

## ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ С ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЕЙ

В. П. АНДРЕЕВ

(Москва)

Рассматривается задача о плоском одномерном движении ударной волны предельного сжатия с подвижной внутренней границей, в которой известны начальное положение фронта, его интенсивность, масса охваченного движением газа и энергия, заключенная в этом газе. Задача не является автомодельной и ее точное решение, связанное с рассмотрением дифференциальных уравнений в частных производных, вызывает значительные трудности.

Ниже определяется закон движения фронта ударной волны в такой задаче по методу [1], позволяющему получить для его нахождения систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод основан на первоначальном задании степенной связи между безразмерными лагранжевой и эйлеровой переменными и замене уравнения энергии этой связью и интегралом энергии. Решение ищется в первом приближении.

Пусть в момент времени  $t = 0$  задается некоторый плоский слой газа, характеризующийся начальным размером  $x_0$ , массой  $m_0$ , приходящейся на единицу поверхности, и энергией  $E_0$ , отделенный от невозмущенного газа постоянной плотностью  $\rho_0$  фронтом ударной волны с начальной скоростью  $c_0$  и истекающий в вакуум со скоростью  $u_0$  (фиг. 1).

Предполагается отсутствие разрывов внутри слоя, газ считается невязким и нетеплопроводным, а процесс движения — адиабатическим. Задача решается в лагранжевой (массовой) системе координат.

Выбирая в качестве постоянных с независимыми размерностями длины, скорости и плотности величины  $x_0$ ,  $c_0$  и  $\rho_0$ , перейдем в рассматриваемой задаче к безразмерным функциям и безразмерным переменным.

Если ввести

$$R = \frac{x_2}{x_0}, \quad q = \frac{c}{c_0}, \quad \tau = \frac{c_0}{x_0} t, \quad \mu = \frac{m}{m_2} \quad (1)$$

и функции

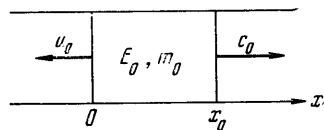
$$\lambda = \frac{x}{x_2}, \quad f = \frac{u}{u_2}, \quad g = \frac{\rho}{\rho_2}, \quad h = \frac{p}{p_2} \quad (2)$$

то известная система уравнений газовой динамики, описывающая односторонние плоские нестационарные течения газа, примет вид

$$f = \frac{\gamma + 1}{2} \left( \lambda + R \frac{\partial \lambda}{\partial R} - \frac{\mu}{y} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right), \quad g = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} y \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right)^{-1} \quad (3)$$

$$h = q^{-2} g^{\gamma} \varphi_0(\xi), \quad \frac{\partial h}{\partial \mu} = y \left( \frac{\mu}{y} \frac{\partial f}{\partial \mu} - R \frac{\partial f}{\partial R} - f \frac{R}{q} \frac{dq}{dR} \right)$$

$$\xi = yR\mu, \quad y = 1 + \frac{\alpha_1 - 1}{R}, \quad \alpha_1 = \frac{m_0}{\rho_0 x_0}, \quad \varphi_0(yR) = q^2$$



Фиг. 1

Здесь  $x$  — эйлерова координата,  $m$  — лагранжева координата,  $t$  — время,  $c$  — скорость фронта ударной волны,  $u$  — массовая скорость,  $p$  — давление,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\alpha_1$  — безразмерный параметр задачи; индексом 2 обозначены фронтовые значения соответствующих величин.

Интеграл энергии в безразмерных функциях имеет вид

$$\frac{\alpha_2}{yR} = \frac{2q^2}{(\gamma + 1)^2} \int_0^1 \left( f^2 + \frac{h}{g} \right) d\mu, \quad \alpha_2 = \frac{E_0}{\rho_0 x_0 c_0^2}$$

Здесь  $\alpha_2$  — второй безразмерный параметр задачи.

Краевые условия для системы (3):

на фронте волны

$$\lambda = f = g = h = 1 \quad \text{при } \mu = 1$$

на свободной границе газа

$$\lambda = -\alpha_3 \frac{\tau}{R}, \quad f = -\frac{\gamma + 1}{2} \frac{\alpha_3}{q}, \quad g = h = 0, \quad \alpha_3 = \frac{u_0}{c_0} \quad \text{при } \mu = 0$$

Здесь  $\alpha_3$  — третий безразмерный параметр задачи.

Задавая первоначальную степенную связь между безразмерными лагранжевой и эйлеровой переменными [1] и используя интеграл энергии, получаем следующую систему дифференциальных уравнений для определения закона движения фронта ударной волны:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dR} = \frac{1}{q}, \quad \frac{dq}{dR} = -\frac{q\beta}{yR} (2\beta + 1)^2 \left[ 2\beta + 1 - \frac{1}{2}(\gamma + 1)\alpha_3 \frac{\beta}{q} - \Phi_0 \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ \frac{1/4(\gamma + 1)^2 \alpha_3^2 \beta + q^2}{q^2 \beta} + \frac{(\gamma + 1)\alpha_3 [\Phi_0 q - (q + 1/2(\gamma + 1)\alpha_3)(\beta + 1)]}{q^2(\beta + 1)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1/2(\gamma + 1)\alpha_3 \beta [q + 1/2(\gamma + 1)\alpha_3] - \Phi_0 q^2}{q^2 \beta (2\beta + 1)} - \frac{1}{q\beta(2\beta + 1)^2} \times \right. \\ \left. \times \left[ (\gamma + 1)\alpha_3 \beta \Phi_0 + 1/2(\gamma - 1)qy \left( 2R \frac{dy}{dR} + R^2 \frac{d^2y}{dR^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma - 1} \frac{\Phi_0^2}{(2\beta + 1)^3} - \frac{(\gamma + 1)^2}{2} \frac{\alpha_2}{yRq^2} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} y \left( 1 + \alpha_3 \frac{\tau}{R} \right)^{-1}, \quad \Phi_0 = \frac{\gamma - 1}{2} R \frac{dy}{dR} - \frac{\gamma + 1}{2} \alpha_3 \beta \left( \frac{1}{q} - \frac{\tau}{R} \right)$$

Начальными условиями для системы (4) являются

$$\tau = 0, \quad q = 1 \quad \text{при } R = 1$$

Сформулированная задача имеет два предельных решения.

Если  $\alpha_3 = 0$ , т. е. отсутствует истечение газа в вакуум, то при любых значениях  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  решение должно асимптотически приближаться к автомодельному решению задачи о сильном взрыве для случая плоской симметрии [2]. Выход на автомодельный режим осуществляется тем быстрее, чем ближе параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  к значениям, соответствующим автомодельному решению

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{5\gamma - 3}{(3\gamma - 1)(\gamma^2 - 1)} = \frac{9}{8} \alpha \quad \left( \alpha = \frac{2E_0}{E} \right) \quad (5)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент, введенный в решении Л. И. Седова [2].

Действительно, при значениях (5) система (4) интегрируется в квадратурах и определяет автомодельный закон движения фронта ударной волны

$$q = R^{-1/2}$$

Проведенные вычисления  $\alpha$  по  $\alpha_2$  с помощью (5) при  $\gamma = 1.2, 1.4, 2.2, 3$  дают соответственно значения  $\alpha = 2.33, 1.16, 0.33, 0.167$ , которые совпадают со значениями, найденными в точном решении [2].

Если  $\alpha_3 \neq 0$ , то решение рассматриваемой задачи в пределе при  $R \rightarrow \infty$  должно переходить в решение задачи о кратковременном ударе [3]. В то же время ввиду конечной скорости разлета границы газа в вакуум интеграл энергии в этой задаче не расходится. Это позволяет в пределе определить

$B^{-1}\Delta B$	$\alpha_1$	$\alpha_2 = 0.1$	1.0	10	100	1000
$10^{-3}$	0.1	0.35	1.14	3.175	7.65	17.0
	1.0	0.445	1.17	3.25	7.70	17.05
	10	0.702	1.37	3.40	7.80	17.2
	20	0.740	1.38	3.47	7.95	17.4
	50	—	—	—	8.22	17.6
$10^{-4}$	0.1	0.256	0.89	2.93	8.05	19.3
	1.0	0.315	0.91	2.95	8.07	19.3
	10	0.430	1.01	2.98	8.17	19.4
	20	0.485	1.01	3.49	8.25	19.5
	50	—	—	—	8.47	19.7

безразмерную постоянную, входящую в выражение для закона движения фронта ударной волны в автомодельном решении, и связать ее с параметрами  $\gamma, \alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$ .

При возрастании  $R$  в соответствии с [3, 4] зависимость  $q$  от  $R$  должна стремиться к степенному закону вида

$$q = BR^\delta \quad (6)$$

вытекающему из закона движения фронта ударной волны в автомодельном решении

$$R = A\tau^\beta$$

где  $\beta$  — показатель автомодельности и  $A$  — неопределенная безразмерная постоянная, величина которой зависит от конкретных причин зарождения ударной волны и ее начальной стадии движения. Величины  $B$  и  $\delta$  связаны с  $A$  и  $\beta$  соотношениями

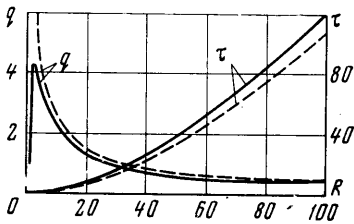
$$\delta = \frac{1 - \beta}{\beta}, \quad B = \beta A^{1/\beta}$$

Исследуя решение системы (4) при различных заданиях безразмерных параметров  $\gamma, \alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$ , можно получить следующие результаты:

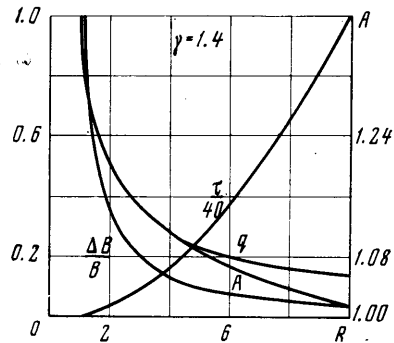
- 1) осуществляя контроль за изменением величины  $B$  в законе (6) и задавая допустимым пределом ее изменения, определить верхнюю границу применимости автомодельного закона движения фронта;
- 2) по предельной величине  $B$  определить постоянную  $A$  в автомодельном решении, т. е. получить зависимость  $A$  от безразмерных параметров задачи;
- 3) найти закон движения фронта в начальной неавтомодельной стадии.

В проведенном комплексе расчетов при определении закона движения фронта волны путем численного интегрирования системы (4) фиксировались значения безразмерного радиуса фронта  $R$ , на которых относительное изменение величины  $B$  на шаге  $\Delta R = 1$  не превышало  $10^{-3}$  и  $10^{-4}$ .

В таблице приведены значения безразмерной постоянной  $A$  в зависимости от  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  при  $\alpha_3 = 2/(\gamma + 1)$  для  $\gamma = 1.4$ . Эти значения по существу связывают закон движения фронта в автомодельной стадии с конкретными причинами возникновения ударной волны, которые определяют задание раз-



Фиг. 2



Фиг. 3

мерных величин  $r_0$ ,  $E_0$ ,  $m_0$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$  и  $u_0$ . Из таблицы видно, что  $A$  слабо зависит от параметра  $\alpha_1$  и сильно изменяется при изменении  $\alpha_2$ . Как показали расчеты, при  $\gamma = 3$  в диапазоне значений  $0.1 \leq \alpha_1 \leq 20$  коэффициент  $A$  практически оказался не зависящим от параметра  $\alpha_1$ .

На фиг. 2 приведены зависимости  $q(R)$  и  $\tau(R)$  для  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 50$ ,  $\alpha_3 = 0.833$ ,  $\gamma = 1.4$  в стадии неавтомодельного движения. Пунктиром показан автомодельный закон движения фронта ударной волны. Как видно, при больших значениях параметра  $\alpha_2$  скорость фронта ударной волны первоначально возрастает за счет интенсивного перехода потенциальной энергии возмущенного газа в кинетическую энергию его разлета.

В качестве конкретного примера рассмотрим движение сильной ударной волны, вызванное кратковременным действием поршня, движущегося с постоянной скоростью  $u_1$  в течение времени  $t_1$ . Предполагается, что после момента  $t_1$  поршень убирается и сжатый газ расширяется в вакуум [5].

Поршень образует в газе ударную волну, фронт которой до момента  $t_0$  распространяется с постоянной скоростью

$$c_0 = \frac{1}{2}(\gamma + 1)u_1 \quad (7)$$

Время  $t_0$  определяет момент догона фронта ударной волны волной разрежения, идущей от свободной границы газа.

Этот момент времени удобнее всего принять за начальный, так как начиная с него в движущемся газе отсутствуют слабые разрывы. Принимая за начало координат положение разлетающейся в вакуум границы в момент  $t_0$ , получаем для размерных параметров задачи следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}(\gamma + 1)\rho_0 u_1^3 t_1, & m_0 &= \frac{1}{2}(\gamma - 1)k(1 + k)\rho_0 u_1 t_1 \\ u_0 &= (k - 1)u_1, & x_0 &= \frac{1}{2}(\gamma - 1)k(1 + k)u_1 t_1, & k &= [2\gamma / (\gamma - 1)]^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

Начало координат, от которого в дальнейшем будет отсчитываться радиус фронта ударной волны, оказывается для рассматриваемой задачи совпадающим с первоначальным положением поршня, а время, прошедшее от начала движения поршня, будет отсчитываться от момента

$$t_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} k(1 + k)t_1$$

Формулы (7), (8) определяют все размерные величины через  $\gamma$ ,  $u_1$ ,  $t_1$  и плотность невозмущенного газа  $\rho_0$ . В соответствии с ними безразмерные параметры задачи следует принять равными

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma(\gamma + 1)^2} k(k - 1), \quad \alpha_3 = \frac{2}{\gamma + 1}(k - 1) \quad (9)$$

Заметим, что они оказываются зависящими только от показателя адиабаты  $\gamma$ .

Аналогичным образом могут быть определены размерные параметры в других конкретных задачах, например когда поршень в рассмотренной выше задаче спустя время  $t_1$  после движения не убирается, а останавливается, или когда движение ударной волны вызвано мгновенным взрывом слоя газа на границе с вакуумом.

Закон движения фронта ударной волны в рассмотренном примере, полученный интегрированием системы (4) при значениях безразмерных параметров задачи, которые определяются формулами (9) для  $\gamma = 1.4$ , представлен на фиг. 3. Там же приведены значения  $B^{-1} \Delta B$  на шаге  $\Delta R = 1$  и  $A$  в зависимости от безразмерного радиуса  $R$ . К сожалению, сопоставить закон движения фронта с законом в точном решении [9] не представилось возможным, так как последний не был приведен в публикации.

В заключение автор выражает признательность М. А. Шабановой за проведение расчетов и Ю. П. Райзеру за просмотр рукописи.

Поступило 27 XI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. П. Метод последовательных приближений для одномерных нестационарных задач газовой динамики. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
2. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
3. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
5. Жуков А. И., Каждан Я. М., О движении газа под действием кратковременного импульса. Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 4.