases. Ann. Phys., 1957, vol. 1, No. 2. (Рус. перев.: Граничные задачи в кинетической теории газов, период. сб. перев. иностр. статей «Механика», 1958, № 5).