

## О ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОВ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

В. М. КРОЛЬ, Ф. А. СЛОБОДКИНА

(Москва)

В работе [1] рассмотрены одномерные нестационарные течения горючей смеси газов с учетом конечной скорости химических реакций. В ней указаны условия автомодельности таких движений, произведена математическая постановка задачи, приведен ряд численных расчетов.

Авторы указывают на необходимость проведения дополнительного исследования, так как им не удалось получить численно, путем предельных переходов, самоподдерживающихся детонационных волн, распространяющихся со скоростью Чепмана — Жуге (ЧЖ).

В данной статье указывается причина, по которой в [1] не удалось выйти на режим ЧЖ, проводится качественный анализ с использованием результатов работы [2] системы уравнений, описывающей автомодельные течения газа с конечной скоростью химической реакции, производится предельный переход к самоподдерживающимся детонационным волнам ЧЖ при наличии химических реакций. Здесь же указывается, что задача о нестационарных течениях горючей смеси газов с конечной скоростью химических реакций аналогична задаче о движении газа, нагреваемого излучением, рассмотренной в [3].

1. Система уравнений, описывающая одномерные нестационарные движения газа с учетом конечной скорости химических реакций, в массовых лагранжевых координатах имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + r^{v-1} \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial r^v}{\partial t} = v u, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u \quad (1.1)$$

$$v \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} p v + \beta Q \right), \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} = -k \beta^\mu p^n v^q \exp \frac{-E}{p v}$$

Здесь  $v$  — удельный объем,  $p$  — давление,  $u$  — скорость газа,  $r$  — эйлерова координата,  $\beta$  — массовая концентрация непрореагировавших молекул,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $E$  — энергия активации,  $Q$  — полное тепловыделение в единице массы газа,  $m$  — массовая лагранжева координата,  $t$  — время,  $v = 1, 2, 3$  соответственно для плоских, цилиндрических и сферических волн,  $k, \mu, n, q$  — постоянные величины.

Для определенности будем считать энергию активации  $E$  и тепловыделение  $Q$  постоянными величинами.

В [1] приведены уравнения и условия автомодельности для более общего случая, когда  $E$  и  $Q$  — степенные функции  $p, v, r, t$ , однако все численные расчеты относятся к постоянным  $E$  и  $Q$ .

Рассмотрим такие движения, когда в начальный момент ( $t = 0$ ) газ покоится, т. е.  $u(m, 0) = 0$ , а его удельный объем распределен по радиусу по степенному закону

$$v(m, 0) = A [r(m, 0)]^f \quad (A, f = \text{const}) \quad (1.2)$$

Будем считать, что химическая реакция в газовой горючей смеси, инициируется прохождением ударной волны и что интенсивность волны достаточно велика, чтобы можно было пренебречь давлением перед ней. Будем также пренебрегать энергией, затраченной в начальный момент на возбуждение ударной волны.

Предположим, что при  $t \geq 0$  ударная волна поддерживается поршнем (плоским, цилиндрическим или сферическим), скорость которого  $u(0, t)$  задана или известно оказываемое им на газ давление  $p(0, t)$ . В частном случае, когда  $u(0, t) = 0$ , будем иметь режим самоподдерживающейся химической реакции. Если  $p(0, t) = 0$ , то около центра образуется пустота. В работе [4] показано, что в случае идеальной сферической детонации (без учета конечной скорости химических реакций) пустота образуется в центре при  $f > 3(\gamma + 1) / (3\gamma - 1)$ .

Рассмотрим автомодельные решения системы (1.1) при высказанных выше предположениях.

Условия автомодельности в данном случае имеют вид

$$u(0, t) = u_0 = \text{const} \quad \text{или} \quad p(0, t) = p_0 t^{1/(q-n)} \quad (1.3)$$

$$f = 1 / (n - q)$$

Введем автомодельные переменные  $V, P, U, R, \beta, x$  по формулам

$$\begin{aligned} v(m, t) &= v_0 t^f V(x), & p(m, t) &= v_0^{-1} Q t^{-f} P(x), & v_0 &= A Q^{f/2} \\ u(m, t) &= Q^{1/2} U(x), & r(m, t) &= Q^{1/2} t R(x) \\ \beta(m, t) &= \beta(x), & x &= m t^a v_0 Q^{-v/2}, & a &= f - v \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тогда система (1.1) примет вид

$$V' = \frac{(a+1)b^2 V^2 - (\gamma-1)(ax\beta' + fPV) - (v-1)b^2 V^3 R^{-v} ax}{ax\gamma P(1-M^2)}$$

$$P' = -b^2 V' - (a+1)b^2 V / ax + (v-1)V^2 b^2 R^{-v}$$

$$R' = R^{1-v} V, \quad P' + bU' = 0 \quad (1.5)$$

$$ax\beta' = -K\beta^\mu P^n V^q \exp(-e/PV)$$

$$b = axR^{1-v}, \quad e = E/Q, \quad K = kQ^n v_0^{q-n}, \quad M^2 = b^2 V / \gamma P.$$

(штрих — дифференцирование по  $x$ )

Соотношения между автомодельными переменными на любом сильном разрыве, имеющем автомодельную координату  $x_s$ , могут быть получены непосредственно из системы (1.5) (методом, указанным в [5]) и имеют вид

$$V_2 = \frac{\gamma(b^2 V_1 + P_1) \mp [(b^2 V_1 - \gamma P_1)^2 - 2b^2(\gamma^2 - 1)(\beta_1 - \beta_2)]^{1/2}}{(\gamma + 1)b^2} \quad (1.6)$$

$$P_2 = P_1 + b^2(V_1 - V_2), \quad U_2 = U_1 - b(V_1 - V_2), \quad b = ax_s R_s^{1-v}$$

$$R_1 = R_s = R_2$$

(индексами 1, 2 отмечены величины справа и слева от разрыва соответственно)

Отметим, что  $\beta_2 \neq \beta_1$  лишь в предельном детонационном случае. При  $\beta_2 = \beta_1$  знак плюс перед корнем в (1.6) означает, что разрыв отсутствует, а при  $\beta_1 \neq \beta_2$ , как известно из [6], знак плюс перед корнем имеет место в случае принудительного поджигания горючей смеси (со скоростью, большей чем следует из условия ЧЖ).

Сформулируем краевую задачу для системы уравнений (1.5).

На поршне при  $x = 0$  имеем

$$U(0) = U_0 \quad \text{или} \quad P(0) = P_0 \quad (1.7)$$

Обозначая автомодельную координату сильной ударной волны, поджигающей смесь, через  $x_1$ , запишем условия на ней в виде

$$V = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad P = \frac{2}{\gamma + 1} (ax_1 R^{1-v})^2, \quad \beta = 1 \quad (1.8)$$

$$U = -\frac{2ax_1 R^{1-v}}{\gamma + 1}, \quad R = (-ax_1)^{1/v}$$

Величина  $g = \gamma P(1 - M^2)$  из (1.5) на ударных волнах меняет знак. В частности, слева и справа от  $x = x_1$  имеем

$$g(x_1 - 0) = -g(x_1 + 0) = (-ax_1)^{2/\nu} \quad (1.9)$$

Таким образом, для решения задачи необходимо проинтегрировать систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5) при шести граничных условиях (1.7) и (1.8). Дополнительным произволом является координата  $x_1$  ударной волны.

2. Проведем качественное исследование системы (1.5). Особые точки этой системы при  $x \neq 0$  определяются условиями

$$\begin{aligned} 1 - M^2 = 0, \quad (a + 1)b^2V^2 - (\gamma - 1)(a\alpha\beta' + fPV) - \\ - (\nu - 1)b^3V^3/R = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и принадлежат четырехмерной поверхности в шестимерном пространстве переменных  $x, V, R, P, U, \beta$ . Интегральные кривые в малой ее окрестности лежат в двумерной плоскости [2].

Как следует из результатов работы [2], система (1.5) может быть записана таким образом, что особенность содержится лишь в одном из уравнений, а правые части остальных уравнений конечны в окрестности особой точки. Характер особенности находится, как обычно, по коэффициентам линейного разложения правых частей (1.5) в окрестности особой точки. Уравнение для определения собственных чисел  $\lambda_{1,2}$  в данном случае имеет вид

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(a+1)b_*^2V_* - (\gamma-1)f(P_* - b_*^2V_*)}{ax_*} - 3(\nu-1)b_*^2V_*^2R_*^{-\nu} + \right. \\ \left. + (\gamma-1)c \left[ \frac{q}{V_*} + \frac{e(P_* - b_*^2V_*)}{P_*^2V_*^2} - \frac{nb_*^2}{P_*} \right] + \gamma w - dV_* \right\} \\ \omega = -(\gamma+1)b_*^2 \left[ \frac{a+1}{ax_*} V_*^2 \left( d - \frac{b_*^2}{x_*} \right) - (\nu-1)(V_*^3R_*^{-\nu}d - \right. \\ \left. - \nu y b_*^2V_*^3R_*^{-\nu-1}) - (\gamma-1)f \left( \frac{wV_*}{ax_*} - \frac{P_*V_*}{ax_*^2} \right) + \right. \\ \left. + (\gamma-1)c \left( \frac{nw}{P_*} + \frac{ew}{P_*^2V_*} - \frac{\mu c}{\beta_*} - \frac{1}{x_*} \right) \right] \\ c = \frac{K\beta_*^\mu P_*^\nu V_*^q}{ax_*} \exp \left( -\frac{e}{P_*V_*} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = V_*R_*^{1-\nu}, \quad d = 2a^2x_*R_*^{1-2\nu}[R_* - (\nu-1)yx_*] \\ w = -(a+1)b_*^2V_*^2(ax_*)^{-1} + (\nu-1)b_*^2V_*^2R_*^{-\nu} \end{aligned}$$

В (2.2) звездочкой отмечены значения всех величин в особой точке. Различный характер особенностей в зависимости от знаков  $\lambda_1, \lambda_2$  и устойчивость течений вблизи особых точек подробно исследованы в [2].

В рассматриваемом случае за ударной волной (1.8) имеем  $M^2 < 1$ . Интегральные кривые за ударной волной могут либо входить в особенность типа узла с  $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_2 > 0$ , течение в окрестности которого неустойчиво [2], либо проходить в окрестности особенности типа седла, где  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . В последнем случае через точку  $x = x_*$  проходят два решения, причем в силу (1.8) нас интересует решение, вдоль которого величина  $1 - M^2$  меняет знак с положительного на отрицательный. Заметим, что это решение с точки зрения [2] устойчиво.

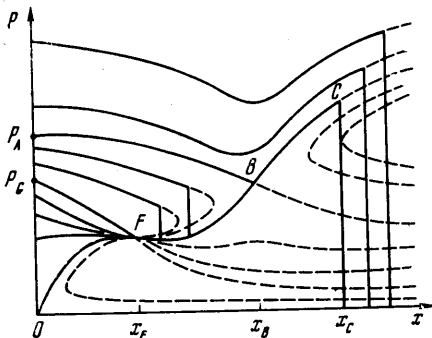
Из (2.1) видно, что при больших скоростях химических реакций произведение  $K\beta^\mu$  конечно в особой точке, и при малых значениях  $\beta$  за ударной волной, как следует из (2.2), особенность будет седлом, так как  $\omega \rightarrow +\infty$  при  $\beta \rightarrow 0$ .

Заметим, что условие прохождения решения через седло однозначно определяет положение ударной волны  $x = x_1$ . Поэтому для того чтобы удовлетворить граничному условию (1.7) при  $x = 0$ , необходимо иметь еще один произвол. Таким произволом может быть либо положение еще одного разрыва в решении, либо прохождение решения через особенность типа узла с  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , в окрестности которого решение устойчиво [2]. И в том и в другом случае величина  $1 - M^2$  меняет знак с отрицательного на положительный.

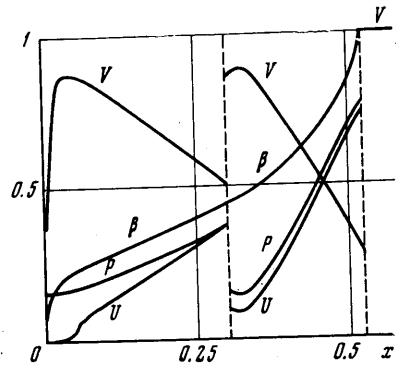
Можно показать, что в случае детонационной волны, когда ударная волна и следующая за ней область горения рассматриваются как одна поверхность разрыва, уравнения, описывающие течение за такой волной, могут иметь особенность типа узла. Поэтому и здесь при больших  $K$  можно ожидать появления узловой особой точки между седлом и  $x = 0$ .

Заметим, что разрыв в решении за седловой особенностью может возникать и в том случае, когда между седлом и  $x = 0$  имеется особенность типа узла, фокуса и при отсутствии особых точек.

Проведенный анализ позволяет построить картину интегральных кривых системы (1.5) при достаточно больших  $K$ . Качественный ход интегральных кривых системы (1.5) в плоскости  $x, P$  изображен на фиг. 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

Сплошными линиями на ней изображены решения краевой задачи (1.5) — (1.8), соответствующие различным значениям  $P_0$ , а пунктирными — интегральные кривые и их участки, не удовлетворяющие краевым условиям (1.7). Из фиг. 1 видно, что решения с величиной  $P_0 > P_A$ , лежащие выше кривой  $ABC$ , содержат только один сильный разрыв, автомодельная координата которого  $x_1 > x_C$  и зависит от  $P_0$  (такого рода решения получены в [1]). Решения с  $P_G < P_0 < P_A$  имеют один общий разрыв в точке  $x_1 = x_C$ , проходят через особую точку (седло)  $B$ , претерпевают второй разрыв на интервале  $(x_F, x_B)$ , координата которого уже зависит от величины  $P_0$ . Одно единственное решение с  $P_0 = P_A$  имеет один сильный разрыв в точке  $x_1 = x_C$  и один слабый разрыв в точке  $x_1 = x_B$  (на фиг. 1 ему соответствует кривая  $ABC$ ). При  $P_0 < P_G$  второй разрыв исчезает за счет прохождения интегральной кривой через узел в точке  $F$ .

Таким образом, еще до выхода на детонационный режим при  $P_0 < P_A$  возникает ситуация, когда параметры ударной волны, инициирующей химическую реакцию, не зависят от условий при  $x = 0$ . Однако в отличие от идеальной детонации, в которой энергия химической реакции выделя-

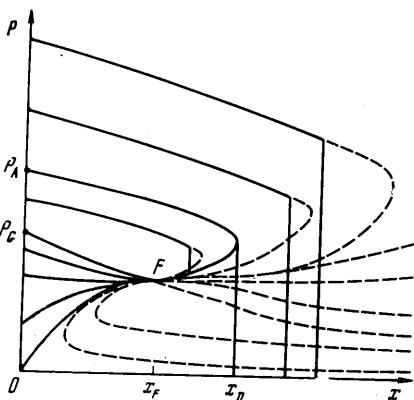
ется в бесконечно тонком слое за ударной волной, в рассматриваемом случае независимым от условий в точке  $x = 0$  оказывается целый участок решения на отрезке  $[x_B, x_C]$ , заключенный между особой точкой  $B$  и первой ударной волной  $x_C$ .

Следует отметить, что ни на интервале  $(x_B, x_C)$ , ни на участке слева за второй ударной волной или за особенностью типа узла не может быть еще одного сильного разрыва. Нетрудно проверить по (1.6), что он оказался бы недопустимым скачком разрежения, так как скачку уплотнения

соответствует переход величины  $1 - M^2$  из области  $1 - M^2 < 0$  в область  $1 - M^2 > 0$ .

При фиксированной величине  $e = E/Q$  и при  $K \rightarrow \infty$  величина  $x_B - x_C$  стремится к нулю, т. е. точки  $x_B$  и  $x_C$  сближаются и в пределе конфигурация, состоящая из особой точки  $x_B$  и ударной волны в точке  $x = x_C$ , переходит в один детонационный разрыв (1.6) с величиной  $\beta_2 = 0$  и автомодельной координатой

$$x_{1D} = -\frac{[2(\gamma^2 - 1)]^{\nu/2}}{a}$$



Фиг. 3

В обратном предельном случае при  $K \rightarrow 0$  (при фиксированной величине  $e$ ) координата особой точки  $x_B$  может «уходить» из области  $x > 0$  (при некотором  $K = K^*(e, \mu, n, q, \gamma, \nu)$ ) и все режимы с  $K < K^*$  окажутся «пересжатыми», т. е. не имеют разрыва, не зависящего от условий при  $x = 0$ .

Численные расчеты уравнений (1.5) с краевыми условиями (1.7), (1.8) подтверждают проведенный качественный анализ. Одно из решений с двумя разрывами приведено на фиг. 2, где выбрано

$$\mu = 2, \quad n = 1, \quad q = 0, \quad \nu = 3, \quad \gamma = 5/3, \quad e = 0, \quad K = 10, \quad U_0 = 0.$$

В этом решении координата особой точки  $x_B = 0.32$ , а координата второго разрыва  $x_s = 0.30$ .

Нетрудно заметить, что система (1.5), описывающая автомодельные движения газа с учетом конечной скорости химических реакций, с точностью до постоянных множителей и переменного экспоненциального множителя для концентрации непрореагировавших молекул аналогична автомодельным уравнениям, описывающим движение газа, нагреваемого излучением [8, 5].

В [3] для движений газа с ударной волной, инициирующей поглощение излучения, также были получены решения с двумя ударными волнами и особой точкой типа седла между ними.

Отметим, что решения с двумя разрывами получались в работе [7] при изучении стационарного обтекания конуса потоком детонирующего газа, а также в работе [8] при нестационарном движении за детонационной волной с расширяющимся из центра поршнем.

В свете указанных выше обстоятельств становится понятным, почему в работе [1] не удалось получить путем предельного перехода режимов самоподдерживающихся волн детонации, распространяющихся со скоростью ЧЖ: не была учтена возможность появления в решении, начиная с некоторого  $K^*$ , внутренней особой точки и второго сильного разрыва. Но именно такая конфигурация, как указано выше, и предшествует волнам детонации ЧЖ. Все решения, полученные в [1], либо принадлежат к случаю, когда  $K < K^*$ , либо относятся к режимам, лежащим выше кривой ABC (фиг. 1).

3. Ввиду особой важности и универсальности волн детонации, описывающих в пределе движения газа как с учетом тепловыделения за счет химических реакций, так и с поглощением излучения, рассмотрим их более подробно. Задача о распространении одномерных детонационных волн с постоянным по времени энергосыделением по газу переменной плотности описывается первыми четырьмя уравнениями (1.5) при  $\beta' = 0$ . Соотношения на сильном разрыве (1.6) остаются в силе, а краевые условия для режима ЧЖ имеют вид

$$U(0) = U_0 \text{ или } P(0) = P_0 \text{ при } x = 0 \tag{3.1}$$

$$V = \gamma / (\gamma + 1), \quad P = 2(\gamma - 1), \quad R = \gamma^2 (\gamma^2 - 1)$$

$$U = \gamma^2 (\gamma - 1) / (\gamma + 1) \text{ при } x_1 = x_D = -a^{-1} [2(\gamma^2 - 1)]^{1/2}.$$

Согласно (3.1) в точке  $x = x_D$  величина  $1 - M^2$  равна нулю, поэтому производные функции  $V, P, U$  в ней бесконечны. С точностью до величин более высокого порядка малости в достаточно малой окрестности точки  $x = x_D$  эти функции представляются в виде

$$V = \frac{\gamma}{\gamma + 1} + h, \quad P = 2(\gamma - 1) - b^2 h, \quad U = \sqrt{2(\gamma - 1) / (\gamma + 1) + b h} \tag{3.2}$$

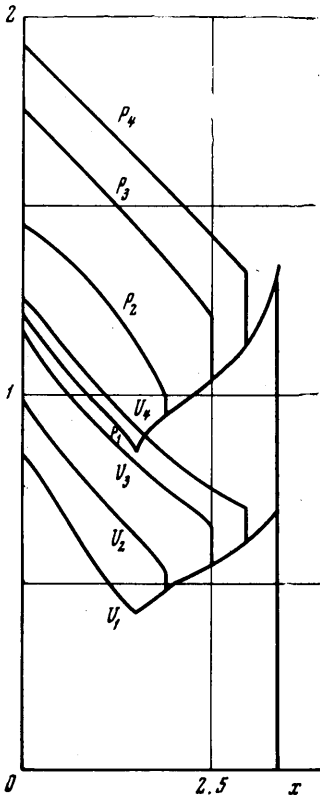
$$h = \left[ \frac{(a + 1)b^2 V^2 - (\gamma - 1)fPV - (\gamma - 1)b^3 V^3 / R}{ax_D b^2 \gamma} (x - x_D) \right]^{1/2} \tag{3.3}$$

Для того чтобы решение слева от  $x = x_D$  существовало, требуется, чтобы подкоренное выражение в (3.3) было положительным. Отсюда сразу следует необходимое условие существования одномерной расходящейся детонационной волны ЧЖ. После подстановки в (3.3) величин  $V, P, U, x$  из (3.1) получаем

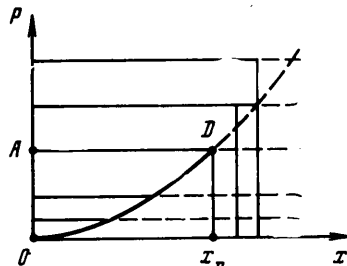
$$f < (\gamma - 1)\gamma / (\gamma + 1) \tag{3.4}$$

Это неравенство совпадает с приведенным в [4] условием для сферических ( $\nu = 3$ ) волн детонации ЧЖ. При невыполнении условия (3.4) интегральные кривые автономных уравнений развернуты в противоположную сторону от точки  $x = 0$  (фиг. 3) и все волны детонации оказываются пересажатыми, т. е. распространяются со скоростью, меньшей скорости звука в газе за детонационной волной. Это имеет место, в частности, при  $\nu = 2, \mu = 2, n = 1, q = 0$  (бимолекулярные реакции при наличии цилиндрической симметрии).

В тех случаях, когда режимы детонации ЧЖ существуют, качественный ход интегральных кривых в плоскости  $x, P$  имеет вид, изображенный на фиг. 3. При этом второй силь-



Фиг. 4



Фиг. 5

ный разрыв сохраняется у решений с величиной  $P_0$ , удовлетворяющей неравенству  $P_0 < P_0 < P_A$ . Функция  $(1 - M^2)$  на интервале  $(x_F, x_D)$  между особой точкой  $x_F$  и детонационным разрывом ЧЖ в  $x_D$  отрицательна, поэтому сильный разрыв в любой точке  $x$ , из интервала  $(x_F, x_D)$  является скачком уплотнения и соответствует

некоторому решению с  $P_0$  из интервала  $(P_G, P_A)$ . Это обстоятельство, по-видимому, впервые было отмечено в работе [3] для детонационных волн ЧЖ с переменным по времени энергосвыделением на фронте.

Решения с  $P_0 < P_G$  содержат один сильный разрыв ЧЖ в точке  $x = x_D$  и один слабый разрыв в особой точке  $x = x_F$ , имеющей тип узла. При постоянном по времени энергосвыделении и постоянной начальной плотности газа ( $f = 0$ ) такими решениями, в частности, являются плоская, цилиндрическая и сферическая ( $\nu = 1, 2, 3$ ) волны детонации ЧЖ [4, 6, 9] с покоящимся в центре ядром ( $U_0 = 0, U(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq x_F$ ).

Автомодельные профили сферических детонационных волн, распространяющихся в режиме ЧЖ по газу переменной плотности, с постоянным по времени энергосвыделением на фронте, с двумя сильными разрывами и с различными скоростями поршня  $U_0$  изображены на фиг. 4 ( $\nu = 3, \gamma = 5/3, f = 1$ ).

Исключением из указанного выше правила являются плоские волны детонации ЧЖ ( $\nu = 1$ ) с постоянным по времени энергосвыделением, распространяющиеся по однородной среде ( $f = 0$ ). В этом случае второй сильный разрыв оказывается слабым, так как через точку  $x_D$  проходит кривая  $OD$ , все точки которой являются особыми. На ней  $1 - M^2 \equiv 0$  и через каждую ее точку проходят два решения. Качественный ход интегральных кривых в плоскости  $x, P$  изображен для этого исключительного случая на фиг. 5.

В заключение авторы выражают благодарность И. В. Немчинову и А. Г. Куликовскому за обсуждение работы.

Поступило 23 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бишимов Е., Коробейников В. П., Левин В. А., Черный Г. Г. Одномерные нестационарные течения горючей смеси газов с учетом конечной скорости химических реакций. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
2. Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
3. Кроль В. М., Немчинов И. В., Автомодельные движения нагреваемого излучением газа за фронтом ударной волны, инициирующей поглощение. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 5. М., «Наука», 1965.
5. Кроль В. М. Плоские автомодельные движения теплопроводного газа, нагреваемого излучением. ПМТФ, 1968, № 4.
6. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. Теория детонации. М., Гостехиздат, 1955.
7. Квашнина С. С., Черный Г. Г. Установившееся обтекание конуса потоком детонирующего газа. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
8. Lee T. H. The propagation of shocks and blast waves in a detonating gas. Rep. 65-1, Mc Gill Univ. Montreal, 1965.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Изд. 2. М., Гостехиздат, 1954.